Cálculo Integral

Daniel Azagra

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Febrero de 2007

ISBN-13: 978-84-611-6377-9

Índice general

Capítulo 1

Funciones integrables en $\mathbb{R}^n$

Sean A un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^n$, y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Sea $R = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$ un rectángulo que contenga a A. Siempre puede suponerse que f está definida en todo el rectángulo R, extendiéndola si es necesario por $f(x) = 0$ para $x \in R \setminus A$. Sea P una partición de R obtenida mediante el procedimiento de dividir cada intervalo $[a_i, b_i]$ en $m_i + 1$ puntos $t_0^i = a_i < t_1^i < ... < t_{m_i}^i = b_i$ y formar los $m_1 m_2 ... m_n$ subrectángulos

$$R_\alpha = [t_{j_1}^1, t_{j_1+1}^1] \times ... \times [t_{j_n}^n, t_{j_n+1}^n],$$

donde $\alpha = (j_1, j_2, ..., j_n)$, con $0 \leq j_i \leq m_i$, y $1 \leq i \leq n$. En lo sucesivo, siempre consideraremos particiones de rectángulos obtenidas de esta manera.

Nótese que P podría definirse como

$$P = P^1 \times ... \times P^n := \{I_{j_1}^1 \times ... \times I_{j_n} : 0 \leq j_k \leq m_k, 1 \leq k \leq n\},$$

donde $I_j^i = [t_j^i, t_{j+1}^i]$, y cada $P^i = \{I_j^i : 0 \leq j \leq m_i\}$ es una partición del lado $[a_i, b_i]$ del rectángulo R.

Definimos el volumen de un rectángulo $R = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$ como el producto de las longitudes de sus lados,

$$v(R) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)...(b_n - a_n).$$

Observación 1.1 Si P es una partición de un rectángulo R, entonces

$$v(R) = \sum_{Q \in P} v(Q).$$

Como f está acotada en R, podemos considerar el supremo y el ínfimo de f sobre cada subrectángulo Q de una partición P de R, y denotamos

$$m(f, Q) = \text{ínf}\{f(x) : x \in Q\}, \qquad M(f, Q) = \sup\{f(x) : x \in Q\}.$$

Dada una partición P de R se define la *suma inferior* de f para P como

$$L(f,P) = \sum_{Q\in P} m(f,Q)v(Q),$$

donde la suma se hace sobre todos los subrectángulos Q de la partición P, y análogamente se define

$$U(f,P) = \sum_{Q\in P} M(f,Q)v(Q)$$

como la *suma superior* de f para P.

Observación 1.2 Para toda partición P se tiene que $L(f,P) \leq U(f,P)$.

Sean P y P' particiones de un rectángulo R. Se dice que P' es más fina que P (y escribiremos $P' \geq P$) si cada subrectángulo de P' está contenido en algún subrectángulo de P. Esto equivale a decir que todo subrectángulo de P tiene una partición formada por subrectángulos de P'.

Lema 1.3 Si P' es más fina que P entonces

$$L(f,P) \leq L(f,P'), \quad \text{mientras que} \quad U(f,P) \geq U(f,P').$$

La demostración de este lema se deja como ejercicio. Basta notar que el ínfimo de f sobre un rectángulo es menor o igual que el ínfimo de f sobre cualquier subrectángulo suyo, y utilizar la observación 1.1.

Estos hechos tienen como consecuencia el siguiente

Lema 1.4 *Si P_1 y P_2 son particiones cualesquiera de un rectángulo R, entonces*

$$L(f,P_1) \leq U(f,P_2),$$

es decir, cualquier suma inferior es menor o igual que cualquier otra suma superior.

Demostración: De acuerdo con las observaciones anteriores, si tomamos una partición P más fina que P_1 y que P_2 (esto siempre puede hacerse; ¿por qué?), se tiene que

$$L(f,P_1) \leq L(f,P) \leq U(f,P) \leq U(f,P_2). \ \Box$$

Por consiguiente, el conjunto de todas las sumas inferiores está acotado superiormente, y tiene un supremo,

$$s = \sup\{L(f,P) : P \,\text{partición de}\, R\}.$$

Análogamente, el conjunto de todas las sumas superiores está acotado inferiormente, luego tiene un ínfimo,

$$S = \text{ínf}\{U(f, P) : P\,\text{partición de}\,R\}.$$

Por el lema anterior, es claro que $s \leq S$. Al número s se le llama *integral inferior* de f en A, y a S se le llama *integral superior* de f en A. Denotaremos estos números por

$$s = \underline{\int}_A f, \qquad \text{y}\, S = \overline{\int}_A f.$$

Definición 1.5 Si $S = s$ se dice que f es integrable (en el sentido de Riemann), y se define la integral de f sobre A como

$$\int_A f = \sup\{L(f, P) : P\,\text{partición de}\,R\} = \text{ínf}\{U(f, P) : P\,\text{partición de}\,R\}.$$

