SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS DEL EXAMEN FINAL DE ANÁLISIS DE FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA DEL 3 FEBRERO DE 2021.

Problema 1. Usar el teorema de los residuos en el semicírculo superior de radio R para calcular el valor de la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \operatorname{sen}(2x)}{1+x^4} dx.$$

Solución: Denotemos por D_R el semidisco superior de radio R, es decir, $D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R, \mathrm{Im} z > 0\}$. Su borde es la curva $\partial D_R = \gamma_R \cup \sigma_R$, donde denotamos $\sigma_R(t) = t$, $t \in [-R, R]$, y $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Consideremos la función

$$f(z) = \frac{z^3 e^{i2z}}{1+z^4},$$

que es meromorfa con polos simples en las raíces cuartas de -1, a saber, los puntos $e^{i\pi/4}, e^{i3\pi/4}, e^{-i\pi/4}, e^{-i3\pi/4}$. Los únicos polos de f que quedan dentro de D_R para todo $R > 1$ son $z_0 := e^{i\pi/4}$ y $z_1 := e^{i3\pi/4}$, y los residuos de f en estos polos son

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{z^3 e^{i2z}}{\frac{d}{dz}(1+z^4)} = \lim_{z \to z_0} \frac{z^3 e^{i2z}}{4z^3} = \frac{e^{i2e^{i\pi/4}}}{4}$$

y

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_1} \frac{z^3 e^{i2z}}{\frac{d}{dz}(1+z^4)} = \lim_{z \to z_1} \frac{z^3 e^{i2z}}{4z^3} = \frac{e^{i2e^{i3\pi/4}}}{4}.$$

Luego, por el teorema de los residuos, si $R > 1$,

$$\int_{\gamma_R} f + \int_{\sigma_R} f = \int_{\partial D_R} f = 2\pi i \left(\frac{e^{i2e^{i\pi/4}}}{4} + \frac{e^{i2e^{i3\pi/4}}}{4} \right) = \pi i e^{-\sqrt{2}} \frac{e^{i\sqrt{2}} + e^{-i\sqrt{2}}}{2} = \pi i e^{-\sqrt{2}} \cos \sqrt{2}. \quad (1)$$

Por un lado, tenemos que, para todo $R > 1$,

$$\left| \int_{\gamma_R} f \right| = \left| \int_{\gamma_R} \frac{z^3 e^{i2z}}{1+z^4} dz \right| \leq \int_0^{\pi} \frac{|R^3 e^{i3t}||e^{2iRe^{it}}||Rie^{it}|}{|1+R^4 e^{i4t}|} dt \leq \int_0^{\pi} \frac{R^4 e^{-2R \operatorname{sen} t}}{R^4 - 1} dt$$
$$= 2\frac{R^4}{R^4-1} \int_0^{\pi/2} e^{-2R \operatorname{sen} t} dt \leq 2\frac{R^4}{R^4-1} \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{4}{\pi} Rt} dt = \frac{R^3}{R^4-1} \left(1 - e^{-4R}\right) \frac{\pi}{2}$$

Tomando límites cuando $R \to \infty$ en la anterior desigualdad se deduce que

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_R} f = 0. \quad (2)$$

Por otro lado,

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\sigma_R} f = \lim_{R \to \infty} \left(\int_{-R}^{R} \frac{x^3 \cos 2x}{1+x^4} dx + i \int_{-R}^{R} \frac{x^3 \operatorname{sen} 2x}{1+x^4} dx \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \cos 2x}{1+x^4} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \operatorname{sen} 2x}{1+x^4} dx. \quad (3)$$

Por tanto, combinando (1), (2) y (3), deducimos que

$$\pi i e^{-\sqrt{2}} \cos \sqrt{2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \cos 2x}{1+x^4} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \operatorname{sen} 2x}{1+x^4} dx,$$

y en particular que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \operatorname{sen} 2x}{1+x^4} dx = \pi e^{-\sqrt{2}} \cos \sqrt{2}.$$

Problema 2. Sean Ω un abierto de $\mathbb{C}$, $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión contenida en Ω tal que existe $\lim_{k\to\infty} z_k = z_0 \in \Omega$, y sea f una función holomorfa en $\Omega \setminus E$, donde $E = \{z_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{z_0\}$. Supongamos también que existen $A > 0$ y $r \in (0,1)$ tal que

$$|f(z)| \leq \frac{A}{|z - z_0|^r}$$

para todo $z \in \Omega \setminus E$. Demostrar que f tiene una extensión holomorfa a Ω.

