SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS DEL EXAMEN FINAL DE ANÁLISIS DE FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA DEL 15/01/2019.

Problema 1. Usar el teorema de los residuos en el semicírculo superior de radio R para calcular el valor de la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{1+x^2} dx.$$

Solución: Denotemos por D_R el semidisco superior de radio R, es decir, $D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R, \operatorname{Im} z > 0\}$. Su borde es la curva $\partial D_R = \gamma_R \cup \sigma_R$, donde denotamos $\sigma_R(t) = t$, $t \in [-R, R]$, y $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Consideremos la función

$$f(z) = \frac{ze^{iz}}{1+z^2},$$

que es meromorfa con polos simples en i y $-i$. El único polo de f que queda dentro de D_R para todo $R > 1$ es i, y el residuo de f en este polo es

$$\operatorname{Res}(f, i) = \lim_{z \to i} (z - i) f(z) = \lim_{z \to i} \frac{ze^{iz}}{z+i} = \frac{ie^{i^2}}{2i} = \frac{1}{2e}.$$

Luego, por el teorema de los residuos, si $R > 1$,

$$\frac{\pi}{e} i = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i) = \int_{\partial D_R} f = \int_{\gamma_R} f + \int_{\sigma_R} f. \tag{1}$$

Por un lado, tenemos que, para todo $R > 1$,

$$\left| \int_{\gamma_R} f \right| = \left| \int_{\gamma_R} \frac{ze^{iz}}{1+z^2} dz \right| \leq \frac{R}{R^2-1} \int_{\gamma_R} |e^{iz}|\, |dz| < \frac{R}{R^2-1}\pi,$$

donde en la última desigualdad hemos usado el lema de Jordan (problema 9.10 del manual de la asignatura; por supuesto, también podría repetirse aquí el argumento de acotación que nos da la demostración del lema de Jordan, aunque esto no es necesario). Tomando límites cuando $R \to \infty$ en la anterior desigualdad se deduce que

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_R} f = 0. \tag{2}$$

Por otro lado,

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\sigma_R} f = \lim_{R \to \infty} \left(\int_{-R}^{R} \frac{x \cos x}{1+x^2} dx + i \int_{-R}^{R} \frac{x \operatorname{sen} x}{1+x^2} dx \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{1+x^2} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{1+x^2} dx. \tag{3}$$

Por tanto, combinando (1), (2) y (3), deducimos que

$$\frac{\pi}{e} i = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{1+x^2} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{1+x^2} dx,$$

y en particular que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{e}.$$

Problema 2. Sea E un conjunto discreto (es decir, sin puntos de acumulación). Demostrar que si $f : \mathbb{C} \setminus E \to \mathbb{C}$ es holomorfa y acotada entonces f es constante.

Solución: Sea $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus E$. Como E es un subconjunto discreto del plano, es numerable, digamos $E = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$, y para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $r_k > 0$ tal que $D(z_k, r_k) \cap E = \emptyset$.

En particular, para cada $k \in \mathbb{N}$, f tiene una singularidad aislada en z_k, y puesto que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in D(z_k, r_k)$, sabemos, por el teorema de Riemann de las singularidades evitables, que existe una función F_k holomorfa en $D(z_k, r_k)$ tal que $F_k(z) = f(z)$ para todo $z \in D(z_k, r_k) \setminus \{z_k\}$. Podemos entonces extender la función f a una función $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ poniendo

$$F(z) = f(z) \text{ si } z \in \mathbb{C} \setminus E, \text{ y}$$

$$F(z_k) = F_k(z_k) \text{ para cada } k \in \mathbb{N}.$$

Al ser E discreto, el conjunto $\mathbb{C} \setminus E$ es abierto, con lo que para cada $z \in \mathbb{C} \setminus E$ existe $r_z > 0$ tal que $D(z, r_z) \cap E = \emptyset$, y así $F = f$ en $D(z, r_z)$, y como f es holomorfa en este disco abierto entonces F también lo es. Luego F es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus E$. Y además F es también holomorfa en cada punto z_k, puesto que $F = F_k$ en $D(z_k, r_k)$ y F_k es holomorfa en este disco. Por tanto F es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus E \cup E = \mathbb{C}$. Es decir, F es entera. Por otro lado, es claro que

$$|F(z)| \leq M$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ (si $z \notin E$, se tiene $|F(z)| = |f(z)| \leq M$, y si $z \in E$, digamos $z = z_k$, entonces $|F(z_k)| = \lim_{z \to z_k} |f(z)| \leq M$). Luego, por el teorema de Liouville, F es constante, y por tanto también f es constante.

