LAS REGLAS DE L'HÔPITAL

Las reglas de l'Hôpital para el cálculo de límites (en principio indeterminados, de la forma $0/0$ o ∞/∞) se basan en el teorema del valor medio de Cauchy, que recordamos a continuación.

Teorema 1 (del valor medio de Cauchy)**.** Si f, g son funciones continuas en un intervalo $[a, b]$ y derivables en el intervalo abierto (a, b), entonces existe $x_0 \in (a, b)$ tal que

$$(f(b) - f(a))\, g'(x_0) = (g(b) - g(a))\, f'(x_0).$$

Demostración. Definamos

$$h(x) = (g(b) - g(a))\, f(x) - (f(b) - f(a))\, g(x).$$

Es claro que h es una función continua en $[a, b]$ que es derivable en (a, b), al ser combinación lineal de funciones con estas propiedades. Además es inmediato comprobar que $h(a) = h(b)$. Por el teorema de Rolle existe entonces un punto $x_0 \in (a, b)$ tal que

$$0 = h'(x_0) = (g(b) - g(a))\, f'(x_0) - (f(b) - f(a))\, g'(x_0).$$

□

Hay dos reglas básicas de l'Hôpital, de las cuales se deducen, mediante adaptaciones fáciles en las demostraciones, o mediante manipulaciones sencillas, todas las demás variantes de estos resultados.

Teorema 2 (Regla 1 de Hôpital)**.** Sean $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivables, y supongamos que existen $\lim_{x\to a^+} f(x) = 0 = \lim_{x\to a^+} g(x)$, y $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Entonces existe $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$, y

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Demostración. Observemos primero que, puesto que $\lim_{x\to a^+} f(x) = 0 = \lim_{x\to a^+} g(x)$, podemos extender las funciones f y g con continuidad al intervalo $[a, b)$, simplemente poniendo $f(a) = 0 = g(a)$.

Pr otro lado, la suposición de que existe $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ implícitamente asume la existencia de un número $\delta > 0$ tal que

$$g'(x) \neq 0 \qquad (*)$$

para todo $x \in (a, a + \delta)$. Esto implica a su vez que

$$g(x) \neq 0$$

para todo $x \in (a, a+\delta)$, ya que de lo contrario, si $g(x) = 0$ para algún $x \in (a, a+\delta)$, aplicando el teorema de Rolle, existiría un $s \in (a, x)$ tal que $g'(s) = 0$, contradiciendo $(*)$.

Sea ahora (x_n) una sucesión cualquiera contenida en $(a, a + \delta)$ y tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Si probamos que $f(x_n)/g(x_n)$ converge a $\lim_{x\to a^+} f'(x)/g'(x)$ habremos concluido, gracias a la caracterización del límite de una función por sucesiones. Aplicando el teorema del valor medio de Cauchy a f y g en el intervalo $[a, x_n]$, y recordando que $f(a) = 0 = g(a)$, obtenemos que existe $t_n \in (a, x_n)$ tal que

$$f(x_n)g'(t_n) = g(x_n)f'(t_n), \qquad (**)$$

lo que gracias a $(*)$ equivale a

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(t_n)}{g'(t_n)}.$$

Nótese que puesto que $a < t_n < x_n$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, se tiene que $\lim_{n\to\infty} t_n = a$, luego

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f'(t_n)}{g'(t_n)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

y por consiguiente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(t_n)}{g'(t_n)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

como queríamos comprobar. □

Corolario 3. Sean $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivables, y supongamos que existen $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to\infty} g(x)$, y $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Entonces existe $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, y

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Demostración. Poniendo $x = 1/t$, observando que $t \to 0^+$ si y sólo si $x \to \infty$, y aplicando el teorema anterior se tiene que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(1/t)}{g(1/t)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{(-1/t^2)f'(1/t)}{(-1/t^2)g'(1/t)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

□

Teorema 4 (Regla 2 de Hôpital)**.** Sean $f, g : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ derivables, y supongamos que existen $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty = \lim_{x\to\infty} g(x)$, y que también existe $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Entonces existe $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, y

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Demostración. Consideraciones similares a las de la demostración del Teorema 2 indican que $g'(x) \neq 0 \neq g(x)$ para todo x en algún intervalo de la forma $[M, \infty)$, con $M \geq a$. Denotemos $\ell = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, y supongamos que es finito. Dado $\varepsilon \in (0, 1)$, existe $A \geq M$ tal que

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - \ell \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $x \geq A$. Por otro lado, puesto que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, existe $B > A$ tal que $f(x) > f(A)$ para todo $x \geq B$, y considerando la función

$$\varphi(x) = \frac{g(x) - g(A)}{g(x)} \frac{f(x)}{f(x) - f(A)},$$

y observando que $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = 1$, podemos encontrar un número $C \geq B$ tal que

$$|\varphi(x) - 1| \leq \frac{\varepsilon}{2(1 + |\ell|)}$$

si $x \geq C$. Entonces, para todo $x \geq C$, aplicando el teorema del valor medio de Cauchy a f y g en el intervalo $[A, x]$ obtenemos un número $t_{x,A} \in (A, x)$ tal que

