SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS DEL EXAMEN FINAL DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DEL 28/01/2021.

Problema 1. Consideremos la ecuación $x'(t) = g(t, x(t)) + f(t, x(t))$, donde $f, g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ son de clase C^1, g es acotada y f es Lipschitz.

1. Demostrar que todas las soluciones están definidas para todo tiempo.
2. Supongamos que $t \mapsto f(t, x)$ y $t \mapsto g(t, x)$ son T-periódicas para cada $x \in \mathbb{R}^n$, donde $T > 0$. Dado $x \in \mathbb{R}^n$, demostrar que $t \mapsto \phi(t, x)$ es T-periódica si y sólo si $\phi(0, x) = \phi(T, x)$.

Consideremos ahora $f, g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 y tales que para cada $\lambda \in \mathbb{R}^m$ las funciones $f_\lambda := f(\cdot, \cdot, \lambda)$ y $g_\lambda := g(\cdot, \cdot, \lambda)$ son, respectivamente, Lipschitz y acotada. Supongamos que para ciertos $T > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}^m$ se tiene que $\phi(0, x_0, \lambda_0) = \phi(T, x_0, \lambda_0)$, donde $\phi(\cdot, \cdot, \lambda)$ denota el flujo de $g_\lambda + f_\lambda$. Supongamos también que la función $H(x, \lambda) := \phi(0, x, \lambda) - \phi(T, x, \lambda)$ cumple que $D_x H(x_0, \lambda_0)$ tiene rango n. Demostrar que existe $r > 0$ tal que para todo $\lambda \in B(\lambda_0, r)$ existe $x(\lambda) \in \mathbb{R}^n$ tal que $t \mapsto \phi(t, x(\lambda), \lambda)$ es T-periódica.

Solución: (1.1) Por hipótesis existen $M, L \geq 0$ tales que $|g(t, x)| \leq M$ y

$$|f(t, x) - f(s, y)| \leq L\,(|s - t| + |x - y|)$$

para todos t, x, y, lo cual implica que, si $T > 0$ y $t \in [-T, T]$, entonces

$$|f(t, x) + g(t, y)| \leq |g(t, x)| + |f(t, x)| \leq M + |f(t, 0)| + L|x| \leq A(T) + B(T)|x|,$$

donde $A(T) := M + \max_{t \in [-T,T]} |f(t, 0)|$, y $B(T) := L$. Por el Teorema 3.24 se deduce que la solución maximal del PVI $\{x'(t) = f(t, x(t)) + g(t, x(t)),\ x(t_0) = x_0\}$ está definida en todo $\mathbb{R}$, para cualesquiera $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

(2.2) Si $t \mapsto \phi(t, x)$ es T-periódica, es obvio que $\phi(T, x) = \phi(0, x)$. Para probar el recíproco, observemos que $y(t) := \phi(t + T, x)$ cumple

$$\frac{d}{dt} y(t) = \frac{d}{dt} \phi(t + T, x) = f(t + T, \phi(t + T, x)) = f(t + T, y(t)) = f(t, y(t))$$

y también $y(0) = \phi(T, x) = \phi(0, x) = x$. Por la unicidad de las soluciones del PVI $\{z'(t) = f(t, z(t)),\ z(0) = x\}$, se deduce que $y(t) = \phi(t, x)$ para todo t; es decir, $\phi(t+T, x) = \phi(t, x)$ para todo t, y por tanto $t \mapsto \phi(t, x)$ es T-periódica.

Para la segunda parte del problema, aplicando $(1{,}1)$ y $(1{,}2)$ a la ecuación $x' = (f_\lambda + g_\lambda)(t, x)$, sabemos que todas sus soluciones están definidas en todo $\mathbb{R}$ y que, en las condiciones del enunciado, la curva $t \mapsto \phi(t, x_0, \lambda_0)$ es T-periódica, y en particular $H(x_0, \lambda_0) = 0$. Además, puesto que $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es de clase C^1 y $D_x H(x_0, \lambda_0)$ tiene rango n, por el teorema de la función implítita obtenemos que existen entornos U y V de x_0 y de λ_0, respectivamente, y existe una única función $\psi : V \to U$ de clase C^1 tal que $H(\psi(\lambda), \lambda) = 0$ para todo $\lambda \in V$, lo cual, aplicando otra vez $(1{,}2)$, significa que para cada $\lambda \in V$ existe un único $x(\lambda) = \psi(\lambda) \in U$ tal que la curva $t \mapsto \phi(t, x(\lambda), \lambda)$ es T-periódica. □

