# CÁLCULO DIFERENCIAL. HOJA DE PROBLEMAS 11.

VARIEDADES DIFERENCIABLES EN $\mathbb{R}^N$. EXTREMOS CONDICIONADOS.

**1.** Demuéstrese que las ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + xyz^2 - 11 = 0 \\ x^3 + y^3 + z^3 - xyz - 30 = 0 \end{cases}$$

definen una variedad de clase $C^\infty$ y dimensión 1 en $\mathbb{R}^3$, en un entorno del punto $(3,2,1)$. Hállense las ecuaciones de la tangente y del plano normal a la variedad en dicho punto.

**2.** Demuéstrese que las ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + y + 2z + u - v - 1 = 0 \\ xy + z - u + 2v - 1 = 0 \\ yz + xz + u^2 + v = 0 \end{cases}$$

definen una variedad en un entorno de (1,1,1,1,-1). Determínese su dimensión y calcúlese el espacio tangente en (1,1,1,1,-1).

**3.** Calcúlense las tangentes a las curvas siguientes en los puntos indicados:

$$\varphi(t) = (1+t, 1+2t), \qquad \varphi(t) = (1+t^3, 1+2t^3), \text{ en } t = 0, t = 1$$

$$\begin{cases} xyz = 1 \\ y = z \end{cases} \text{ en } (1,1,1) \qquad \begin{cases} xy + z^2 = 1 \\ x + y = 0 \end{cases} \text{ en } (0,0,1)$$

**4.** Sea $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 + 2xy - 16 = 0\}$.

1. Demuéstrese que $M$ es una variedad.
2. Sea $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Calcúlense los posibles extremos de $f$ en $M$.
3. ¿Es (-2,-2,0) un punto extremo de $f$ sobre $M$?
4. ¿Tiene $f$ extremos absolutos sobre $M$?

**5.** Indíquese en qué puntos las ecuaciones dadas definen variedades diferenciables de dimensión 2 en $\mathbb{R}^3$ y calcúlense el plano tangente y la normal en los puntos que se indican:

(1) $z^2 = x^2 + y^2$ en $(1,0,1)$ (2) $z^3 = x^2 + y^2$ en $(0,-1,1)$

(3) $z = x^2 + y^2$ en $(1,-2,5)$ (4) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{8} = 0$ en $(4,3,4)$

**6.** Hállense en la superficie $x^2 + y^2 - z^2 - 2x = 0$ los puntos en que los planos tangentes a ella sean paralelos a los planos coordenados.

**7.** Encontrar la distancia del punto $(-1,1)$ a la curva $xy = 1$, $x > 0$.

**8.** Sea $b \in \mathbb{R}^n$, sea $M$ una variedad de $\mathbb{R}^n$, y sea $a$ un punto de $M$ de distancia mínima a $b$. Probar que $b - a$ es normal a $M$ en $a$. ¿Existe siempre tal punto $a \in M$?

**9.** Probar que el *toro* obtenido al rotar la circunferencia $x^2 + (y-2)^2 = 1$ alrededor del eje $x$ cumple la ecuación

$$F(x, y, z) := (x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 - 16(y^2 + z^2) = 0.$$

Probar que 0 es un valor regular de $F$, y por tanto el toro es una variedad bidimensional de $\mathbb{R}^3$.

**10.** Hallar el máximo y el mínimo de la función $f(x, y, z) = z$ sobre el toro del problema anterior.

**11.** Hállense los planos tangentes a la superficie $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$, paralelos al plano $x + 4y + 6z = 0$.

**12.** Estúdiense los extremos de las siguientes funciones con las condiciones que se indican:

1. $f(x, y, z) = x - y + z;\ x^2 + y^2 + z^2 = 2$
2. $f(x, y) = x;\ x^2 + 2y^2 = 3$
3. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2;\ x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1$
4. $f(x, y) = 3x + 2y;\ 2x^2 + 3y^2 = 3$
5. $f(x, y, z) = x + y + z;\ x^2 - y^2 = 1; 2x + z = 1$
6. $f(x, y) = x - y;\ x^2 - y^2 = 2.$

**13.** Calcúlese la distancia de los siguientes conjuntos al origen de coordenadas: $A = \{(x, y, z);\ x^2+y^2 = 1;\ x + y + z = 1\}$; $B = \{(x, y, z);\ x^2 + y^2 - z^2 = 1;\ x + y + z = 1\}$.

**14.** Calcúlense los extremos de la función $f(x, y) = (x - y)^n$ , con la condición $x^2 + y^2 = 1$ $(n \geq 1)$.

**15.** Sea $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z$.

1. Pruébese que el conjunto $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4;\ z \leq 1\}$ es compacto.
2. Calcúlense los puntos de máximo y mínimo absoluto de $f$ sobre $M$.

**16.** a) Estúdiense los extremos de la función $f(x, y, z) = \log x + \log y + 3 \log z$ sobre la porción de esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5r^2$ en la que $x > 0,\ y > 0,\ z > 0$.

b) Utilícese el resultado obtenido en a) para demostrar que, si $a,\ b$ y $c$ son números reales positivos, se cumple:

$$(abc)^3 \leq 27\left(\frac{a + b + c}{5}\right)^5.$$

**17.** Se considera la función $f(x, y, z) = x + y + z$.

1. Calcúlense los extremos relativos de $f$ sobre el hiperboloide $x^2 + y^2 - 2z^2 = 6$
2. Calcúlense los extremos absolutos de $f$ sobre el compacto

$$K = \{(x, y, z) :\ x^2 + y^2 - 2z^2 \leq 6,\ 0 \leq z \leq 2\}$$

**18.** Hállense los ejes de la elipse $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9$.

**19.** Hállese el punto más alto y más bajo del elipsoide $2x^2 + 3y^2 + z^2 + 12xy + 4xz = 25$.

**20.** Sea $f : (0, \infty) \times (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x, y) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy$, donde $p,\ q > 1$.

1. Discútanse los puntos críticos de $f$ en función de $p$ y $q$.
2. Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, demuéstrese la *desigualdad de Young*: $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \quad \forall x > 0, \quad \forall y > 0.$

**21.** Se considera el conjunto $A = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 :\ x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

1. Exprésese $A$ como unión de variedades conexas.
2. Calcúlense el supremo y el ínfimo de la función $f(x, y, z, t) = (x^2 + z^2)e^{-t}$ en $A$.

**22.** Se consideran el conjunto $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ z(x^2 + y^2) \leq 1,\ z \geq 1\}$ y la función $f(x, y, z) = xy + z(x^2 + y^2)$. Calcúlense el supremo y el ínfimo de $f$ en $M$.