CÁLCULO DIFERENCIAL. HOJA DE PROBLEMAS 10.

TEOREMAS DE LA FUNCIÓN INVERSA Y DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA.

1. a) Estúdiese si la función $f(x,y) = \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \frac{xy}{x^2+y^2}\right)$ tiene inversa en un entorno de (0,1).

b) Pruébese que la función $f(x,y,z) = (z\cos(xy),\, z\sin(xy),\, x+z)$ admite una inversa local g alrededor del punto $(x,y,z) = (1,0,1)$; calcúlese $Dg(f(1,0,1))$.

c) Pruébese que la función $f(x,y) = (e^x\cos y,\, e^x \sin y)$ es localmente invertible en un entorno de cada punto, pero no lo es globalmente.

2. Sea $\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta,\, r\sin\theta)$. Pruébese que φ es localmente inversible en cada punto (r,θ) con $r > 0$, de clase C^∞. Calcúlese una inversa de φ en el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\, x > 0,\, y > 0\}$. Calcúlense las derivadas parciales $\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial y}$.

3. Resolver las ecuaciones

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\phi \\ y &= r\sin\theta\sin\phi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}$$

para r,θ,ϕ en términos de x,y,z. ¿Dónde es diferenciable la función inversa? Comparar con las conclusiones derivadas de aplicar el teorema de la función inversa. A este cambio de coordenadas se le llama coordenadas esféricas.

4. Sea $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $g(x,y,z) = (e^{2y}+e^{2z}, e^{2x}-e^{2z}, x-y)$

1. Pruébese que g es diferenciable en todo punto de $\mathbb{R}^3$ y que admite inversa diferenciable en un entorno de cada punto.
2. ¿Admite g inversa global?

5. Considérese el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 3x + y - z + u^2 &= 0 \\ x - y + 2z + u &= 0 \\ 2x + 2y - 3z + 2u &= 0 \end{aligned}$$

Determínese si el sistema puede resolverse en las siguientes condiciones:

1. para (x,y,z) en función de u;
2. para (x,y,u) en función de z;
3. para (x,z,u) en función de y.

6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y,z,u,v) = (u+v+x^2-y^2+z^2, u^2+v^2+u-2xyz)$. Pruébese que f define, en un entorno de $(0,0,0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, una función implícita diferenciable

$$(u,v) = (h_1(x,y,z), h_2(x,y,z)),$$

y calcúlese $Dh(0,0,0)$.

7. Supóngase que $F(x,y,z) = 0$ define implícitamente cada variable como función de las otras dos. Probar que

$$\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial z} = -1.$$

El término $\partial y/\partial x$ significa $\partial g/\partial x$, donde $y = g(x,z)$, y análogamente para los demás.

8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Probar que f es diferenciable en todo punto, con $f'(0) \neq 0$, pero f no es inyectiva en ningún entorno de 0. ¿Contradice esto el teorema de la función inversa?

9. Supongamos que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable e invertible en un entorno de un punto a, y que $\det Df(a) = 0$. Probar que f^{-1} no es diferenciable en $f(a)$.

10. Supóngase que F satisface las hipótesis del teorema de la función implícita, salvo que F no necesariamente es de clase C^1 en las dos variables x e y, sino solamente en y, es decir, que todas las derivadas parciales $\partial F_i/\partial y_j$ son continuas. Demostrar directamente (sin usar el teorema de la función inversa) que existen entornos U de a y V de b y una única función continua $\varphi : U \to V$ tal que $F(x, \varphi(x)) = 0$. Indicación: Puede suponerse $(a,b) = (0,0)$. Sea $L = \partial F/\partial y(0,0)$. Probar que existen $r, s > 0$ tal que para todo $x \in B(x,s)$ la aplicación $G_x(y) = y - L^{-1} \circ F(x,y)$ tiene un único punto fijo, que denotaremos y_x, en $B(0,r)$. Escribir $\varphi(x) = y_x$, y probar que $F(x,\varphi(x)) = 0$, y que φ es continua.

