CÁLCULO DIFERENCIAL. HOJA DE PROBLEMAS 5.

CONEXIÓN, CONEXIÓN POR CAMINOS Y CONVEXIDAD.

1. En los siguientes casos, estúdiese si M y $M \setminus \{(0,0)\}$ son conexos, y si no lo son determínese sus componentes conexas:

1. $M = \{(x,y) : x^2 + (y+1)^2 \leq 1\} \cup \{(0,y) : 0 \leq y < 1\}$
2. $M = \{(x,y) : x \in \mathbb{Q}, 0 < y \leq 1\} \cup \{(x,y) : x \notin \mathbb{Q}, -1 \leq y < 0\} \cup \mathbb{R} \times \{1\} \cup \mathbb{R} \times \{-1\} \cup \{(0,0)\}$
3. $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \alpha x,\ x \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$

2. Estúdiese si son conexos o conexos por caminos los conjuntos:

1. $\mathbb{R}^2 \setminus M$, donde M es numerable.
2. $\{(x,y) : 1 < 4x^2 + 9y^2 < 9; x \neq \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, n > 1\} \cup \{(x,y) : 1 = 4x^2 + 9y^2\} \subseteq \mathbb{R}^2$
3. $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{(x,y) : y = \frac{x}{n},\ 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(\frac{1}{2}, 0)\}$

3. Pruébese que $A \subset \mathbb{R}^n$ es conexo si, y sólo si, cada subconjunto suyo no vacío tiene frontera no vacía.

4. Sea X un espacio métrico. Supongamos que existen caminos continuos γ_1, que une x con y, y γ_2, que une y con z. Probar que existe un camino continuo γ que une x con z.

5. Demostrar que cualquier bola en un espacio normado es un conjunto convexo, es decir, el segmento que une dos cualesquiera de sus puntos está dentro de ella.

6. Sea E un espacio vectorial normado de dimensión por lo menos dos. Demostrar que:

1. $E \setminus \{0\}$ es conexo por caminos.
2. $S(x,r) = \{y \in E : \|y - x\| = r\}$ es conexo por caminos, para cada $x \in E$, $r > 0$.

7. Demostrar que $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(0,1)$ es conexo si y sólo si $n \geq 2$.

8. Probar que las componentes conexas de $\mathbb{Q}$ son sus puntos.

9. Sea A un subconjunto de un espacio métrico, y sean $x \in A$, $y \in X \setminus A$, y $\gamma : [0,1] \to X$ un camino continuo que une x con y. Demostrar que existe $t \in [0,1]$ tal que $\gamma(t) \in \partial A$.

10. Probar que si X e Y son conexos por caminos entonces $X \times Y$ es conexo por caminos.

11. Sean X un espacio métrico, $f : X \to \mathbb{R}$ una función. ¿Es cierto que si la gráfica G_f es un conjunto cerrado y conexo entonces f es continua? *Indicación:* considerar $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, la circunferencia unidad.

12. Probar que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función cuya gráfica es un conjunto cerrado y conexo entonces f es continua. ¿Es esto cierto si solamente pedimos que la gráfica sea conexa?

13. Demostrar que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ no son homeomorfos.

14. Demostrar que la circunferencia unidad $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ no es homeomorfa a ningún intervalo de $\mathbb{R}$.

15. Sea C un subconjunto convexo de un espacio normado. Probar que si $x \in \text{int}(C)$, $y \in C$, entonces $(1 - t)x + ty \in \text{int}(C)$ para $0 \leq t < 1$. Deducir que $\text{int}(C)$ es convexo.

16. Probar que $f : D \to \mathbb{R}$ es convexa si y sólo si su epigrafo $\text{epi}(f) := \{(x, y) \in D \times \mathbb{R} : y \geq f(x)\}$ es convexo en $E \times \mathbb{R}$.

17. Sea $T : E \to F$ una aplicación lineal entre espacios normados. Probar que si C es convexo en E entonces $T(C)$ es convexo en F.

18. Si $T : E \to F$ es lineal y D es convexo en F, ¿es $T^{-1}(D)$ convexo en E?

19. Demostrar que $f : D \to \mathbb{R}$ es convexa si y sólo si

$$f(\sum t_i x_i) \leq \sum t_i f(x_i)$$

siempre que $x_i \in D$, $t_i \in [0, 1]$, $\sum t_i = 1$, donde las sumas son siempre finitas.

20. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa, y supongamos que f no es constante. Demostrar que entonces $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ o $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

21. Demostrar que la interseccion arbitraria de conjuntos convexos es convexo. ¿Es cierto que la unión de convexos es convexo?