CÁLCULO DIFERENCIAL. HOJA DE PROBLEMAS 6.

DERIVADAS DIRECCIONALES, GRADIENTES, TANGENTE A LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN.

1. Calcúlense las derivadas direccionales de las funciones siguientes en los puntos y direcciones indicados:

1. $f(x,y) = x \arctan(\frac{x}{y})$ en el punto $(1,1)$; dirección $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.
2. $f(x,y) = e^x \cos \pi y$ en el punto $(0,-1)$; dirección $(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$.
3. $f(x,y,z) = e^x + yz$, en el punto (1,1,1); dirección $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

2. Estudiar la existencia de derivadas direccionales en el origen para las funciones siguientes.

1. $f(x,y) = \sqrt{xy}$;
2. $f(x,y) = \text{máx}\{|x|, |y|\}$.

3. Asumiendo la diferenciabilidad de todas ellas, calcúlese la matriz jacobiana en el origen de las funciones siguientes:

$$\begin{array}{cc} f(x,y) = (e^x + \sin y, x^2 \cos y) & g(x,y) = (\sin x + \log(1+y^2), \cos(xy)) \\ h(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^3} & \phi(t) = (\tan t, \sin t, e^t) \\ \varphi(u,v) = (u^2v^3, u^3v, u^4v^2) & \psi(x,y,z) = (x^4 y \cos z, xe^z). \end{array}$$

4. Sea $f(x,y) = x^{x^{x^y}} + (\sin \pi x) \arctan(\arctan(\sin \cos(xy) - \log(x+y))))$. Calcúlese $\frac{\partial f}{\partial y}(1,y)$.

5. Calcúlese la derivada direccional de la función

$$f(x,y,z) = x^2 - y^2 + xy^2 z - zx$$

en el punto (1,3,2) según la dirección del vector (1,-1,0). ¿En qué dirección es máxima la derivada direccional? ¿Cuál es el valor de la derivada direccional máxima?

6. Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función constante. Probar que f es diferenciable, con $Df(x) = 0$ para todo $x \in U$.

7. Sea $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal. Probar que L es diferenciable en todo punto, y que $DL(x) = L$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

8. Sea $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal, y sea $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación tal que, para algún $M \geq 0$,

$$\|h(x)\| \leq M\|x\|^2$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Defínase $f(x) = L(x) + h(x)$. Demostrar que f es diferenciable en 0. ¿Cuál es $Df(0)$?

9. Sean $f, g : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dos funciones que coinciden en un entorno de un punto $a \in U$ (es decir existe $r > 0$ tal que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in B(a,r)$). Supongamos que g es diferenciable en $a \in U$. Probar que entonces f es también diferenciable en a, y $Df(a) = Dg(a)$.

10. Estudiar la continuidad, existencia de derivadas direccionales y diferenciabilidad en $(0,0)$ de las siguientes funciones.

$$\begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0); \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x|y|}{(x^2+y^2)^{1/2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\sin(\frac{1}{x^2+y^2}) & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0); \end{cases} \qquad \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{y^2} & \text{si } y \neq 0, \\ 0 & \text{si } y = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0); \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y & \text{si} xy = 0, \\ 0 & \text{si } xy \neq 0. \end{cases}$$

11. Si $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ es una aplicación bilineal, probar que B es diferenciable en todo punto (x,y) de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, y que

$$DB(x,y)(h,k) = B(x,k) + B(h,y)$$

para todo $(h,k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. *Indicación:* Probar primero que existe $M \geq 0$ tal que $\|B(x,y)\| \leq M\|x\|\|y\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$.

12. Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función par (es decir $f(x) = f(-x)$) diferenciable en el origen. Calcúlese $Df(0)$.

13. ¿Son tangentes las gráficas de las funciones $f(x,y) = x^2 + y^2$ y $f(x,y) = x^2 - y^2 + xy^3$ en el punto $(0,0)$?

14. Una partícula sigue la trayectoria $\gamma(t) = (t^2, t^3 - 4t, 0)$, y se sale por la tangente en el instante $t = 2$. ¿Cuál es su velocidad en este momento? Calcular su posición en el instante $t = 3$.

15. Supóngase que $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tiene un máximo o un mínimo local en un punto $a \in U$, y que existe la derivada direccional $D_v f(a)$ en una dirección $v \in \mathbb{R}^n$. Probar que $D_v f(a) = 0$.

16. Sea $f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Calcular la matriz jacobiana de f asumiendo que es diferenciable en todo punto (r,θ)

17. Demostrar que si $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ es lineal y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en a entonces $L \circ f$ es diferenciable en a y

$$D(L \circ f)(a) = L \circ Df(a).$$

18. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha} & \text{si } (x,y,z) \neq (0,0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$$

Demostrar que f es diferenciable en $(0,0,0)$ si y sólo si $\alpha < 1$.

19. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciable en a, y definamos $g(x) = f(x+a)$. Probar que g es diferenciable en 0 y que $Dg(0) = Df(a)$.