11. Sea $f : R^2 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación de clase C^1, y supongamos que

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}, \ \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}$$

(a estas igualdades se les llama *ecuaciones de Cauchy-Riemann*, y surgen naturalmente en la teoría de variable compleja. Probar que $\det Df(x,y) \neq 0$ si y sólo si $Df(x,y) = 0$, y por tanto que f es localmente invertible en un entorno de (x,y) si y sólo si $Df(x,y) \neq 0$. Probar también que en este caso la función inversa f^{-1} también satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

12. Calcúlese el desarrollo de Taylor hasta el orden 2 de la función $z = f(x,y)$, definida implícitamente por $2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z + 8 = 0$ en un entorno de $(2,0,1)$.

13. Calcúlense las constantes a y b sabiendo que

1. El sistema
$$\begin{cases} F(x,y,z) = x + a\sin y - z^3 = 0 \\ G(x,y,z) = x - a^2y^2 + e^{bz} = 1 \end{cases}$$
define implícitamente las funciones de clase infinito $y = f(x)$, $z = g(x)$, en un entorno de $(0,0,0)$.
2. El polinomio de Taylor de segundo grado de g en 0 vale 0 para $x = b^2$.
3. La función $h = f - g$ tiene un máximo relativo en $x = 0$.

14. Sea $a > 0$, definimos $f : B(0,a) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ como $f(x) = \frac{ax}{\sqrt{a^2 - x_1^2 - \cdots - x_n^2}}$. Pruébese que es biyectiva, diferenciable y con inversa diferenciable (difeomorfismo).

15. Demuéstrese que las ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + uv & = 0 \\ xy + u^2 - v^2 & = 0 \end{cases}$$

definen funciones implícitas $u(x,y)$, $v(x,y)$ en un entorno del punto $(x,y,u,v) = (0,1,1,1)$. Considérese ahora la función: $\varphi(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$, definida en un entorno de $(0,1)$.

1. Calcúlese $D\varphi(0,1)$. ¿Admite φ inversa local alrededor de $(0,1)$.
2. Calcúlese la derivada direccional de φ^{-1} en $(1,1)$, según la dirección $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.

3. Si $\gamma(t) = (t, t^2)$, ¿cuánto vale $(\varphi^{-1} \circ \gamma)'(1)$?

16. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la función $f(x,y) = (x^2 + y^2, 2xy)$.

1. Hállese la imagen mediante la función f de las circunferencias $x^2 + y^2 = R^2$ y las hipérbolas $xy = c$.

   En cada uno de los casos anteriores hágase un dibujo indicando cómo se mueven los puntos de la imagen cuando los puntos del original describen las figuras indicadas.
2. Hállese la imagen mediante f del disco $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$.
3. Hállese la imagen de f.
4. Encuéntrese un subconjunto conexo A de $\mathbb{R}^2$ tal que $f(A) = f(\mathbb{R}^2)$ y $f|_A$ sea inyectiva.
5. Hállese la inversa de la función $f|_A$ y estúdiese si es diferenciable.
6. Calcúlese la matriz jacobiana de f en un punto arbitrario (x_0, y_0).
7. Si $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ es tal que el jacobiano de f en ese punto es no nulo, hállese la matriz jacobiana de una inversa local de f en $(x_0^2 + y_0^2, 2x_0y_0)$.
8. Demuéstrese que el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f$ tiene jacobiano no nulo en $(x,y)\}$ se puede poner como la unión de cuatro conjuntos, Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, abiertos conexos.
9. Muéstrese que para $i = 1, 2, 3, 4$ la función $f|_{\overline{\Delta_i}}$ es inyectiva.
10. Calcúlense las inversas de las funciones del apartado anterior.
11. Sea $i_0 \in \{1, 2, 3, 4\}$ tal que $\Delta_{i_0} \cap A \neq \emptyset$. Hállese $f(\Delta_{i_0})$ y compruébese que es abierto.
12. Demuéstrese que la inversa de $f|_{\overline{\Delta_{i_0}}}$ es de clase C^∞ en $f(\Delta_{i_0})$ y hállese su matriz jacobiana.
13. Compárese el apartado anterior con los apartados d), e) y g).
14. ¿Es posible definir una inversa local diferenciable de f en un entorno del punto (2,2)?