Observación 1.6 Si f es integrable en A entonces, según la definición,

$$L(f, P) \leq \int_A f \leq U(f, P)$$

para toda partición P de R, y además $\int_A f$ es el *único* número con esta propiedad. Es decir, si $L(f, P) \leq \alpha \leq U(f, P)$ para toda partición P de R y f es integrable, entonces $\alpha = \int_A f$.

Notación La integral $\int_A f$ suele denotarse también por $\int_A f(x)dx$, o incluso $\int ... \int_A f(x_1, ..., x_n)dx_1...dx_n$. Si $A = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $\int_A f$ suele escribirse como $\int_a^b f$, o $\int_a^b f(x)dx$.

Es fácil comprobar que la definición de integral no depende del rectángulo $R \supset A$ considerado (de hecho, si R y R' son rectángulos que contienen a A entonces

$$\text{ínf}\{U(f, P) : P \text{ partición de } R\} = \text{ínf}\{U(f, P') : P' \text{ partición de } R'\},$$

y análogamente para la integral inferior).

A continuación damos un ejemplo de una función que es integrable, y otro de una función que no lo es; se deja al cuidado del lector la demostración de lo que se afirma.

Ejemplo 1.7 Sea $f(x) = c$ una función constante definida sobre un rectángulo A de $\mathbb{R}^n$. Entonces f es integrable, y

$$\int_A f = c \cdot v(A).$$

Ejemplo 1.8 Sea A un rectángulo de $\mathbb{R}^2$, y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}; \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces f no es integrable en A.

Para poder considerar más ejemplos y establecer las propiedades elementales de la integral necesitaremos los dos teoremas siguientes. El primero es un sencillo criterio de integrabilidad.

Teorema 1.9 (Criterio de integrabilidad de Riemann) *Sea A un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^n$, R un rectángulo que contiene a A, y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada (que se extiende a R poniendo $f = 0$ en $R \setminus A$). Entonces, f es integrable si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición $P = P_\varepsilon$ de R tal que*

$$U(f, P) - L(f, P) \leq \varepsilon.$$

Demostración: Veamos primero que si f es integrable entonces satisface la condición de Riemann. Dado $\varepsilon > 0$, en vista de la definición de $\int_A f$ y de las propiedades de los supremos e ínfimos, existen particiones P_1 y P_2 de R tales que

$$U(f, P_1) - \int_A f \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad \int_A f - L(f, P_2) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

y por tanto, tomando una partición P más fina que P_1 y que P_2, según el lema 1.3, se tiene

$$U(f, P) - \int_A f \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad \int_A f - L(f, P) \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

lo que, sumando ambas desigualdades, nos dice que

$$U(f, P) - L(f, P) \leq \varepsilon.$$

Recíprocamente, supongamos que f satisface la condición de Riemann. Sean S y s las integrales superior e inferior de f en A. Siempre es verdad que

$$L(f, P) \leq s \leq S \leq U(f, P)$$

para toda partición P de R. Veamos que ha de ser $S = s$ y por tanto f es integrable. Bastará probar que $S - s \leq \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Pero esto es obvio a partir de la desigualdad anterior y de la condición de Riemann: dado $\varepsilon > 0$ existe una partición P_ε tal que $U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) \leq \varepsilon$, y por tanto

$$S - s \leq U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) \leq \varepsilon. \ \Box$$

El siguiente resultado caracteriza la integrabilidad de una función en términos del comportamiento de sus *sumas de Riemann*, y nos será muy útil más adelante para establecer ciertas propiedades de la integral (por ejemplo, que la suma de funciones integrables es integrable).

