PROBLEMAS DE ANÁLISIS DE VARIABLE REAL, GRUPO D
SEGUNDO CUATRIMESTRE, HOJA 7

1. Usando el teorema de Taylor, demostrar que $1 - \frac{1}{2}x^2 \leq \cos x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

2. Para $f(x) = \operatorname{sen} x$, demostrar que el resto de Taylor $R_n(x) = f(x) - P_{f,n,a}(x)$ tiende a 0 cuando $n \to \infty$, para todos x_0, x fijos.

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Probar que $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Concluir que el resto de Taylor R_n para $x_0 = 0$ *no* converge a 0 cuando $n \to +\infty$.

4. Calcular $e = \exp(1)$ con una exactitud de 7 cifras decimales.

5. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función n veces derivable con derivadas continuas hasta el orden n, con $n \geq 2$. Supongamos que $f'(x_0) = ... = f^{(n-19}(x_0) = 0$, y que $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Utilizar el teorema de Taylor para demostrar que:

1. Si n es par y $f^{(n)}(x_0) > 0$ entonces f tiene un mímimo local en x_0.
2. Si n es par y $f^{(n)}(x_0) < 0$ entonces f tiene un máximo local en x_0.
3. Si n es impar entonces f no tiene ni un mímimo ni un máximo local en x_0.

6. Usar el problema anterior para determinar si el punto $x = 0$ es un máximo o mínimo local de cada una de las funciones siguientes:

1. $f(x) = x^3 + 2$
2. $f(x) = \operatorname{sen} x - x$
3. $f(x) = \operatorname{sen} x + \frac{1}{6}x^3$
4. $f(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2$.

7. Probar que la sucesión de funciones $f_n(x) = n^2x^2e^{-nx}$ converge uniformemente en el intervalo $[a, +\infty)$, para cualquier $a > 0$, pero que no converge uniformemente en $[0, +\infty)$.

8. Sea $f_n(x) = \cos^{2n}(\pi x)$. Estudiar la convergencia puntual y la convergencia uniforme de la sucesión de funciones (f_n).

9. Sea $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$. Estudiar la convergencia puntual y la convergencia uniforme de la sucesión de funciones (f_n) en el intervalo $[0, 2]$.

10. Supongamos que $f_n \to f$ uniformemente en I, y que $x_n \to X_0 \in I$. Probar que entonces $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x_0)$.

11. Sea $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ para $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$. Probar que f_n converge uniformemente en $[0,1]$ a una función f que es derivable en $[0,1]$, que $f_n'(x)$ converge puntualmente a una función $g(x)$, pero que $f'(1) \neq g(1)$.

12. Si $a > 0$, probar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^\pi \frac{\operatorname{sen} nx}{nx} dx = 0.$$

¿Qué sucede cuando $a = 0$?

13. Sea (f_n) la sucesión de funciones $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f_n(x) = \frac{nx^3}{1 + n^8 x^4}.$$

Demostrar la serie de funciones $\sum_{n=1}^\infty f_n$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$ a una cierta función continua f. Después calcular $\int_{-1}^1 f$ (obtener una expresión de esta integral como una serie de números reales).

14. Calcular los siguientes límites:

1. $\lim_n \int_0^{\pi/4} x^n \sin \frac{1}{x}\, dx$
2. $\lim_n \int_0^1 x^2 e^{-nx^2}\, dx$
3. $\lim_n \int_{1/n}^1 x^2 e^{-nx^2}\, dx.$

15. Determinar el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

1. $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^n} x^n$
2. $\sum_{n=1}^\infty \frac{n^\alpha}{n!} x^n$
3. $\sum_{n=1}^\infty \frac{n^n}{n!} x^n$
4. $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{\log n} x^n$

16. Definamos $a_n = 1$ si n es el cuadrado de algún número entero, y $a_n = 0$ en caso contrario. Hallar el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=1}^\infty a_n x^n$.

17. Sea $f : (-r, r) \to \mathbb{R}$ infinitamente derivable y tal que existe $B \geq 0$ de modo que $|f^{(n)}(x)| \leq B$ para todo $x \in (-r, r)$ y para todo $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que la expansión de Taylor de f en 0,

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

converge a $f(x)$ para $|x| < r$.

18. Escribir la integral

$$\int_0^x e^{-t^2} dt$$

como una serie de potencias