Problema 2. Dibujar el diagrama de fases del sistema

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = (x - 1)(x - 2)(x - 3). \end{cases}$$

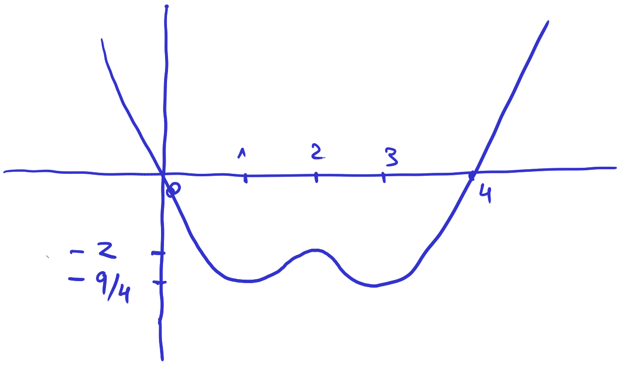
$$\begin{cases} x' = y \\ y = (x-1)(x-2)(x-3) \doteq f(x) \end{cases}$$

$(x', y') = F(x,y) \doteq (y, f(x))$; $F(x,y) = (0,0) \iff (x,y) \in \{(1,0), (2,0), (3,0)\}$

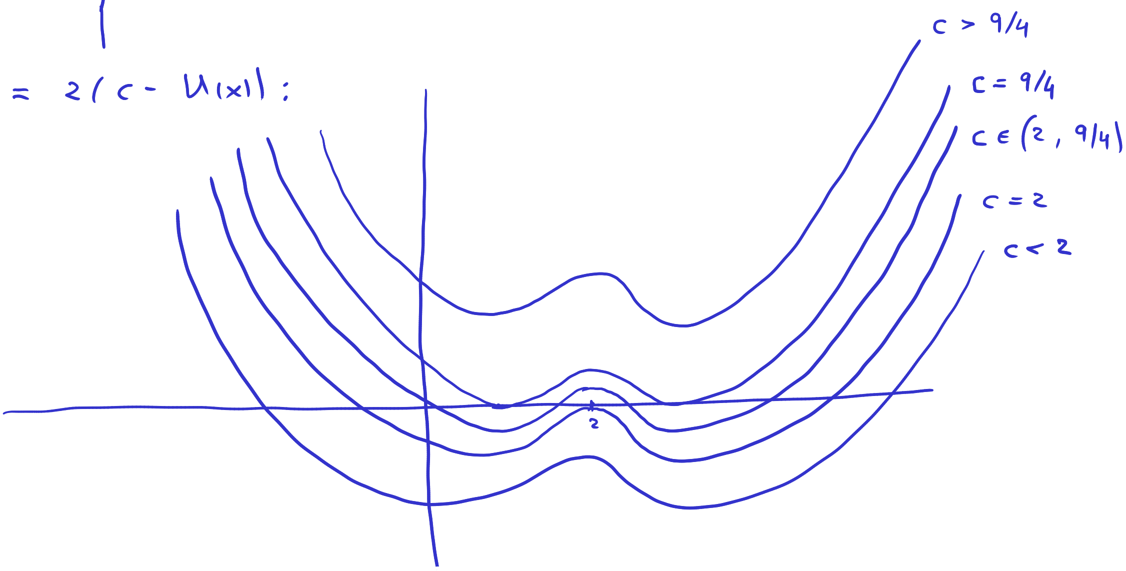
$H(x,y) \doteq -\int_0^x f + \frac{1}{2}y^2 \doteq U(x) + \frac{1}{2}y^2$ es integral 1ª de F :