Teorema 1.10 (de Darboux) *En las mismas condiciones que el teorema anterior, f es integrable en A, con integral I, si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cualquier partición P de R en subrectángulos $Q_1, ..., Q_N$ cuyos lados sean menores o iguales que δ, y para cualesquiera $x_1 \in Q_1, ..., x_N \in Q_N$, se tiene que*

$$|\sum_{j=1}^{N} f(x_j) v(Q_j) - I| \leq \varepsilon.$$

De $\sum_{j=1}^{N} f(x_j) v(Q_j)$ se dice que es una suma de Riemann para f asociada a la partición P.

Demostración: En primer lugar veamos que si f satisface la condición de Darboux entonces es integrable, con integral I. Sean S y s las integrales superior e inferior de f respectivamente. Basta probar que $S = s = I$, o lo que es lo mismo, $I \leq s \leq S \leq I$. Veamos por ejemplo que $S \leq I$ (el caso $I \leq s$ se trata análogamente). A tal fin, es suficiente demostrar que, dado $\varepsilon > 0$, existe una partición P de R tal que

$$|U(f, P) - I| \leq \varepsilon,$$

y por tanto $S \leq U(f, P) \leq I + \varepsilon$. Fijado $\varepsilon > 0$, elijamos $\delta > 0$ tal que si P es una partición de R en subrectángulos $Q_1, ..., Q_N$ cuyos lados son menores o iguales que δ, y $x_1 \in Q_1, ..., x_N \in Q_N$, entonces

$$|\sum_{j=1}^{N} f(x_j) v(Q_j) - I| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por supuesto, podemos escoger los x_j de modo que

$$|M(f, Q_j) - f(x_j)| \leq \frac{\varepsilon}{v(Q_j) 2N},$$

luego
$$|U(f,P)-\sum_{j=1}^{N} f(x_j)v(Q_j)| \leq \sum_{j=1}^{N} \frac{\varepsilon}{v(Q_j)2N} v(Q_j) = \frac{\varepsilon}{2},$$
y por tanto
$$|U(f,P)-I| \leq |U(f,P)-\sum_{j=1}^{N} f(x_j)v(Q_j)|+|\sum_{j=1}^{N} f(x_j)v(Q_j)-I| \leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$
que es lo que queríamos probar.

Recíprocamente, supongamos que f es integrable, sea $I=\int_A f$, y veamos que satisface la condición de Darboux. Para ello utilizaremos la siguiente propiedad, cuya demostración no es difícil y se deja como ejercicio para el lector (ver problemas 1.14 y 1.15): dados un rectángulo R de $\mathbb{R}^n$, una partición P de R y $\varepsilon>0$, existe un $\delta>0$ tal que si P' es cualquier partición de R en subrectángulos cuyos lados son menores o iguales que δ, entonces la suma de los volúmenes de los subrectángulos de P' que no están contenidos en algún subrectángulo de P es menor o igual que ε.

Como f es acotada, existe $M>0$ tal que $|f(x)|\leq M$ para todo $x\in R$. Al ser f integrable, existen particiones P_1 y P_2 de R tales que $I-L(f,P_1)\leq\varepsilon/2$ y $U(f,P_2)-I\leq\varepsilon/2$. Sea P una partición más fina que P_1 y que P_2. Entonces $I-L(f,P)\leq\varepsilon/2$ y $U(f,P)-I\leq\varepsilon/2$. Por la propiedad mencionada antes, existe un $\delta>0$ tal que para toda partición P' de R en subrectángulos cuyos lados son menores o iguales que δ, entonces la suma de los volúmenes de los subrectángulos de P' que no están contenidos en algún subrectángulo de P es menor o igual que $\varepsilon/2M$. Sea $P'=\{Q_1,...,Q_N\}$ una partición de R en subrectángulos cuyos lados son menores o iguales que δ. Denotemos (si es preciso reordenando los subrectángulos de la partición) por $Q_1,...,Q_K$ los subrectángulos de P' que están contenidos en algún subrectángulo de P, y sean $Q_{K+1},...,Q_N$ el resto. Entonces, para cualesquiera $x_j\in Q_j$, $j=1,...,N$, se tiene que
$$\sum_{j=1}^{N} f(x_j)v(Q_j)=\sum_{j=1}^{K} f(x_j)v(Q_j)+\sum_{j=K+1}^{N} f(x_j)v(Q_j)\leq$$
$$U(f,P)+M\frac{\varepsilon}{2M}=U(f,P)+\frac{\varepsilon}{2}\leq I+\varepsilon.$$
Análogamente se ve que
$$\sum_{j=1}^{N} f(x_j)v(Q_j)\geq L(f,P)-\frac{\varepsilon}{2}\geq I-\varepsilon.$$

