PROBLEMAS DE ANÁLISIS DE VARIABLE REAL, GRUPO D SEGUNDO CUATRIMESTRE, HOJA 5

1. Demostrar que la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q}, \text{ fracción irreducible,} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional,} \end{cases}$$

es integrable. *Indicación:* Para cada $\varepsilon > 0$ demostrar que el conjunto $\{x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] : x = \frac{p}{q}$ fracción irreducible $, \frac{1}{q} > \frac{\varepsilon}{2}\}$ es finito, y utilizar este hecho para construir una partición P de $[0,1]$ tal que $0 = L(f,P) \leq U(f,P) \leq \varepsilon$.

2. Demostrar que el área del círculo $x^2 + y^2 \leq 1$ es π (suponiendo que ya se sabe lo que es π y las funciones trigonométricas y sus propiedades elementales).

3. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ es racional,} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

Probar que f no es integrable en $[0,1]$. *Indicación:* probar que la integral superior es $1/2$ mientras que la integral inferior es 0.

4. Calcular directamente (a partir de sumas superiores e inferiores, sin usar el teorema fundamental del cálculo) el valor de la integral $\int_0^1 x^2 dx$.

5. Demostrar que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua, $f \geq 0$ y $f(x_0) > 0$ para algún $x_0 \in [a,b]$ entonces $\int_a^b f > 0$.

6. Dar un ejemplo que muestre que el resultado del problema anterior es falso si sólo se supone que f es integrable pero no continua.

7. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y con la propiedad de que para toda función integrable $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ es $\int_a^b f = 0$. Probar que $f = 0$.

8. Sea $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ una función simétrica par (es decir $f(x) = f(-x)$ para todo x) e integrable, entonces $\int_{-a}^a f = 2\int_0^a f$. Probar también que si f es integrable y simétrica impar (es decir $f(-x) = -f(x)$ para todo x) entonces $\int_{-a}^a f = 0$.

9. Probar que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es acotada y tiene solamente un número finito de discontinuidades en $[a,b]$ entonces f es integrable en $[a,b]$.

10. Dar un ejemplo de una función f que no es integrable en $[0,1]$ pero su valor absoluto $|f|$ sí es integrable en $[0,1]$

11. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, y sea $g : [c, d] \to [a, b]$ derivable. Consideremos $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$G(x) = \int_a^{g(x)} f(t)dt.$$

Probar que

$$G'(x) = f(g(x))g'(x)$$

para todo $x \in [a, b]$.

12. Hallar las derivadas de las sigientes funciones:

$$F(x) = \int_{x^2}^{x} \sqrt{1+t^2}dt \qquad G(x) = \int_a^{\int_1^x \sin^3 t dt} \frac{1}{1+\sin^6 t + t^2} dt$$
$$\varphi(x) = \int_a^{x^3} \cos^3(t)dt \qquad \psi(x) = \int_{15}^{x} \Big(\int_8^y \frac{1}{1+t^2+\sin^2 t} dt \Big) dy.$$

13. Hallar las áreas de las regiones limitadas por:

1. Las gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = \frac{x^2}{2} + 2$.
2. Las gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = -x^2$ y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.
3. Las gráficas de $f(x) = \sqrt{x}$, el eje horizontal y la recta vertical por $(2, 0)$.

14. Hallar $\int_a^b \big(\int_c^d f(x)g(y)dy \big) dx$ en términos de $\int_a^b f$ y $\int_c^d g$.

15. Demostrar que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe una función $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua tal que $g \leq f$ y $\int_a^b f - \int_a^b g \leq \varepsilon$. *Indicación:* obtener primero una función escalonada, es decir, constante a trozos, con esta propiedad y obtener g a partir de ella. Hacer un dibujo.

16. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable, demostrar que existe un $x \in [a, b]$ tal que $\int_a^x f = \int_x^b f$.

17. Hallar funciones g tales que

1. $\int_0^x tg(t)dt = x + x^2$.
2. $\int_0^{x^2} tg(t)dt = x + x^2$.

18. Hallar una función continua f que satisfaga

$$\int_0^x f = f(x)^2 + C.$$

19. Hallar $F'(x)$ si $F(x) = \int_0^x xf(t)dt$. *Indicación:* la solución *no* es $xf(x)$; hay que manipular la integral antes de tratar de hallar F'.

20. Demostrar que si h es continua y f y g son derivables, y

$$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t)dt$$

entonces $F'(x) = h(g(x))g'(x) - h(f(x))f'(x)$.