PROBLEMAS DE ANÁLISIS DE VARIABLE REAL, GRUPO D
SEGUNDO CUATRIMESTRE, HOJA 2

1. Partiendo directamente de la definición, encontrar las derivadas de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 1/x$, $x \neq 0$;
2. $f(x) = x^2$;
3. $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$;
4. $f(x) = x^3$.

2. Demostrar que las funciones $f(x) = |x|$, $g(x) = \sqrt{x}$ *no* son derivables en 0.

3. Más en general, probar que la función $f(x) = |x|^\alpha$ es derivable en 0 si y sólo si $\alpha > 1$.

4. Demostrar que la derivada es un concepto *local*: si $f(x) = g(x)$ para todo x en un intervalo abierto alrededor de a, y g es derivable en a, entonces f también es derivable en a, y $f'(a) = g'(a)$.

5. Sea f la función definida por $f(x) = x^2$ cuando $x \in \mathbb{Q}$ y $f(x) = 0$ cuando $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Demostrar que f es derivable en 0 y calcular su derivada en este punto. Probar que en todos los demás puntos la función *no* es derivable.

6. Sea $f(x) = x^2 \sin(1/x^2)$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Probar que f es derivable en todo $\mathbb{R}$. ¿Es f Lipschitz en $[-1, 1]$?

7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $|f(x)| \leq x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Demostrar que f es derivable en 0 y hallar su derivada en este punto.

8. Más en general, demostrar que si f, g, h son funciones tales que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo x en un intervalo abierto que contenga a un punto a, $f(a) = h(a)$, y f y h son derivables en a, entonces g es también derivable en a (y además $g'(a) = f'(a) = h'(a)$).

9. Estudiar la derivabilidad de las siguientes funciones en sus dominios:

1. $f(x) = |x| + |x - 1|$
2. $f(x) = 2x + |x + 2|$
3. $f(x) = x|x|$
4. $f(x) = |\sin x|$

10. Demostrar que si f es derivable en a entonces $|f|$ también lo es siempre que $f(a) \neq 0$.

11. Demostrar que si f y g son derivables en a entonces $\text{máx}(f, g)$ y $\text{mín}(f, g)$ son derivables en a siempre que $f(a) \neq g(a)$.

12. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable en a, con $f(a) = 0$. Probar que $g(x) = |f(x)|$ es derivable en a si y sólo si $f'(a) = 0$.

13. Demostrar que la derivada de una función par es una función impar; y la de una impar, una par.

14. Suponiendo que f es una función derivable en $\mathbb{R}$, hallar las derivadas de las siguientes funciones:

1. $g(x) = f(x + c)$
2. $g(x) = f(cx)$.

15. Demostrar que la derivada de una función periódica es periódica.

16. Sea f derivable en a. Probar que

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}.$$

17. Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

$$\begin{array}{rrr}
f(x) = \sin(x + x^2), & f(x) = \sin x + \sin x^2, & f(x) = \sin(\cos(x)), \\
f(x) = \sin(\sin(x)), & f(x) = \sin(\frac{\cos x}{x}), & f(x) = \dfrac{\sin(\cos(x))}{x}, \\
f(x) = \sin(x + \sin x), & f(x) = \sin(\cos(\sin x)), & f(x) = f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{1 + x}, \\
f(x) = \operatorname{arc\,tg}(\cos x + \sin x^2), & f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^{10}+1}, & f(x) = \dfrac{\operatorname{arc\,tg}(x^2 + 3)}{x^2 + 5}, \\
f(x) = \sin((x+1)^2(x+2)), & f(x) = \sin^3(x^2 + \sin x), & f(x) = \sin((\sin^7 x^7 + 1)^7).
\end{array}$$

18. Hallar f' en función de g' si:

1. $f(x) = g(x + g(a))$
2. $f(x) = g(xg(a))$
3. $f(x) = g(x + g(x))$
4. $f(x) = g(x)(x - a)$
5. $f(x) = g(a)(x - a)$
6. $f(x + 3) = g(x^2)$

19. Demostrar que no existen funciones derivables f y g tales que $f(x)g(x) = x$ para todo x y $f(0) = g(0) = 0$.

20. Supongamos que $f(x) = xg(x)$ para cierta función g continua en 0. Probar que f es derivable en 0, y hallar $f'(0)$ en términos de g.

21. Supongamos que f es derivable en 0, y que $f(0) = 0$. Demostrar que existe una función g continua en 0 tal que $f(x) = xg(x)$. *Indicación:* ¿Qué ocurre si intentamos poner $g(x) = \frac{f(x)}{x}$?