Juntando estas dos desigualdades obtenemos lo que queríamos:

$$|\sum_{j=1}^{N} f(x_j)v(Q_j) - I| \leq \varepsilon. \ \square$$

El criterio de integrabilidad de Riemann permite deducir fácilmentemente (ver problema 1.19) que cualquier función continua en un rectángulo R es integrable en R. Sin embargo, veremos un resultado mucho más general (teorema de Lebesgue) en el capítulo 3.

Problemas

1.11 Calcular $\int_0^1 x dx$ directamente a partir de la definición.

1.12 Probar el lema 1.3: Si P' es una partición más fina que P entonces

$$L(f,P) \leq L(f,P'), \quad \text{mientras que} \quad U(f,P) \geq U(f,P').$$

1.13 Dadas dos particiones cualesquiera P_1, P_2 de un rectángulo R, siempre existe una partición P de R tal que P es más fina que P_1 y que P_2.
Indicación: Probar primero el resultado para un intervalo de la recta real. Después, en el caso general de un rectángulo $R = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$ de $\mathbb{R}^n$, si $P_1 = P_1^1 \times ... \times P_1^n$ y $P_2 = P_2^1 \times ... \times P_2^n$, tómese P^i partición de $[a_i, b_i]$ más fina que P_1^i y que P_2^i; entonces $P = P^1 \times ... \times P^n$ es más fina que P_1 y que P_2.

1.14 Sea P una partición de un intervalo $[a,b]$. Dado $\varepsilon > 0$, probar que existe $\delta > 0$ tal que si P' es cualquier partición de $[a,b]$ en subintervalos cuyas longitudes son menores o iguales que δ, entonces la suma de las longitudes de los subintervalos de P' que no están contenidos en algún subintervalo de P es menor o igual que ε.

Indicación: Tomar $\delta = \varepsilon/N$, donde N es el número de puntos de la partición P.

1.15 Más en general, probar que, dados un rectángulo R de $\mathbb{R}^n$, una partición P de R y $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si P' es cualquier partición de R en subrectángulos cuyos lados son menores o iguales que δ, entonces la suma de los volúmenes de los subrectángulos de P' que no están contenidos en algún subrectángulo de P es menor o igual que ε.

Indicación: Tomar $\delta = \varepsilon/T$, donde T es la suma total de las *áreas* de las caras de todos los subrectángulos de la partición P.

1.16 Sean $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ integrables. Supongamos que $f \geq g$ sobre A. Probar que entonces

$$\int_A f \geq \int_A g.$$

1.17 En particular, si A es un rectángulo y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable y está acotada superiormente por M e inferiormente por m, entonces

$$mv(A) \leq \int_A f \leq Mv(A).$$

1.18 Probar el siguiente *teorema del valor medio integral:* Si A es un rectángulo y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, existe $x_0 \in A$ tal que

$$\int_A f = f(x_0)v(A).$$

Indicación: Por el problema anterior, $f(x_1)v(A) \leq \int_A f \leq f(x_2)v(A)$, donde $f(x_1)$ y $f(x_2)$ son el mínimo y máximo absolutos de f sobre A. Utilizar entonces que f es continua y A es conexo.

1.19 Sean A un rectángulo de $\mathbb{R}^n$, y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Probar que f es integrable en A.

Indicación: Al ser f continua, alcanza su máximo y mínimo sobre cada subrectángulo de una partición; además, puesto que A es compacto, f es uniformemente continua sobre A. Combinar estos dos hechos con el criterio de integrabilidad de Riemann para deducir el resultado.

1.20 Sean A un rectángulo, y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que es constante salvo quizás en una cantidad finita de puntos. Probar que f es integrable en A, y decir cuál es su integral.

1.21 Sea $f(x) = 1$ para todo $x \in A$. ¿Qué debería ser $\int_A f$?

1.22 Sean A un rectángulo de $\mathbb{R}^n$, y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Supongamos que $f \geq 0$ sobre A y que $\int_A f = 0$. Probar que entonces $f = 0$.

1.23 Probar que si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es creciente (o decreciente) entonces es integrable en $[a, b]$.

