CÁLCULO DIFERENCIAL. HOJA DE PROBLEMAS 1.

PRODUCTOS ESCALARES, NORMAS, DISTANCIAS.

1. Si $\|\cdot\|$ es una norma en un espacio vectorial X, demostrar que

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x-y\|$$

para todo $x, y \in X$. ¿Cuál es el análogo de esta propiedad para distancias?

2. Comprobar que las siguientes expresiones definen normas en $\mathbb{R}^2$:

a) $\|(x,y)\|_a = \frac{1}{3}(|x|+|y|) + \frac{2}{3}(x^2+y^2)^{1/2}$;
b) $\|(x,y)\|_b = (x^2+xy+y^2)^{1/2}$

Indicación: para el segundo caso, puede ser aconsejable completar cuadrados dentro de la raiz y observar que $\|(x,y)\|_b = \|T(x,y)\|_2$, donde T es un isomorfismo lineal de $\mathbb{R}^2$.

3. Si T es un isomorfismo lineal de $\mathbb{R}^n$ y $\|\cdot\|$ es una norma cualquiera de $\mathbb{R}^n$, demostrar que la expresión $\rho(x) = \|T(x)\|$ define una norma en $\mathbb{R}^n$.

4. Si $\|\cdot\|$ es la norma euclidea de $\mathbb{R}^n$, demostrar que:

a) (Ley del paralelogramo) $2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$;
b) $\|x+y\|\|x-y\| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2$;
c) (Identidad de polarización) $4\langle x, y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$.

5. Si $\|\cdot\|$ es una norma en $\mathbb{R}^n$ que cumple la ley del paralelogramo, probar que proviene de un producto escalar. *Indicación:* definir el candidato a producto escalar a partir de la identidad de polarización.

6. En la desigualdad de Cauchy-Schwarz, demostrar que la igualdad se tiene si y sólo si los vectores x e y son proporcionales.

7. Si $A = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+y-z=0, y+z-w=0\}$, hallar $A^\perp$.

8. Probar que si $v_1, ..., v_n$ son vectores no nulos y ortogonales dos a dos (es decir, $v_i \perp v_j$ si $i \neq j$), entonces los vectores $v_1, ..., v_n$ son linealmente independientes.

9. En el espacio vectorial $C[0,1]$ de todas las funciones continuas en el intervalo $[0,1]$, definamos

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Comprobar que esta fórmula define un producto escalar en $C[0,1]$. Exhibir dos funciones no nulas y ortogonales entre sí. Después construir una sucesión de funciones no nulas (f_n) en $C[0,1]$ tales que $f_n \perp f_m$ si $n \neq m$. Concluir que el espacio vectorial $C[0,1]$ tiene dimensión infinita.

10. Identificando $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ con $\mathbb{R}^{n+m}$ y usando la norma $\|\cdot\|_\infty$ en estos espacios, pruébese que para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^{n+m}$ y cada $r > 0$ se tiene que

$$B_\infty(x,r) \times B_\infty(y,r) = B_\infty\big((x,y),r\big).$$

11. Dibujar una función continua f cualquiera en el intervalo $[0,1]$. Después, dibujar la bola cerrada de centro f y radio $r > 0$ en el espacio normado $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$.

12. Sea $\|\cdot\|_2$ la norma definida a través del producto escalar del problema 9 en $C[0,1]$, esto es,

$$\|f\|_2 = \Big(\int_0^1 f(t)^2 dt\Big)^{1/2},$$

y consideremos también la norma ya definida anteriormente en este espacio,

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| : t \in [0,1]\}.$$

Probar que las normas $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$ *no* son equivalentes en $C[0,1]$ (y de paso nótese que esto proporciona otra demostración de que $C[0,1]$ tiene dimensión infinita. Indicación: construir una sucesión de funciones $(f_n) \subset C[0,1]$ que esté acotada para la norma $\|\cdot\|_2$ pero no para $\|\cdot\|_\infty$.

13. Sea E un espacio vectorial cualquiera de dimensión finita. Construir una norma en E.

14. Estudiar si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ están o no acotados:

$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = x^2 - y^2\}$;
$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin\frac{1}{x}, x \neq 0\}$;
$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 = 1, z + x + y = 0\}$.

15. Demostrar que la función distancia de un espacio métrico X satisface que

$$|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$$

para todo $x,y,z \in X$. Más en general, si A es un subconjunto no vacío de un espacio métrico X, demostrar que

$$|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$$

para todo $x,y \in X$. Se dice entonces que la función $x \in X \mapsto d(x,A)$ es 1-Lipschitz.

16. Probar que la unión finita de subconjuntos acotados de X es acotada en X. En particular todo conjunto finito es acotado.

17. Se dice que dos espacios métricos (X_1,d_1) y (X_2,d_2) son *isométricos* si existe una biyección $f : X_1 \to X_2$ tal que $d(f(x),f(y)) = d(x,y)$ para todo $x,y \in X_1$. Si f no es biyectiva se habla de una inyección isométrica de X_1 en X_2. Dos espacios isométricos son indistinguibles desde el punto de vista métrico, y por tanto pueden identificarse cuando ello resulta conveniente, en problemas de naturaleza métrica, claro está.

Probar que $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ y $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ son isométricos. Demostrar también que $\mathbb{R}^n \ni x \to (x,0) \in \mathbb{R}^{n+m}$ es una inyección isométrica cuando se consideran las distancias generadas por las normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ o $\|\cdot\|_\infty$.

18. Demostrar que dos normas en un espacio vectorial son equivalentes si y sólo si las distancias que definen son uniformemente equivalentes.

19. * Sea $\|\cdot\|$ una norma en un espacio vectorial X no nulo. Caracteriza los polinomios reales $p = p(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que la función $P(x) := p(\|x\|)$, $x \in X$ define una norma en X.

20. * Sea $\mathcal{P}([0,1])$ el espacio de polinomios reales $p : [0,1] \to \mathbb{R}$. Como subespacio de $C[0,1]$, se puede equipar $\mathcal{P}([0,1])$ con la norma del supremo

$$\|p\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |p(t)|.$$

Asímismo, definimos otra norma en términos de los coeficientes de los polinomios:

$$\|p\|_a := \sum_{k\geq 0} |a_k| \quad \text{si} \quad p(t) = \sum_{k\geq 0} a_k t^k$$

El objetivo del ejercicio es **probar que estas normas no son equivalentes**. Para ello, vamos a considerar la sucesión de polinomios

$$Q_0(x) = 1\,, \quad Q_1(x) = x\,, \quad Q_{n+1}(x) = 2\,x\,Q_n(x) - Q_{n-1}(x) \quad (n \geq 1).$$

(i) Demostrar que $Q_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ para todo $\theta \in [0, 2\pi]$ y $n \in \mathbb{N}$ (Indicación: recuerda las identidades trigonométricas).

(ii) Deducir del apartado anterior que $\|Q_n\|_\infty = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$

(iii) Probar que $\|Q_n\|_a \geq 2^{n-1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

(iv) Concluye que las normas $\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|_a$ no son equivalentes.