$\langle \nabla H, F \rangle = \langle (-f(x), y), (y, f(x)) \rangle \equiv 0$

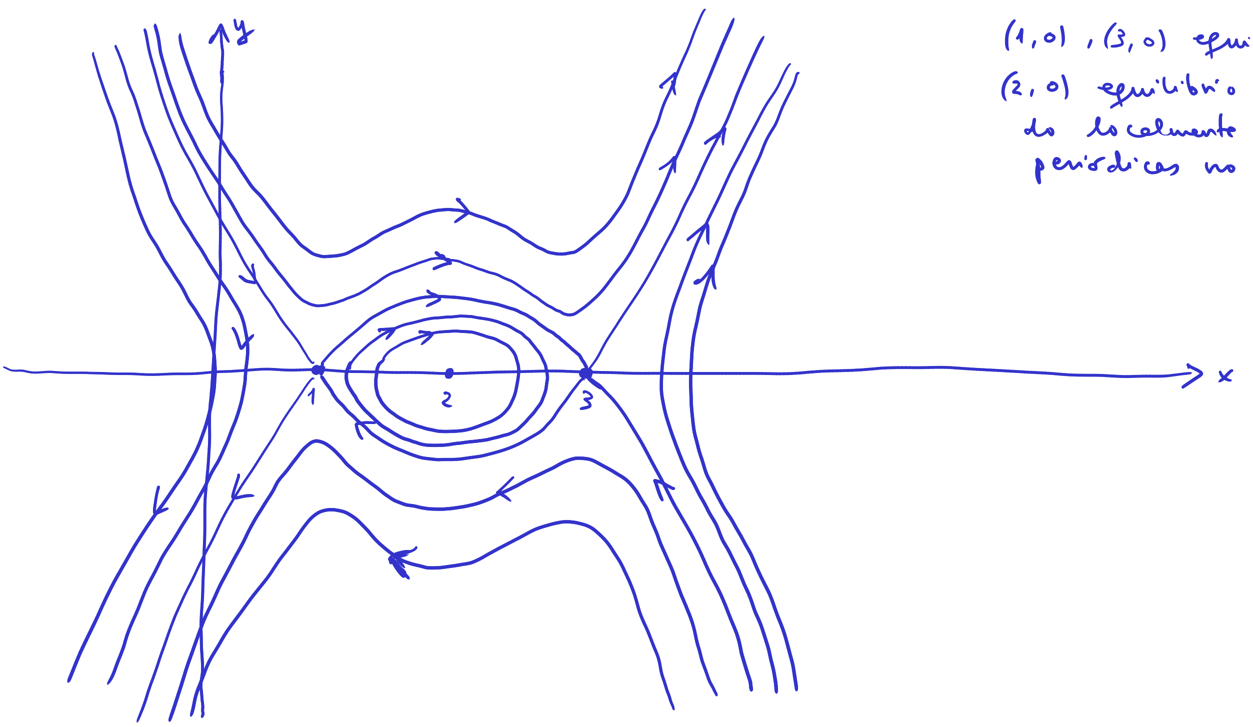
Representación gráfica de $y = -U(x)$:



Curvas $y = 2(c - U(x))$:



Curvas $y = \pm\sqrt{2(c - U(x))}$ ⇝ conjuntos de nivel de H ⇝ diagrama de fase de F :



(1,0), (3,0) equilibrios inestables

(2,0) equilibrio estable, rodeado localmente de órbitas periódicas no constantes

Problema 3. Estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio (estimando su cuenta de atracción en el caso de que sean asintóticamente estables) y la existencia de órbitas periódicas no constantes para el sistema

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -y(1 - x^4 - y^4) - x^7. \end{cases}$$

Solución: El campo $f(x,y) := (y, -y(1-x^4-y^4) - x^7)$ tiene como único punto de equilibrio el $(0,0)$. Puesto que