Capítulo 2

Volumen y conjuntos de medida cero

En la recta real normalmente las funciones se integran sobre intervalos. En $\mathbb{R}^n$ es deseable poder considerar integrales de funciones sobre conjuntos más complicados que rectángulos. Sin embargo, no todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es adecuado para integrar funciones sobre él. De hecho, según la definición de integral dada en el capítulo anterior, una misma función puede ser integrable sobre un rectángulo y dejar de serlo en un subconjunto de ese rectángulo; ésto ocurre cuando la frontera de dicho subconjunto es *demasiado grande*. Por ejemplo, la función $f(x) = 1$ es integrable sobre $[0,1] \times [0,1]$, pero no lo es sobre $A = ([0,1] \times [0,1]) \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$.

Por esta razón deberemos restringir la clase de conjuntos sobre los que podemos dar una definición razonable de integral. Esencialmente, lo que se le pedirá a un conjunto para poder integrar funciones sobre él de una manera adecuada es que su frontera no sea demasiado complicada ni demasiado grande. El objetivo de este capítulo, así como del siguiente, es hacer precisas estas ideas.

En primer lugar definiremos cuándo un conjunto tiene *volumen*, y cuál es, en su caso. Ante todo debe advertirse que es imposible establecer una definición de volumen que sea válida para todo subconjunto de $\mathbb{R}^3$ (o de $\mathbb{R}^n$ en general). Lo mínimo que se le podría pedir a una tal definición es que la función de volumen fuera finitamente aditiva e invariante por movimientos rígidos. Es decir, si $v(A)$ denota el volumen de un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^3$, la función v debería satisfacer que

$$v(\bigcup_{i=1}^{m} A_i) = \sum_{i=1}^{m} v(A_i)$$

para toda familia finita de conjuntos con volumen $A_1, ..., A_m$ que sean disjuntos dos a dos (i.e. $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$), y además

$$v(f(A)) = v(A)$$

para todo conjunto A con volumen y toda isometría afín $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

El siguiente resultado, conocido popularmente como *Paradoja de Banach y Tarski*, es uno de los teoremas más sorprendentes de la matemática, y prueba en particular que no puede encontrarse una definición coherente y satisfactoria de volumen susceptible de ser aplicada a cualquier conjunto de $\mathbb{R}^3$. Lo que nos dice este teorema es que podemos romper la bola unidad del espacio $\mathbb{R}^3$ en una cantidad finita de trozos disjuntos y, mediante movimientos rígidos (rotaciones más traslaciones), recomponer estos trozos de manera también disjunta para obtener dos bolas idénticas a la original.

Teorema 2.1 (Banach-Tarski, 1932) *Sea B la bola unidad de $\mathbb{R}^3$. Existen cinco subconjuntos $A_1, ..., A_5$ de B que forman una partición de B, es decir, $B = \cup_{i=1}^5 A_i$, con $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, y existen cinco movimientos rígidos $f_1, ..., f_5 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tales que*

$$\bigcup_{i=1}^{2} f_i(A_i) = B = \bigcup_{i=3}^{5} f_i(A_i),$$

siendo los miembros de cada una de estas dos uniones disjuntos dos a dos.

De hecho, este teorema es equivalente al siguiente resultado de apariencia más general.

Teorema 2.2 (Banach-Tarski) *Sean X e Y subconjuntos acotados y con interior no vacío de $\mathbb{R}^3$. Entonces existen una partición de X en subconjuntos disjuntos dos a dos, $X = X_1 \cup ... \cup X_m$, y movimientos rígidos $f_i : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $1 \leq i \leq m$, tales que los $f_i(X_i)$ son disjuntos dos a dos, y*

$$Y = \bigcup_{i=1}^{m} f_i(X_i).$$

Por muy extraño que pueda parecer, este resultado, si bien contraviene el sentido común, no viola ninguna ley de la lógica o las matemáticas; simplemente nos indica que existen conjuntos tan patológicos que no pueden tener volumen. También podría decirse que la matemática es más rica que nuestra intuición de la realidad, pues alberga monstruos que repugnan al sentido común y que la razón puede apenas vislumbrar.

Una demostración relativamente elemental del teorema de Banach-Tarski puede encontrarse en el siguiente artículo: K. Stromberg, *The Banach-Tarski paradox*, American Mathematical Monthly, vol. 86 (1979) no. 3, p. 151-161.

