CÁLCULO DIFERENCIAL. EXAMEN FINAL DE FEBRERO, 09/02/2010.

TEST Y PREGUNTA DE TEORÍA

I) Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

1. Existen espacios métricos completos que no son compactos.

2. El conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ x = ny,\ n \in \mathbb{N}\}$ es compacto.

3. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua y A es acotado entonces $f(A)$ es acotado.

4. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable y $\partial f_j/\partial x_i$ está acotada en $\mathbb{R}^n$ para todo $i \in \{1, ..., n\}, j \in \{1, ..., m\}$ entonces f es Lipschitziana.

5. Existe $f : \mathbb{R}^n \to \{21, 5\} \cup \{8, 5\} \cup \{17, 9, 12\} \cup \{12, 1, 16\} \cup \{2, 1, 3\} \cup \{1, 12\} \cup \{1, 16\}$ continua y sobreyectiva.

6. Si $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ satisfacen que $|\partial f/\partial x| \leq 1/8 \geq |\partial f/\partial y|$ y $|\partial g/\partial x| \leq 1/8 \geq |\partial g/\partial y|$, entonces existe un único $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tal que $(f(x_0, y_0), g(x_0, y_0)) = (x_0, y_0)$.

7. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tiene derivadas parciales de segundo orden en $\mathbb{R}^n$ y éstas son continuas en un punto $a \in \mathbb{R}^n$ entonces la aplicación $\frac{\partial f}{\partial x_1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable en a.

8. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es de clase C^1 e inyectiva y satisface $\det(Df(x)) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ entonces $f(\mathbb{R}^2)$ es abierto y f posee una inversa $f^{-1} : f(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^2$ de clase C^1.

9. Si $f, g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ son de clase C^1 y los vectores $\nabla f(x), \nabla g(x)$ son linealmente independientes para todo $x \in \mathbb{R}^4$ con $f(x) = g(x) = 1$ entonces

$$M = \{x \in \mathbb{R}^4 : f(x) = g(x) = 1\}$$

es una variedad diferenciable de dimensión 2 en $\mathbb{R}^4$.

10. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es de clase C^2, $f(0,0) = 0$ y $\nabla f(0,0) = (0,0)$, entonces $\text{lím}_{x\to 0} \text{lím}_{y\to 0} f(x,y)/xy = \text{lím}_{y\to 0} \text{lím}_{x\to 0} f(x,y)/xy$.

Este test supone 2,5 puntos de la nota del examen. Cada pregunta acertada suma 0,25 puntos, y cada pregunta fallada resta 0,15. Las preguntas no respondidas ni suman ni restan puntos.

II) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que $\nabla f(a) = 0$ y $D^2 f(a)$ es definida positiva. Probar que entonces f tiene un mínimo local en a.

Esta pregunta supone otros 2,5 puntos de la nota del examen.