PROBLEMAS DE ANÁLISIS DE VARIABLE REAL, GRUPO D
SEGUNDO CUATRIMESTRE, HOJA 4

1. Utilizar la regla de l'Hôpital para calcular los siguientes límites:

$$\begin{array}{cccc}
\lim_{x\to 0^+}(1+\frac{3}{x})^x, & \lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}, & \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x^2}, & \lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)}{\sin x}, \\
\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^2}, & \lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{x}, & \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}, & \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}, \\
\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{\sqrt{x}}, & \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x\log^2 x}, & \lim_{x\to 0^+} x^3\log x, & \lim_{x\to 0^+} x^{2x}, \\
\lim_{x\to\infty} x^{1/x}, & \lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}, & \lim_{x\to 0^+}(\sin x)^x, & \lim_{x\to 0^+}(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}).
\end{array}$$

2. Sea $f(0,\infty)\to\mathbb{R}$ derivable, y supongamos que $\lim_{x\to\infty} f(x)+f'(x)=L$. Probar que debe ser $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ y $\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$. *Indicación:* Escribir $f(x)=e^x f(x)/e^x$.

3. Sean $f(x)=x^2\sin(1/x)$ para $x\neq 0$, $f(0)=0$, y $g(x)=\sin x$. Probar que existen $\lim_{x\to 0} f(x)$, $\lim_{x\to 0} g(x)$ y $\lim_{x\to 0} f(x)/g(x)$ y son todos cero, pero que $\lim_{x\to 0} f'(x)/g'(x)$ no existe.

4. Demostrar que si f y g son convexas y g es creciente, entonces la composición $g\circ f$ es también convexa.

5. Representar gráficamente las siguientes funciones, hallando los intervalos en los que son convexas o cóncavas:

$$\begin{array}{lll}
f(x)=\frac{x+1}{x^2+1}, & g(x)=\frac{x}{x^2-1}, & h(x)=x+\frac{3}{x^2}, \\
\varphi(x)=\frac{x^2}{x^2-1}, & \psi(x)=\frac{x^2+1}{x}, & u(x)=x\log x.
\end{array}$$

6. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función convexa no constante. Demostrar que entonces $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ o bien $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

7. Estudiar la derivabilidad, límites en el infinito, asíntotas verticales, e intervalos de crecimiento y de decrecimiento y de concavidad y de convexidad de la función

$$f(x)=\begin{cases} \frac{7}{x^2+1} & \text{si } x\le 1, \\ \frac{1}{(1-x)(5-x)} & \text{si } 1<x<5, \\ \cos(5x-7) & \text{si } x\ge 5. \end{cases}$$

Dibujar su gráfica.

8. Demostrar que si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es derivable y acotada entonces existe una sucesión (x_n) tal que:

1. $\lim_{n\to\infty} x_n=\infty$, y
2. $\lim_{n\to\infty} f'(x_n)=0$.

9. El objeto de este problema es demostrar que una función convexa es derivable salvo quizás en una cantidad numerable de puntos. Es decir, si $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ es convexa entonces el conjunto $A:=\{x\in(a,b): f \text{ no es derivable en } x\}$ es numerable. Por tanto las funciones convexas son derivables en *casi todos* los puntos. Para probar este teorema se recomienda seguir estas etapas:

(1) Probar que para cada $x \in (a,b)$ existen los límites:

$$f'_+(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \inf_{h>0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$f'_-(x) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \sup_{h<0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

(2) Demostrar que si $x < y$ entonces $f'_-(x) \le f'_+(x) \le f'_-(y) \le f'_+(y)$. En particular, la función $x \mapsto f'_+(x)$ es creciente.
(3) Observar que f es derivable en x si y sólo si $f'_-(x) = f'_+(x)$. Por tanto f *no* es derivable en x si y sólo si $f'_-(x) < f'_+(x)$.
(4) Usando lo anterior, probar que

$$A := \{x \in (a,b) : f \text{ no es derivable en } x\} \subseteq B := \{x \in (a,b) : f'_+ \text{ es discontinua en } x\}.$$

(5) Recordar (o demostrarlo si nunca se ha visto) que una función $g : (a,b)$ que sea creciente tiene a lo sumo una cantidad numerable de discontinuidades.
(6) Concluir que B es numerable, y por tanto A también lo es.