CÁLCULO DIFERENCIAL. HOJA DE PROBLEMAS 8.

DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR. TEOREMA DE TAYLOR.

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} + y^2 & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) \neq (0,0). \end{cases}$$

Comprobar que f es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$, pero f no es de clase C^1 en ningún entorno de $(0,0)$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Calcular las derivadas parciales de primer y segundo orden de f, y comprobar que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1 \neq -1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

3. Comprobar que para todo $p \in \mathbb{N}$ se tiene que $C^p(U,\mathbb{R}^m) \subset C^{p-1}(U,\mathbb{R}^m)$; y en particular $C^\infty(U,\mathbb{R}^m) \subset C^p(U,\mathbb{R}^m)$.

4. Demostrar que una función $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ está en $C^p(U,\mathbb{R}^m)$ si y sólo si $D_i f = \partial f/\partial x_i$ está en $C^{p-1}(U,\mathbb{R}^m)$ para todo $i = 1,2,...,n$.

5. Demostrar que la suma, el producto, la composición, y el cociente (donde esté bien definido) de funciones de clase C^p es de clase C^p. *Indicación:* usar inducción sobre p.

6. Demostrar que la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = e^x y + \cos(xy)$$

es dos veces derivable en $\mathbb{R}^2$, y calcular la matriz de $D^2 f(x,y)$. Hallar también

$$D^2 f(1,3)\left((1,5),(7,1)\right).$$

7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = t^p$ para $t > 0$, y $f(t) = 0$ si $t \leq 0$. Probar que f es de clase C^k si $k < p$, pero no lo es si $k \geq p$.

8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t \leq 0. \end{cases}.$$

Probar que $f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Si $a > b$, dibujar la gráfica de

$$g(t) = \frac{f(t-a)}{f(t-a) + f(b-t)}$$

y demostrar que $g \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

9. Usando el problema anterior, definir una función $\varphi : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ tal que $\varphi(x) = 1$ si $x \in B(a,r)$; $\varphi(x) = 0$ si y sólo si $x \notin B(a,R)$, y $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, donde $0 < r < R$, $a \in \mathbb{R}^n$ son dados, y las bolas son euclideas.

10. Construir una función convexa $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tal que $\theta(t) = 0$ si $t \leq 0$, y $\theta(t) > 0$ si $t > 0$. *Indicación:* Usando el problema anterior puede construirse $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase $C^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$ tal que $\alpha(t) > 0$ si y sólo si $t \in (0,1)$; ahora, definir $\beta(t) = \int_0^t \alpha(s)ds$, y $\theta(t) = \int_0^t \beta(s)ds$.

11. Demostrar que todo cerrado C de $\mathbb{R}^n$ es el conjunto de ceros de alguna función $g : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ de clase C^∞.

12. Demostrar que, si definimos $(e^*_{i_1} \otimes ... \otimes e^*_{i_k}) : \mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (k veces) por

$$(e^*_{i_1} \otimes ... \otimes e^*_{i_k})(h^1, ..., h^k) = h^1_{i_1} ... h^k_{i_k},$$

entonces $\{(e^*_{i_1} \otimes ... \otimes e^*_{i_k}) : 1 \leq i_1, ..., i_k \leq n\}$ es una base de $\mathcal{L}^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, que tiene así dimensión n^k.

13. Calcúlese el Polinomio de Taylor de grado menor o igual que 3 para las funciones:

$$f(x,y) = e^{(x-1)^2} \cos y \text{ en } (1,0), \quad g(x,y) = x \sin y + y \sin x \text{ en } (0,0),$$
$$h(x,y) = xy^2 \text{ en } (0,0), \qquad \varphi(x,y) = \log(x+y) \text{ en } (1,1),$$
$$\psi(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+1} \text{ en } (0,0), \qquad \Phi(x,y) = \tfrac{y^2}{x^3} \text{ en } (1,-1).$$

14. Escríbase el polinomio $x^3 + y^2(1+x)$ en potencias de $(x-1)$ e $(y-2)$.

15. Demuéstrese que $f(x,y) = y^x$ es diferenciable para $y > 0$. Encuéntrese un polinomio $P(x,y)$ en dos variables, de grado menor o igual que 3, tal que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, 1+y) - P(x,y)}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0.$$

16. Si $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una aplicación afín (es decir, suma de una lineal más una constante), y $f : U \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ es k veces diferenciable, probar que

$$D^k(f \circ \varphi)(a)(h_1, ..., h_k) = D^k f(\varphi(a))(D\varphi(a)(h_1), ..., D\varphi(a)(h_k)).$$

En el caso particular en que $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, $\varphi(t) = a + th$, concluir que, si $g(t) = f(a+th)$, entonces

$$g^{(k)}(t) = D^k f(a+th)(h).$$

17. Usar el teorema de Taylor para probar el teorema binomial:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Indicación: Considerar $f(x) = (a+x)^n$.

18. Para cada $A \in \mathcal{L}^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ defínase

$$\|A\| = \inf\{M \geq 0 : |A(h_1, ..., h_k)| \leq M \|h_1\| ... \|h_k\|\}.$$

Probar que esta expresión define una norma en el espacio $\mathcal{L}^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

19. Sean U un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f : U \to \mathbb{R}$ una función de clase C^∞ tal que existe $M > 0$ de modo que para cada $x \in U$ se tiene

$$\|D^k f(x)\| \leq M^k$$

(donde $\| \cdot \|$ es la norma en $\mathcal{L}^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ definida en el problema anterior). Demostrar que f es analítica en U.