CÁLCULO DIFERENCIAL. HOJA DE PROBLEMAS 2.

CONCEPTOS TOPOLÓGICOS BÁSICOS.

1. Determinar si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ son abiertos o cerrados. Hallar también su interior, adherencia, frontera y puntos de acumulación:

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\}$;
$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1\}$;
$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}$;
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x^3, x \in \mathbb{Q}\}$;
$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x/n, n \in \mathbb{N}\}$;
$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = rx, r \in \mathbb{Q}\}$;
$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq x^2 + y^2\}$;
$H = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x + y - x + w = 5\}$;
$I = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin(1/x), x \neq 0\}$;
$J = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$, donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua.

2. Sean A y B subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}^n$, y definamos

$$A + B := \{x + y \in \mathbb{R}^n : x \in A, y \in B\}.$$

(i) Probar que si A es un abierto, entonces $A + B$ es un abierto.
(ii) Encontrar conjuntos A y B cerrados tales que $A + B$ no sea cerrado.

3. Sea A un subconjunto cualquiera no vacío de X, $r > 0$, y definamos $B = \{x \in X : d(x,y) < r \text{ para algún } y \in A\}$. Probar que B es abierto.

4. Demostrar que la esfera $S(x,r) = \{y \in X : d(y,x) = r\}$ de un espacio métrico es un conjunto cerrado.

5. Demostrar que cualquier hiperplano en $\mathbb{R}^n$ es cerrado y tiene interior vacío.

6. Demostrar que si $A \subseteq B$ entonces $\mathrm{int}(A) \subseteq \mathrm{int}(B)$, y que $\overline{A} \subseteq \overline{B}$. Se dice por esto que la adherencia y el interior son operadores monótonos.

7. ¿Es verdad que $\mathrm{int}(A) \cup \mathrm{int}(B) = \mathrm{int}(A \cup B)$?

8. Probar que $\mathrm{int}(A \cap B) = \mathrm{int}(A) \cap \mathrm{int}(B)$.

9. Demostrar que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. ¿Es cierto que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$?

10. Probar que cualquier conjunto finito es cerrado.

11. Demostrar que $x \in A'$ si y sólo si cada entorno de x contiene infinitos puntos de A.

12. Sea A un subconjunto acotado superiormente de $\mathbb{R}$. Probar que $\sup A \in \overline{A}$.

13. Indentificando $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ con $\mathbb{R}^{n+m}$, demostrar que un subconjunto A de $\mathbb{R}^{n+m}$ es abierto si y sólo si para cada $(x, y) \in A$ existen U abierto de $\mathbb{R}^n$ y V abierto de $\mathbb{R}^m$ tales que $x \in U$, $y \in V$, y $U \times V \subset A$. *Indicación:* usar la norma $\| \cdot \|_\infty$.

14. Demostrar que si A es abierto en $\mathbb{R}^n$ y B es abierto en $\mathbb{R}^m$ entonces el producto cartesiano $U \times V$ es abierto en $\mathbb{R}^{n+m}$.

15. Probar que si $A \subseteq B$ entonces $A' \subseteq B'$.

16. Probar que $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

17. Probar que A' es siempre cerrado.

18. Probar que $\mathbb{Q}^n$ es denso en $\mathbb{R}^n$.

19. Demostrar que cualquier abierto de $\mathbb{R}^n$ es unión *numerable* de bolas abiertas. *Indicación:* considerar bolas con centros cuyas coordenadas son todas racionales y los radios también.

20. Generalizar el resultado anterior. Demostrar que en un espacio métrico separable cualquier abierto es unión numerable de bolas abiertas.

21. Si D es denso en (X, d) y U es un abierto de X, probar que $D \cap U$ es denso en (U, d). ¿Es esto cierto si U no es abierto?

22. Demostrar que la acotación de un conjunto no puede caracterizarse en términos de abiertos (es decir, no es un concepto topológico, sino puramente métrico).