Por todo esto, ninguna teoría de la medida o de la integral puede ser lo suficientemente rica y coherente a la vez para dar cuenta de todos los subconjuntos del espacio $\mathbb{R}^n$. Sólo podrá definirse medida, volumen o integral para determinados conjuntos o funciones. Hay diversas teorías de la medida y de la integral. En este curso nos concentraremos en la teoría de la integral de Riemann, que, si bien es menos general que la de Lebesgue, resulta más que suficiente para la mayoría de las aplicaciones.

La definición de la integral de Riemann de una función estudiada en el primer capítulo lleva de modo natural a la siguiente definición de volumen. Recordemos que si $A \subseteq \mathbb{R}^n$, se define la función característica de A, $1_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, por

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A; \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Definición 2.3 Se dice que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *tiene volumen* si 1_A es integrable; en este caso el volumen de A es el número

$$v(A) = \int_A 1_A(x)dx.$$

Nótese que, en principio, sólo si A es acotado tiene sentido hablar de la integrabilidad de 1_A. Obsérvese también que la región bajo la gráfica de 1_A es un *cilindro* de base A y altura 1. Cuando A es un subconjunto del plano $\mathbb{R}^2$, a $v(A)$ se le llama el *área* de A, y cuando $A \subseteq \mathbb{R}$, su *longitud*. A veces se dice A *tiene contenido* en lugar de *tiene volumen*, y de un conjunto con volumen también se dice que es *medible Jordan*.

Definición 2.4 Se dice que A tiene volumen cero (o contenido cero) si tiene volumen y es $v(A) = 0$.

Proposición 2.5 *Un conjunto A tiene volumen cero si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe un recubrimiento finito de A por rectángulos $Q_1, ..., Q_m$ tales que $\sum_{j=1}^m v(Q_j) \leq \varepsilon$.*

Demostración: Sea R un rectángulo que contenga a A. Si $\varepsilon > 0$ y $v(A) = 0$, por definición de integral, existe una partición P de R en subrectángulos $S_1, ..., S_M$ tal que $U(1_A, P) \leq \varepsilon$. Si denotamos por P_0 la colección de todos los subrectángulos S_j cuya intersección con A es no vacía, se tiene que

$U(1_A, P) = \sum_{Q \in P_0} v(Q)$, y es claro que P_0 es un recubrimiento finito de A por rectángulos cuyos volúmenes suman menos que ε.

Recíprocamente, supóngase que para $\varepsilon > 0$ dado existe un recubrimiento de A por rectángulos cuyos volúmenes suman menos que ε. Sean $V_1, ..., V_M$ estos rectángulos. Para cada $j = 1, ..., M$ elijamos un rectángulo $\widetilde{V}_j$ tal que $V_j \subset \mathrm{int}(\widetilde{V}_j)$ y $v(\widetilde{V}_j) \leq v(V_j) + \varepsilon/2^j$ (de modo que $\sum_{j=1}^{M} v(\widetilde{V}_j) \leq 2\varepsilon$).

Sean ahora R un rectángulo que contenga a A, y P una partición de R en subrectángulos Q tales que cada Q o bien está contenido en uno de los $\widetilde{V}_i$ o bien se corta sólo en la frontera con algunos de los $\widetilde{V}_i$ (esta partición P puede definirse utilizando todos los lados de los $\widetilde{V}_i$). Entonces es claro que

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{M} \widetilde{V}_j = \bigcup \{Q \, : \, Q \subseteq \widetilde{V}_j \text{ para algún } j\},$$

y

$$U(1_A, P) = \sum_{Q \in P : Q \cap A \neq \emptyset} v(Q) \leq \sum_{Q \in P : \exists j : Q \subseteq \widetilde{V}_j} v(Q) = \sum_{i=1}^{M} v(\widetilde{V}_i) \leq 2\varepsilon.$$

Este argumento prueba que $\inf\{U(1_A, P') : P' \text{ partición de } R\} \leq 0$, es decir, la integral superior de 1_A es menor o igual que cero, y como por otra parte la integral inferior de 1_A es obviamente no negativa (puesto que $1_A \geq 0$), resulta que las integrales inferior y superior han de ser ambas iguales a cero. Es decir, 1_A es integrable y su integral es cero, lo cual equivale a decir que A tiene volumen y $v(A) = 0$. $\Box$

Como veremos más adelante, muchas veces es útil poder considerar recubrimientos numerables (y no sólo finitos) por rectángulos. Esta idea da lugar a la definición de conjunto de medida cero, que en general no equivale a la de volumen cero, pero que sin embargo está estrechamente relacionada con ella (se verá que un conjunto A tiene volumen si y sólo si su frontera tiene medida cero: corolario 3.2 del capítulo siguiente).

