PROBLEMAS DE ANÁLISIS DE VARIABLE REAL, GRUPO D
SEGUNDO CUATRIMESTRE, HOJA 1

1. Estudiar la continuidad uniforme de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 1/x$, $x \in [1, \infty)$;
2. $f(x) = 1/x$, $x \in (0, 1)$;
3. $f(x) = x^2$, $x \in (5, 7)$;
4. $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$;
5. $f(x) = 1/x^2$, $x \in (0, \infty)$;
6. $f(x) = 1/(1 + x^2)$, $x \in \mathbb{R}$;
7. $f(x) = \sin(1/x)$, $x \in (0, 2)$;
8. $f(x) = x\sin(1/x)$ para $x \neq 0$, 0 para $x = 0$; $x \in [-3, 3]$;
9. $f(x) = x \sin x$, $x \in \mathbb{R}$;
10. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \in (0, 1)$;
11. $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [1, \infty)$.

2. Demostrar que la suma de funciones uniformemente continuas es uniformemente continua. ¿Qué ocurre con el producto?

3. Demostrar que la composición de funciones uniformemente continuas es uniformemente continua.

4. Demostrar que la suma de funciones de Lipschitz es de Lipschitz. ¿Qué ocurre con el producto?

5. Demostrar que la composición de funciones de Lipschitz es de Lipschitz.

6. Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ uniformemente continua. Probar que f está acotada en (a, b). *Indicación:* usar que si $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua entonces existe una única extensión continua $\bar{f} : [a, b] \to \mathbb{R}$ de f al intervalo cerrado $[a, b]$.

7. Se dice que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *periódica* si existe un número $T > 0$ tal que $f(x+T) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Demostrar que toda función periódica y continua es de hecho uniformemente continua y acotada en todo $\mathbb{R}$.

8. Sean $f : (a, b] \to \mathbb{R}$, $g : [b, c) \to \mathbb{R}$ funciones uniformemente continuas en $(a, b]$ y $[b, c)$ respectivamente, y supongamos que $f(b) = g(b)$. Demostrar que la función que resulta de *pegar* f y g, es decir, $h : (a, c) \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in (a, b], \\ g(x) & \text{si } x \in [b, c). \end{cases},$$

es uniformemente continua en (a, c).

9. Aplicar el ejercicio anterior para demostrar que la función $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} + \sqrt{x}$$

es uniformemente continua en $(, \infty)$.

10. Demostrar que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y existen $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x)$, y son ambos finitos, entonces f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.