$$\frac{f(x) - f(A)}{g(x) - g(A)} = \frac{f'(t_{x,A})}{g'(t_{x,A})}.$$

Luego, observando que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \varphi(x) \frac{f(x) - f(A)}{g(x) - g(A)} = \varphi(x) \frac{f'(t_{x,A})}{g'(t_{x,A})},$$

concluimos que, para todo $x \geq C$,

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \ell \right| \leq \left| \varphi(x) \frac{f'(t_{x,A})}{g'(t_{x,A})} - \frac{f'(t_{x,A})}{g'(t_{x,A})} \right| + \left| \frac{f'(t_{x,A})}{g'(t_{x,A})} - \ell \right| =$$

$$\left| \frac{f'(t_{x,A})}{g'(t_{x,A})} \right| |\varphi(x) - 1| + \left| \frac{f'(t_{x,A})}{g'(t_{x,A})} - \ell \right| \leq (1 + |\ell|) \frac{\varepsilon}{2(1 + |\ell|)} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esto prueba que
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}:=\ell$$
en el caso en que $\ell\in\mathbb{R}$.

Supongamos ahora que $\ell=\infty$ (en el caso restante, $\ell=-\infty$, el razonamiento es completamente análogo).

Dado $M>0$, existe $A>0$ tal que
$$\frac{f'(x)}{g'(x)}\geq 2M$$
para todo $x\geq A$. Por otro lado, puesto que $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, existe $B>A$ tal que $f(x)>f(A)$ para todo $x\geq B$, y considerando la función
$$\varphi(x)=\frac{g(x)-g(A)}{g(x)}\frac{f(x)}{f(x)-f(A)},$$
y observando que $\lim_{x\to\infty}\varphi(x)=1$, podemos encontrar un número $C\geq B$ tal que
$$\varphi(x)\geq\frac{1}{2}$$
si $x\geq C$. Entonces, para todo $x\geq C$, aplicando el teorema del valor medio de Cauchy a f y g en el intervalo $[A,x]$ obtenemos un número $t_{x,A}\in(A,x)$ tal que
$$\frac{f(x)-f(A)}{g(x)-g(A)}=\frac{f'(t_{x,A})}{g'(t_{x,A})}.$$
Luego
$$\frac{f(x)}{g(x)}=\varphi(x)\frac{f(x)-f(A)}{g(x)-g(A)}=\varphi(x)\frac{f'(t_{x,A})}{g'(t_{x,A})}\geq\frac{1}{2}2M=M$$
para todo $x\geq C$, y esto prueba que
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty.$$
□

Corolario 5. Sean $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivables, y supongamos que existen $\lim_{x\to a^+}f(x)=\infty=\lim_{x\to a^+}g(x)$, y que también existe $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Entonces existe $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}$, y
$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Demostración. Poniendo $t=1/(x-a)$, o sea $x=a+1/t$, observando que $t\to\infty$ si y sólo si $x\to a^+$, y aplicando el teorema anterior se tiene que
$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to\infty}\frac{f(a+1/t)}{g(a+1/t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{(-1/t^2)f'(a+1/t)}{(-1/t^2)g'(a+1/t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{f'(a+1/t)}{g'(a+1/t)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$
□

Como ya hemos indicado, todas las demás versiones de la regla de L'Hôpital son consecuencias inmediatas de los enunciados o las demostraciones anteriores. En lugar de detallar todas y cada una de las numerosas variantes posibles, enunciaremos la siguiente versión abstracta del teorema de l'Hôpital, cuya comprobación dejamos al cuidado del lector.

Teorema 6 (versión abstracta de la regla de l'Hôpital)**.** Sean $\mathcal{I}=\{0,+\infty,-\infty\}$, $\mathcal{L}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}:=[-\infty,\infty]$, y $\mathcal{A}=\{x_0^+,x_0^-,x_0,-\infty,\infty\}$, donde $x_0\in\mathbb{R}$. Fijados $\eta\in\mathcal{I}$, $\ell\in\mathcal{L}$, y $\alpha\in\mathcal{A}$, supongamos que existen
$$\lim_{x\to\alpha}f(x)=\eta=\lim_{x\to\alpha}g(x),$$

y que también existe

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell.$$

Entonces existe $\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$, y

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

Hay otras indeterminaciones de tipo exponencial (por ejemplo, 0^0, o 1^∞), que también pueden tratarse con los resultados anteriores, si previamente se toman logaritmos. Por ejemplo, consideremos una función h de la forma

$$h(x) = f(x)^{g(x)},$$

en donde $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$, y $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$. Entonces

$$\varphi(x) := \log h(x) = g(x) \log f(x) = \frac{\log f(x)}{1/g(x)}$$

tiene una indeterminación del tipo $0/0$ cuando $x \to \infty$. Suponiendo que exista

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}\left(\log f(x)\right)}{\frac{d}{dx}\left(1/g(x)\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{-f'(x)g(x)^2}{g'(x)f(x)} = \ell,$$

entonces, gracias a la regla de l'Hôpital existirá

$$\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \ell,$$

y por tanto también existirá

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} e^{\varphi(x)} = e^{\ell}.$$

Un ejemplo destacado de esta situación se tiene cuando tomamos $f(x) = 1 + \frac{a}{x}$ y $g(x) = x$, en cuyo caso el razonamiento anterior prueba que

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a.$$