Otra solución del problema 4, para los que no hayan llegado a estudiar la teoría del capítulo 11:

Dada $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^2(\Omega, \mathbb{R})$ sucesión de funciones armónicas tal que $u_n \to u$ uniformemente en los compactos de Ω, consideremos un disco D tal que $\overline{D} \subset \Omega$. Sabemos que en $\overline{D}$ u_n tiene una conjugada armónica v_n, de manera que

$f_n \doteq u_n + iv_n$ es holomorfa en un entorno de $\overline{D}$.

Como $u_n \to u$ uniformemente en $\overline{D}$, existe $M>0$ tal que $M \geq |u_n(z)|$ para todo $z \in \overline{D}$, lo que implica que la sucesión de funciones (g_n) definida por $g_n = e^{f_n} = e^{u_n + iv_n}$

es holomorfa en un entorno de $\overline{D}$ y está uniformemente acotada en D; de hecho se tiene que

$$(*) \quad 0 < e^{-M} \leq |g_n(z)| = e^{u_n(x)} \leq e^{M}$$

para todo $z \in \overline{D}$ y todo $n \in \mathbb{N}$.

Por el <u>teorema de Montel</u>, existe una subsucesión (g_{n_j}) de (g_n) tal que (g_{n_j}) converge, uniformemente en cada compacto de D, a una función holomorfa $g: D \to \mathbb{C}$. Además $(*)$ implica que $|g(z)| \geq e^{-M}$ $\forall z \in D$, y en particular g no se anula en ningún punto. Por el teorema 7.9 existe $h \in \mathcal{H}(D)$ tal que $g(z) = e^{h(z)}$ $\forall z \in D$. Al ser h holomorfa se tiene que $\mathrm{Re}\, h$ es armónica. Pero

$$\mathrm{Re}\,h = \log e^{\mathrm{Re}\,h} = \log|e^h| = \log|g| =$$

$$= \log\left(\lim_{j\to\infty}|g_{n_j}|\right) = \log\left(\lim_{j\to\infty} e^{u_{n_j}}\right) =$$

$$= \lim_{j\to\infty} \log\left(e^{u_{n_j}}\right) = \lim_{j\to\infty} u_{n_j} = u,$$

lo cual prueba que u es armónica en D.

Como D es arbitrario, se concluye que u es armónica en Ω.

Problema 5: Supongamos $f, g \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{D}})$, f tiene ceros en $z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{D}$, y no tiene ningún cero en $\partial\mathbb{D}$. Como en la demostración del principio del argumento podemos escribir

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{N_j}{z - z_j} + h_j(z),$$

donde h_j es holomorfa en un entorno de z_j y N_j es el orden del cero z_j de f. Luego

$$\frac{f'(z)\,g(z)}{f(z)} = \frac{N_j\, g(z)}{z - z_j} + h_j(z)\, g(z),$$

función que tiene un polo de orden 1 en z_j con residuo $N_j\, g(z_j)$ si $g(z_j) \neq 0$, y que es holomorfa en z_j si $g(z_j) = 0$, para cada $j = 1, \ldots, m$.

Luego $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} N_j\, g(z_j) = \sum \text{Residuos}\left(\frac{f'g}{f} \text{ dentro de } \mathbb{D}\right)$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{teorema de los residuos}}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{f'g}{f}.$$

Por tanto
$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{f'(z)\,g(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{j=1}^{m} N_j\, g(z_j),}$$
donde N_j es el orden de z_j como cero de f

Problema 6: Si $f \in \mathcal{H}(D(0,1+\varepsilon))$ y $f|_{\partial D(0,1)}$ es inyectiva, entonces $f|_{D(0,1)}$ es inyectiva.

__Dem__: Dado $w_0 \in f(D(0,1))$, consideremos $\varphi(z) = f(z) - w_0$. Por el principio del argumento(*), $\#\{\text{ceros de } \varphi\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(0,1)} \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\,dz =$

$= W(\varphi\circ\gamma, 0)$, donde $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Al ser f inyectiva sobre γ, φ también lo es, y por tanto $\varphi\circ\gamma$ es una curva cerrada simple $W(\varphi\circ\gamma, 0) \in \{0,1\}$. Como $\#\{\text{ceros de } \varphi\} \geq 1$, debe ser $1 = W(\varphi\circ\gamma, 0) = \#\{\text{ceros de } \varphi\}$. Al ser $w_0 \in f(D(0,1))$ arbitrario, se deduce que f es inyectiva.

(*) Nótese que $w_0 \notin f(\partial D(0,1))$ ya que w_0 está en la región interior delimitada por la curva de Jordan $f\circ\gamma$, al ser $f(D(0,1))$ abierto (por el teorema de la aplicación abierta), conexo y acotado.