CÁLCULO DIFERENCIAL. HOJA DE PROBLEMAS 9.

EXTREMOS LOCALES.

1. Estudiar los puntos críticos de las siguientes funciones, tratando de determinar si corresponden a máximos locales, mínimos locales, o puntos de silla:

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = e^{xy}$;
2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 4yz + y^2x - z^3$;
3. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3(xy + xz + yz)$;
4. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3ax$, según los valores de $a \in \mathbb{R}$;
5. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2$;
6. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 - y^4$.

2. Estúdiense los puntos críticos, máximos y mínimos relativos de las siguientes funciones:

$$\begin{array}{cl} f(x,y) = x - x^2 - y^2 & g(x,y) = x^2 - y^2 + xy \\ h(x,y) = x^2 + y^2 + 3xy & F(x,y) = y^2 - x^3 \\ H(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy & \psi(x,y) = \sin(x^2 + y^2) \\ \varphi(x,y) = xye^{x+2y} & \Phi(x,y) = e^{1+x^2-y^2} \\ \phi(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 & P(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + yz \end{array}$$

3. Calcúlense:

1. Los extremos absolutos de las funciones siguientes, en los conjuntos que se indican:
   a) $f(x, y) = x - x^2 - y^2$, en $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \text{máx}\{| x |, | y |\} \leq 1\}$.
   b) $f(x, y) = \sin(xy)$, en $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \text{máx}\{| x |, | y |\} \leq 1\}$.
   c) $f(x, y) = \sin(x + y) + \cos(x - y)$, en $K = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.
2. $\sup\{4x^2 + y^2 - 4x - 3y;\ y \geq 0,\ 4x^2 + y^2 \leq 4\}$.
3. $\sup\{(x + y)e^{-(x^2+y^2)};\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

4. Sea $f(x, y) = (y - 3x^2)(y - x^2)$

1. Pruébese que (0,0) es un punto crítico de f.
2. Pruébese que f tiene un mínimo relativo en (0,0) sobre cada recta que pasa por (0,0).
3. Pruébese que (0,0) no es un mínimo relativo de f, sino un punto de silla.

5. Encuéntrense los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y las direcciones para las que la derivada direccional de $f(x, y) = 3x^2 + y$ alcanza el máximo valor, suponiendo que (x, y) verifica $x^2 + y^2 \leq 1$.

6. Hállese la ecuación del plano que pasa por $(1, 1, 2)$ y determina con los ejes de coordenadas un tetraedro de volumen mínimo (no nulo).

7. Sea $f(x, y) = a[2xy + y^2 + yx^2 + \cos(x + y)] + x^2(a^2 - y)$. Discútase la existencia de extremos en el origen, según los valores de a.

8. Encuéntrense los extremos relativos y los absolutos, si existen, de las siguientes funciones:

1. $f(x, y) = (ax^2 + by^2)e^{-(x^2+y^2)}, \quad a, b > 0$.
2. $f(x, y, z) = (x + z^2)e^{x(y^2+z^2+1)}$.

9. Hállense los extremos de $f(x,y,z) = xy^2z^3(a-x-y-z)$.

10. Sea D un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ y sea $f : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, diferenciable en D. Si f se anula en la frontera de D, demuéstrese que existe al menos un punto $a \in D$ tal que $Df(a) = 0$.

11. Hallar los puntos de la superficie $z^2 = xy + 1$ de $\mathbb{R}^3$ que están más próximos al origen $(0,0,0)$.

12. Probar que el máximo de $x^2y^2z^2$ sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ es $(r^2/3)^3$.

13. Probar que el mínimo de $x^2 + y^2 + z^2$ sobre la superficie $x^2y^2z^2 = (r^2/3)^3$ es r^2.

14. Encontrar el máximo de $x_1^2x_2^2...x_n^2$ sobre la esfera $x_1^2+x_2^2+...+x_n^2 = 1$. Deducir que para cualesquiera n números positivos a_i se tiene que

$$(a_1a_2...a_2)^{1/n} \leq \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n},$$

es decir, la media geométrica es siempre menor o igual que la media aritmética.

15. Sean $a_1, ..., a_n$ números positivos. Para $p > 1$, sea q tal que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Hallar el máximo de $f(x) = \sum_{i=1}^n a_ix_i$ sobre la superficie S definida por $\sum_{i=1}^n |x_i|^q = 1$. Deducir que

$$\sum_{i=1}^n a_ix_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^q\right)^{1/q}$$

(la *desigualdad de Hölder* para sumas). Probar también que

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{1/p}$$

(desigualdad de Minkowski para sumas).

16. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable en $\mathbb{R}$ tal que f tiene un mínimo local en un punto x_0, y que no hay más puntos críticos. Probar que x_0 es entonces un mínimo global.

17. Probar que el problema anterior no es válido para funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Considérese para ello la función $f(x,y) = x^2 + y^2(1-x)^3$, mostrando que $(0,0)$ es el único punto crítico, que es un mínimo local estricto, y que f no tiene ningún mínimo global.