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4yx^3 - 7x^6 & -1 + x^4 + 5y^4 \end{pmatrix},$$

se tiene

$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =: A,$$

con $\sigma(A) = \{0, -1\}$, y el principio de linealización no es concluyente. Para decidir la estabilidad del equilibrio $(0,0)$ usaremos el teorema de Krasovslii-Lasalle. Definamos $V : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ por

$$V(x,y) = \frac{1}{8}x^8 + \frac{1}{2}y^2.$$

Se tiene que $V(x,y) = 0$ si y sólo si $(x,y) = (0,0)$, y

$$\langle \nabla V, f \rangle (x,y) = -y^2(1 - x^4 - y^4),$$

luego

$$\langle \nabla V, f \rangle \geq 0 \text{ en } \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 \geq 1\}, \tag{1}$$

y

$$\langle \nabla V, f \rangle \leq 0 \text{ en } \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 \leq 1\}, \tag{2}$$

Para cada $r > 0$, sea

$$P_r := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : V(x,y) \leq r\}.$$

Obviamente P_r es un entorno compacto de $(0,0)$. Si probamos que para $r > 0$ suficientemente pequeño el conjunto P_r es positivamente invariante y que V no es constante sobre ninguna órbita enteramente contenida en $P_r \setminus \{(0,0)\}$, entonces por el teorema de Krasovskii-LaSalle tendremos que $(0,0)$ es asintóticamente estable, y P_r estará contenido en su cuenca de atracción $B(0,0)$, de donde se deducirá además que

$$B(0,0) \supseteq P_r.$$

A continuación comprobamos que, en efecto, P_r y V tienen estas dos propiedades para r suficientemente pequeño. A tal fin, teniendo en cuenta las desigualdades (1) y (2), nos interesa encontrar $r > 0$ tal que $P_r \subseteq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 < 1\}$. Observando que, para $r \in (0, 1/16)$, se tiene

$$\frac{x^8}{8} + \frac{y^2}{2} \leq r \implies \left(x^4 \leq \sqrt{8r} \ \wedge \ y^4 \leq 4r^2 \right) \implies x^4 + y^4 \leq \sqrt{8r} + 4r^2 \leq \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{64} < 1,$$

deducimos que

$$P_r \subseteq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 < 1\} \text{ para todo } r \in \left(0, \frac{1}{16}\right). \tag{3}$$

Veamos que, **si** $r \in (0, 1/16)$**,** P_r **es positivamente invariante.** En efecto, de lo contrario existirían $(x_0, y_0) \in P_r$ tal que, para algún $t_1 > 0$, $\phi(t, x_0, y_0) \notin P_r$; es decir, considerando la función

$$g(t) := V(\phi(t, x_0, y_0)),$$

se tendría que $g(0) \leq r$ y $g(t_1) > r$. Por el teorema de Bolzano existe $t_0 \in [0, t_1)$ tal que $g(t_0) = r$. Cambiando t_0 por $\widetilde{t_0} := \sup\{t \in [t_0, t_1) : g(t) = 0\}$ si es necesario, podemos suponer que $g(t) > r$ tara todo $t \in (t_0, t_1)$. Y puesto que $\lim_{t \to t_0^+} = g(t_0) = r < 1/16$, cambiando t_1 por algún $\widetilde{t_1}$ suficientemente próximo a t_0 para que

$g(t) < 1/16$ si $t \in [t_0, \widetilde{t_1}]$, podemos suponer que $g(t) < 1/16$ para todo $t \in [t_0, t_1]$. Es decir, tenemos, para ciertos $0 < t_0 < t_1$, que $g(t_0) = r < g(t_1)$, y $g(t) < 1/16$ para todo $t \in [t_0, t_1]$, lo que significa, teniendo en cuenta las desigualdades (2) y (3) y la definición de g, que $\phi(t, x_0, y_0) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 < 1\}$ para todo $t \in [t_0, t_1]$, y por tanto

$$g'(t) = \langle \nabla V, f \rangle (\phi(t, x_0, y_0)) \leq 0 \text{ para todo } t \in [t_0, t_1]. \tag{4}$$

Pero, por el teorema del valor medio existe $t_2 \in (t_0, t_1)$ tal que

$$g'(t_2) = \frac{g(t_1) - g(t_0)}{t_1 - t_0} > 0,$$

lo cual contradice (4).