Problema 3. Sea $h : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ una función continua a trozos (en el sentido de que h es continua salvo en un conjunto de puntos aislados $A \subset (0, \infty)$, y en cada $a \in A$ existen $\lim_{x \to a^-} h(x)$ y $\lim_{x \to a^+} h(x)$). Supongamos que existen $\alpha, \beta \geq 0$ tales que

$$|h(x)| \leq \alpha e^{\beta x}$$

para todo $x \in [0, \infty)$. Demostrar que la función

$$f(z) = \int_0^\infty h(x) e^{-zx},$$

está bien definida y es holomorfa en el semiplano $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re}\, z > \beta\}$. Demostrar también que si se tiene $|h(x)| \leq a x^N e^{bx}$ para todo $x \in [0, \infty)$, donde $a, b > 0$, $N \in \mathbb{N}$, entonces existe $C > 0$ tal que $|f(z)| \leq C/(\text{Re} z - b)^{N+1}$ para todo z con $\text{Re} z > b$.

Solución: Puesto que

$$\int_0^\infty |h(x) e^{-zx}| dx \leq \int_0^\infty |h(x)| e^{-\text{Re} z x} dx \leq \int_0^\infty \alpha e^{\beta x} e^{-\text{Re} z x} dx = \frac{\alpha}{\text{Re z} - \beta},$$

es obvio que la función f está bien definida. Sean $a_1 < a_2 < a_3 < ...$ los puntos de discontinuidad de h. Si sólo hay una cantidad finita de ellos, digamos $a_1 < ... < a_{k_0}$, entonces añadimos puntos $a_{k_0 + j} = a_{k_0} + j$ para todo $j \in \mathbb{N}$ y consideramos la sucesión creciente no acotada (a_k); en caso contrario, al ser por hipótesis los a_k aislados se tiene también $\lim_{k \to \infty} a_k = \infty$. Como h es continua a trozos y sus puntos de discontinuidad están en el conjunto $\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$, h tiene una extensión continua a cada intervalo $[a_k, a_{k+1}]$, extensión que llamaremos h_k. Aplicando el teorema de derivación bajo el signo integral se comprueba inmediatamente que cada función

$$f_k(z) := \int_{a_k}^{a_{k+1}} h_k(x) e^{-zx} dx$$

es holomorfa en $\Omega := \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}\, z > \beta\}$ (de hecho f_k es holomorfa en todo $\mathbb{C}$, aunque esto no es relevante en el argumento que sigue). Si probamos que

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$$

uniformemente en los compactos de Ω, entonces gracias al Teorema 5.17 sabremos que f es holomorfa en Ω. Y, efectivamente, si K es un subconjunto compacto de Ω entonces existe $B_K > \beta$ tal que $\text{Re} z \geq B_K$ para todo

$z \in K$, y tenemos

$$\left| f(z) - \sum_{k=1}^{N} f_k(z) \right| = \left| \int_{a_{N+1}}^{\infty} h(x) e^{-zx} dx \right| \leq$$
$$\int_{a_{N+1}}^{\infty} |h(x)| \, e^{-\text{Re}zx} dx \leq \int_{a_{N+1}}^{\infty} \alpha e^{\beta x} e^{-\text{Re}zx} dx \leq \int_{a_{N+1}}^{\infty} \alpha e^{(\beta - B_K)x} dx \to 0$$

cuando $N \to \infty$ (ya que $\lim_{N\to\infty} a_{N+1} = \infty$ y $\int_0^\infty 2\alpha e^{(\beta - B_K)x} dx < \infty$), lo cual muestra que

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} f_k(z) = f(z)$$

uniformemente en $\{z : \text{Re}z \geq B_K\}$, y por tanto también uniformemente en $z \in K$.