17. Sea $f(x,y) = x^3 + x + y$.

1. Represéntense las curvas de nivel de la función f para valores próximos a 0.
2. Sea $G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la función $G(x,y) = (x, f(x,y))$. Demuéstrese que G es inyectiva.
3. Represéntense las imagenes mediante G de las curvas del apartado a).
4. Calcúlese el jacobiano de G.
5. Demuéstrese que $D = G(\mathbb{R}^2)$ es abierto y que la inversa de G, que denotaremos H, es de clase C^∞ en D.
6. Compruébese que $f(H(x,y)) = y$, $\forall (x,y) \in D$.
7. Hágase un estudio análogo para la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ considerándola definida en $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$.
8. ¿Qué ocurriría en g) si añadiésemos (0,0) al dominio de f? Explíquese la respuesta.
9. Generalícense los resultados obtenidos.

18. Sea $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xz - 4$$

y sea $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ F(x,y,z) = 0\}$.

1. Represéntese V gráficamente.
2. Demuéstrese que $\{y \in \mathbb{R} : \ F(x,y,z) = 0\} = [-2, 2]$.
3. Demuéstrese que para cada punto $(x,y) \in \mathbb{R} \times [-2,2]$ existe un $z \in \mathbb{R}$ tal que $F(x,y,z) = 0$.
4. ¿En qué casos el z obtenido en el apartado anterior es único?
5. Encuéntrese una función $f : \mathbb{R} \times [-2,2] \longrightarrow \mathbb{R}$, de clase C^∞ en $\mathbb{R} \times (-2,2)$, tal que para cada $(x,y) \in \mathbb{R} \times [-2,2]$ se verifique que $F(x,y,f(x,y)) = 0$.
6. ¿Es única la función del apartado anterior?
7. Hállese la matriz jacobiana de F.

8. Sea $(x_0, y_0, z_0) \in V$ tal que $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Demuéstrese que existe una única función φ de clase C^∞ en un entorno U de (x_0, y_0), tal que $\varphi(x_0, y_0) = z_0$ y $F(x, y, \varphi(x, y)) = 0\ \forall (x, y) \in U$. Compárese con el apartado f).
9. ¿Es posible encontrar una función φ de clase C^∞ en un entorno U de (0,2) tal que $\varphi(0, 2) = 0$ y $F(x, y, \varphi(x, y)) = 0\ \forall (x, y) \in U$?
10. Resuélvanse las cuestiones análogas cambiando x por z e y por z en el apartado anterior.

19. Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 - yu &= 0 \\ xy + uv &= 0 \end{cases}$$

1. Usando el teorema de la función implícita, indíquese en qué condidiones se puede resolver el sistema en u y v.
2. Resuélvase el sistema directamente y compárese con el apartado a).

20. Demuéstrese que las ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - u^3 + v^2 + 4 &= 0 \\ 2xy + y^2 - 2u^2 + 3v^4 + 8 &= 0 \end{cases}$$

determinan funciones de clase C^∞, $u(x, y)$ y $v(x, y)$, en un entorno de (2,-1), tales que $u(2, -1) = 2$ y $v(2, -1) = 1$. Calcular $\frac{\partial u}{\partial x}$ en (2,-1).

21. El punto (1,-1,1) pertenece a las superficies $x^3(y^3 + z^3) = 0$ y $(x - y)^3 - z^2 = 7$. Demuéstrese que, en un entorno de este punto, la intersección de las dos superficies determina una curva de clase C^∞ de ecuaciones $y = f(x)$, $z = g(x)$. Calcúlese la tangente a dicha curva en $x = 1$.