Veamos ahora que V **no es constante sobre ninguna órbita enteramente contenida en** $P_r \setminus \{(0, 0)\}$**, si** $r \in (0, 1/16)$. En efecto, si $\mathcal{O}_{(x_0,y_0)} \subset P_r \setminus \{(0, 0)\}$, denotemos $(x(t), y(t)) = \phi(t, x_0, y_0)$. Supongamos que $t \mapsto V(x(t), y(t))$ fuera constante; entonces

$$0 = \frac{d}{dt} V(x(t), y(t)) = \langle \nabla V, f \rangle (x(t), y(t)) = -y(t)^2 (1 - x(t)^4 - y(t)^4).$$

Usando (3) tenemos que $x(t)^4 + y(t)^4 < 1$, y por la igualdad anterior se deduce que $y(t) = 0$ para todo t. Luego también $x'(t) = y(t) = 0$ para todo t, y por tanto $(x(t), y(t)) = (x_0, 0)$ para todo t, es decir, $(x_0, y_0) = (x_0, 0)$ es un punto de equilibrio; pero $(0, 0)$ es el único equilibrio del sistema, luego $\mathcal{O}_{(x_0,y_0)} = \{(0, 0)\}$, absurdo.

Por consiguiente $(0, 0)$ **es un equilibrio asintóticamente estable, y su cuenca de atracción cumple que**

$$B(0, 0) \supseteq \bigcup_{r \in (0, \frac{1}{16})} P_r = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{8} x^8 + \frac{1}{2} y^2 < \frac{1}{16} \right\}.$$

Finalmente, **estudiemos la existencia de órbitas periódicas no constantes.** Para ello usaremos el teorema de Poincaré-Bendixson. Puesto que el complementario de un conjunto positivamente invariante es negativamente invariante y P_r es positivamente invariante para $r \in (0, 1/16)$, tenemos que $\mathbb{R}^2 \setminus P_r$ **es negativamente invariante si elegimos** $r \in (0, 1/16)$. Por otro lado, veremos que para $R > 0$ suficientemente grande, P_R es negativamente invariante (o, equivalentemente, $\mathbb{R}^2 \setminus P_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : V(x, y) > R\}$ es positivamente invariante). Para comprobar esto primero nos interesa encontrar $R > 0$ tal que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : V(x, y) \geq R\} \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 > 1\}$, y con este propósito observamos que

$$\frac{1}{8} x^8 + \frac{1}{2} y^2 \geq R \implies \max \left\{ \frac{1}{8} x^8, \frac{1}{2} y^2 \right\} \geq \frac{R}{2} \implies \left(x^4 \geq 2R^{1/2} \ \vee \ y^4 \geq R^2 \right) \implies x^4 + y^4 \geq \min\{2R^{1/2}, R^2\},$$

de donde se sigue que,

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : V(x, y) \geq R \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 > 1\} \text{ siempre que } R > 1. \tag{5}$$

Usando esta inclusión junto con la desigualdad (1) y razonando como antes con la función $g(t) = V(\phi(t, x_0, y_0)$ (con las desigualdades ahora cambiadas de signo), se demuestra que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : V(x, y) \geq R\}$ es positivamente invariante. Luego su complemento $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : V(x, y) < R\}$ es negativamente invariante, y como la adherencia de un conjunto negativamente invariante es negativamente invariante se sigue que **el conjunto** $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : V(x, y) \leq R\} = P_R$ **es negativamente invariante si** $R > 1$**.**

Por tanto, para $R > 1$ y $r \in (0, 1/16)$, $P_R \setminus P_r$ es negativamente invariante, así como su adherencia, $\{(x, y) : r \leq V(x, y) \leq R\}$.

Así pues, **como** $K_{R,r} := \{(x, y) : r \leq V(x, y) \leq R\}$ **es un compacto negativamente invariante y no contiene puntos de equilibrio, por el teorema de Poincaré-Bendixson se sigue que hay una órbita periódica no constante contenida en este conjunto, si** $R > 1, r \in (0, 1/16)$**.**