Finalmente, si se supone que $|h(x)| \leq ax^N e^{bx}$ para todo $x \in [0, \infty)$, donde $a, b > 0$, $N \in \mathbb{N}$ (hipótesis que, como se comprueba fácilmente, implica que h cumple también la condición de acotación de la primera parte), entonces tenemos

$$|f(z)| \leq \int_0^\infty ax^N e^{bx} e^{-\text{Re}zx} dx = \int_0^\infty ax^N e^{(b-\text{Re}z)x} dx.$$

Integrando por partes N veces, el miembro de la derecha puede verse que es igual a

$$a \frac{N!}{(\text{Re}z - b)^{N+1}}.$$

Problema 4. Sea f holomorfa en $D(0, 2)$, y supongamos que f es inyectiva en $\overline{D}(0, 1)$, y que $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in \overline{D}(0, 1)$. Demostrar que existe $\varepsilon > 0$ tal que f es inyectiva en $D(0, 1 + \varepsilon)$.

Solución: Razonando por reducción al absurdo, si no existiera el ε del enunciado, existirían sucesiones (z_k), (w_k) tales que $f(z_k) = f(w_k)$ y $z_k \neq w_k$ para todo k, y también $z_k, w_k \in D(0, 1 + \frac{1}{k})$. Como $\overline{D}(0, 2)$ es compacto, podemos suponer, tomando subsucesiones si es necesario, que (z_k) y (w_k) son convergentes; llamemos $z_0 = \lim_{k\to\infty} z_k$ y $w_0 = \lim_{k\to\infty} w_k$. Claramente $z_0, w_0 \in \overline{D}(0, 1)$. Por una parte, si $z_0 \neq w_0$ se tiene, por continuidad de f, que

$$f(z_0) = \lim_{k\to\infty} f(z_k) = \lim_{k\to\infty} f(w_k) = f(w_0),$$

y entonces f no sería inyectiva en $\overline{D}(0, 1)$. Y por otra parte, si $z_0 = w_0$, por el teorema de la función inversa existe $r_0 > 0$ tal que f es inyectiva en $D(z_0, r_0)$; pero para k suficientemente grande tenemos $z_k, w_k \in D(z_0, r_0)$, y sin embargo $f(z_k) = f(w_k)$ y $z_k \neq w_k$.

Problema 5. Sea $f : D\left(0, 1 + 10^{-6}\right) \to \mathbb{C}$ holomorfa. Demostrar que existe z_0 con $|z_0| = 1$ tal que, si definimos

$$g(x, y) = |f(x + iy)|,$$

entonces:

1. g es diferenciable (en sentido real) en z_0;
2. para $w_0 = \nabla g(z_0)$ se tiene que $\text{Re}(z_0 \overline{w_0}) \geq 0$.

Solución: Por el teorema del módulo máximo, el máximo valor de g en el compacto $\overline{D}(0, 1)$ se alcanza en un punto $z_0 \in \partial D(0, 1)$. Si este máximo es 0, entonces g es constantemente 0 en $\overline{D}(0, 1)$, y por tanto f también, lo que por el teorema de identidad implica que f es igual a 0 en $D(0, 1 + 10^{-6})$, y en particular es diferenciable en z_0. Si este máximo es estrictamente positivo entonces $f(z_0) \neq 0$, y como el módulo en $\mathbb{C}$ coincide con la norma en $\mathbb{R}^2$ y esta es diferenciable fuera de 0, por la regla de la cadena y por continuidad de f resulta que $g = |\cdot| \circ f$ es diferenciable en un entorno de z_0, y en particular también en z_0.

Usando otra vez el teorema del módulo máximo, tenemos

$$g(z_0 + tz_0) \leq g(z_0) \text{ para todo } t \in (-1, 0),$$

lo cual implica, denotando $w_0 = \nabla g(z_0)$, que

$$\mathrm{Re}(z_0 \overline{w_0}) = \langle \nabla g(z_0), z_0 \rangle = \frac{d}{dt} g(z_0 + tz_0)_{|t=0} = \lim_{t \to 0^-} \frac{g(z_0 + tz_0) - g(z_0)}{t} \geq 0.$$