PROBLEMAS DE ANÁLISIS DE VARIABLE REAL, GRUPO D
SEGUNDO CUATRIMESTRE, HOJA 3

1. Definamos $f(x) = x^2\sin(1/x)$ para $x \neq 0$, y $f(0) = 0$. Supongamos también que h y k son dos funciones tales que

$h'(x) = \sin^2(\sin(x+1))$, y $h(0) = 3$

$k'(x) = f(x+1)$, y $k(0) = 0$.

Hallar

1. $(f \circ h)'(0)$.
2. $(k \circ f)'(0)$.
3. $\alpha'(x^2)$, donde $\alpha(x) = h(x^2)$.

2. Hallar $f'(0)$ si

$$f(x) = \begin{cases} g(x)\sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

donde g es una función que cumple $g(0) = g'(0) = 0$.

3. Si $f+g$ es derivable en a, ¿son f y g necesariamente derivables en a? Si fg y f son derivables en a, ¿qué condiciones para f implican que g sea derivable en a?

4. Sea $f(x) = x^{2n}\sin(1/x)$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Demostrar que existen $f'(0), ..., f^{(n)}(0)$, y que $f^{(n)}$ no es continua en 0.

5. Sea $g(x) = x^{2n+1}\sin(1/x)$ si $x \neq 0$, $g(0) = 0$. Demostrar que existen $g'(0), ..., g^{(n)}(0)$, y que $g^{(n)}$ es continua en 0 pero no es derivable en 0.

6. Calcular las derivadas de las siguientes funciones

$$\begin{array}{ccc} f(x) = \log(\frac{x^2+5}{x^6+3}) & f(x) = \arccos x^4 + 5x + 3 & \arcsin(e^{x^2-\log x^2}) \\ f(x) = \log^3 x^2 & f(x) = \log(\log(\log(x))) & f(x) = e^{\sin(x^2+\tan(x))} \\ f(x) = \frac{\sin^3(x^7+5)}{\log x + \cos x} & f(x) = \sin(\cos(\mathrm{tg}(\cos(\sin(x^{23}+12))))) & f(x) = x^{x^2+5x+1} \end{array}$$

7. Para cada una de las siguientes funciones, encontrar los extremos locales, y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento:

$$\begin{array}{ccc} f(x) = x^2 - 3x + 5 & f(x) = x^3 - 3x - 4 & f(x) = 3x - 4x^2 \\ f(x) = x^4 + 2x^2 - 4 & f(x) = x + \frac{1}{x} & f(x) = \frac{x}{1+x^2} \\ f(x) = \sqrt{x} - 2\sqrt{x+2} & f(x) = 2x + \frac{1}{x^2} & f(x) = \sin x^2 \end{array}$$

8. Hallar los extremos absolutos y los extremos locales de las funciones f en los intervalos indicados:

1. $f(x) = |x^2 - 1|$, $x \in [-4, 4]$;
2. $f(x) = 1 - (x-1)^{2/3}$, $x \in [0, 2]$;
3. $f(x) = x|x^2 - 12|$, $x \in [-2, 3]$;

4. $f(x) = \frac{x+7}{(x-1)(x-2)(x-3)}$, $x \in [0,5]$.

9. Usar el teorema del valor medio para demostrar que las funciones sin y cos son 1-Lipschitz.

10. Usar el teorema del valor medio para demostrar que

$$\frac{x-1}{x} < \log x < x - 1$$

para todo $x > 1$.

11. Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función derivable en $(a,b) \setminus \{x_0\}$, donde $x_0 \in (a,b)$. Supongamos que existe $\lim_{x \to x_0} f'(x) = \alpha$. Demostrar que entonces f es también derivable en x_0, y que $f'(x_0) = \alpha$.

12. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x^4 + x^4 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Probar que f tiene un mínimo absoluto en 0, pero que su derivada f' toma valores estrictamente positivos y estrictamente negativos en cualquier intervalo de la forma $(0,\varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$, es decir, f no es creciente en ningún intervalo de la forma $(0,\varepsilon)$.

13. Sea $f : (a,+\infty) \to \mathbb{R}$ derivable en $(a,+\infty)$ y tal que existe $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = \alpha$. Demostrar que:

1. $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x+t)-f(x)}{t} = \alpha$ para todo $t > 0$.
2. Si existe $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ y es finito, entonces $\alpha = 0$.
3. $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha$.

14. Sean f y g derivables, y supongamos que $f(a) = g(a)$ y $f'(x) \leq g'(x)$ para todo $x \geq a$. Probar que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \geq 0$.

15. Demostrar que la suma de un número positivo y su inverso es al menos dos.

16. Demostrar que si $f'(x) \geq M$ para todo $x \in (a,b)$ entonces $f(b) \geq f(a) + M(b-a)$.

17. Supóngase que $f'(x) \geq M > 0$ para todo $x \in [0,1]$. Demostrar que existe un intervalo de longitud $1/4$ en el que se cumple que $|f| \geq M/4$.

18. Demostrar que si $f'(c) > 0$ entonces existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > f(c)$ para todo $x \in (c, c+\delta)$. Demostrar también que si se supone $f'(c) < 0$ entonces puede encontrarse $\delta > 0$ tal que $f(x) > f(c)$ para todo $x \in (c-\delta, c)$.

19. Utilizar el problema anterior para demostrar el *Teorema de Darboux*: Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es derivable y ζ es un número entre $f'(a)$ y $f'(b)$ entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \zeta$ (es decir, toda derivada f' tiene la propiedad de los valores intermedios incluso cuando f' no sea continua). *Indicación:* analizar la función $g(x) := \zeta(x-a) - f(x)$, aplicándole el problema anterior para concluir que g alcanza su máximo en un punto c del interior de (a,b).