Solución: Para cada $k \in \mathbb{N}$, supongamos primero que $z_k \neq z_0$, entonces z_k es un punto aislado de E; por tanto existe $r_k > 0$ tal que $D(z_k, r_k) \cap E = \{z_k\}$, y se tiene que f es holomorfa en $D(z_k, r_k) \setminus \{z_k\}$. Además f está acotada en este conjunto, ya que

$$|f(z)| \leq \frac{A}{|z - z_0|^r} \leq \frac{A}{(|z_k - z_0| - r_k)^r}$$

para todo $z \in D(z_k, r_k) \setminus \{z_k\}$. Por el teorema de Riemann de las singularidades evitables, se deduce que f_k tiene una extensión holomorfa F_k definida en $(\Omega \setminus E) \cup D(z_k, r_k)$. Si $z_j \neq z_0 \neq z_k$ entonces las funciones F_k y F_j coinciden en $\Omega \setminus E$. Esto nos permite definir correctamente $F : \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ por $F(z) = F_k(z)$ si $z \in (\Omega \setminus E) \cup D(z_k, r_k)$, $z_k \neq z_0$, y es claro que $F \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\})$.

Consideremos ahora la función $G(z) := (z - z_0)F(z)$, que es holomorfa en $\Omega \setminus \{z_0\}$, y si ponemos $G(z_0) := 0$ es continua en Ω, ya que

$$|G(z)| = |z - z_0|\,|F(z)| \leq |z - z_0| \frac{A}{|z - z_0|^r} = A|z - z_0|^{1-r} \to 0$$

cuando $z \to z_0$. Aplicando otra vez el citado teorema de Riemann, se deduce que G es holomorfa en Ω, y G tiene un cero en z_0. Entonces la función $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ definida por

$$\varphi(z) = \begin{cases} \frac{G(z)}{z - z_0} & \text{si } z \neq z_0 \\ G'(z_0) & \text{si } z = z_0, \end{cases}$$

o, equivalentemente, por $G(z)/(z - z_0)$ si $z \neq z_0$ y por $G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^{n-1}$ si $z \in D(z_0, r) \subset \Omega$, es holomorfa, y coincide con F en $\Omega \setminus \{z_0\}$, y por tanto también coincide con f en $\Omega \setminus E$. $\square$

Problema 3. Sean f holomorfa en un abierto conexo Ω de $\mathbb{C}$, V un abierto conexo y acotado tal que $K := \overline{V} \subset \Omega$, f no constante, y $|f|$ constante en ∂K. Demostrar que f tiene al menos un cero en K.

Solución: Sea A la constante a la que es igual $|f|$ en ∂K. Supongamos que f no tiene ningún cero en K, entonces $1/f$ está bien definida y es holomorfa en un abierto U que contiene a K. Por el teorema del módulo máximo, aplicado tanto a f como a $1/f$, se tiene que

$$\max_{z\in K} |f(z)| = \max_{z\in\partial K} |f(z)| = A, \quad \text{y} \quad \max_{z\in K} \left|\frac{1}{f(z)}\right| = \max_{z\in\partial K} \left|\frac{1}{f(z)}\right| = \frac{1}{A},$$

y como $\max_K 1/|f| = 1/\min_K |f|$, se deduce que también

$$\min_{z\in K} |f(z)| = A.$$

Luego

$$\max_{z\in K} |f(z)| = A = \min_{z\in K} |f(z)|,$$

es decir, $|f|$ es constante en K, lo que implica que f es constante en V (esto se ha visto en los ejercicios del capítulo 2, pero también puede probarse directamente usando el teorema de la aplicación abierta: si f no es constante, $f(V)$ es un abierto no vacío, luego no puede estar contenido en $\{z \in \mathbb{C} : |z| = A\}$). Y por el teorema de identidad se sigue que f es constante en Ω. Absurdo. $\square$

Problema 4. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto convexo, y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\mathrm{Re} f'(z) > 0$ para todo $z \in \Omega$. Demostrar que f es inyectiva en Ω.

Solución: Dados $z_0, z_1 \in \Omega$ tales que $z_0 \neq z_1$, denotemos $v := z_1 - z_0$, observemos que el segmento $[z_0, z_1]$ está contenido en Ω ya que este conjunto es convexo, y consideremos la función $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(t) = \langle v, f(z_0 + tv) \rangle.$$

Si Re $f'(z) = \alpha(z)$ y Im $f'(z) = \beta(z)$, usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann, podemos escribir

$$Df(z) = \begin{pmatrix} \alpha(z) & -\beta(z) \\ \beta(z) & \alpha(z) \end{pmatrix}$$

y por la regla de la cadena se tiene que

$$\varphi'(t) = \langle v, Df(z_0 + tv)(v) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha(z_0 + tv) & -\beta(z_0 + tv) \\ \beta(z_0 + tv) & \alpha(z_0 + tv) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle$$
$$= \left(v_1^2 + v_2^2\right) \alpha(z_0 + tv) = |v|^2 \mathrm{Re}\, f'(z_0 + tv) > 0.$$

Luego φ es estrictamente creciente en $[0,1]$, y por tanto $\varphi(0) < \varphi(1)$, lo que significa que

$$\langle v, f(z_1) - f(z_0) \rangle > 0,$$

y en particular $f(z_0) \neq f(z_1)$. $\square$