Definición 2.6 Un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice que tiene *medida cero* si para todo $\varepsilon > 0$ existe una familia numerable o finita de rectángulos $Q_1, Q_2, ...$ tales que

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{\infty} v(Q_j) \leq \varepsilon.$$

Debe hacerse notar que estas definiciones dependen del espacio ambiente en el que se trabaja. Por ejemplo, la recta real, considerada como un subconjunto del plano $\mathbb{R}^2$, tiene medida cero, pero como subconjunto de $\mathbb{R}$ no tiene esta propiedad (ver el ejercicio 2.15).

Observación 2.7 Todo conjunto de volumen cero tiene medida cero. El recíproco no es cierto, puesto que hay conjuntos de medida cero que no tienen volumen. Por ejemplo, $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ tiene medida cero (todo conjunto numerable tiene medida cero), y sin embargo no tiene volumen (su función característica no es integrable Riemann). No obstante, si A tiene volumen, entonces su volumen es cero si y sólo si tiene medida cero (ver problema 2.19). También es fácil ver que si A es compacto entonces A tiene medida cero si y sólo si tiene volumen cero (problema 2.18).

Observación 2.8 Si A tiene medida cero y $B \subseteq A$, entonces B tiene también medida cero.

Es claro que la union finita de conjuntos de volumen cero tiene volumen cero. Una de las principales ventajas de poder considerar conjuntos de medida cero es que la unión numerable de conjuntos de medida cero tiene también medida cero (lo que no es cierto de los conjuntos de volumen cero, como prueba el ejemplo de la observación 2.7 anterior):

Teorema 2.9 *Sean $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una familia numerable de conjuntos de medida cero en $\mathbb{R}^n$. Entonces su unión $A = \cup A_j$ tiene medida cero.*

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$. Como cada A_i tiene medida cero, existe un recubrimiento numerable de A_i por rectángulos $B_{ij}, j \in \mathbb{N}$, tales que

$$\sum_{j=1}^{\infty} v(B_{ij}) \leq \varepsilon / 2^i.$$

Entonces es claro que la colección numerable de rectángulos formada por todos los B_{ij}, $i, j \in \mathbb{N}$ recubre la unión $A = \cup A_j$, y las sumas de los volúmenes de todos los rectángulos B_{ij} es menor o igual que ε, ya que

$$\sum_{i,j \in \mathbb{N}} v(B_{ij}) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} v(B_{ij}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon.$$

Problemas

2.10 Probar que si $E_1, ..., E_k$ tienen contenido cero en $\mathbb{R}^n$ entonces $\bigcup_{j=1}^{k} E_j$ también tiene contenido cero.

2.11 Demostrar que si E tiene contenido cero en $\mathbb{R}^n$ entonces su adherencia $\overline{E}$ también lo tiene.

2.12 Supongamos que $E \subset \mathbb{R}^n$ tiene medida cero. ¿Es cierto que su adherencia también tiene medida cero?

2.13 Demostrar que en la definición de contenido cero y de medida cero pueden sustituirse los rectángulos cerrados por rectángulos abiertos.

2.14 Demostrar también que pueden sustituirse los rectángulos por cubos en la definición de contenido cero y medida cero.

2.15 Probar que la recta real, considerada como subconjunto del plano $\mathbb{R}^2$, tiene medida cero.

2.16 Demostrar que un rectángulo *no* tiene medida cero. Concluir que si A tiene medida cero, entonces A tiene interior vacío. El recíproco no es cierto; ver el problema 2.21.

2.17 Probar que si A es un conjunto con volumen y $v(A) > 0$ entonces A tiene interior no vacío.

2.18 Probar que si A es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$, entonces A tiene medida cero si y sólo si tiene volumen cero.

2.19 Demostrar que si A tiene volumen entonces su volumen es cero si y sólo si A tiene medida cero.

2.20 Sea C el conjunto de Cantor en $\mathbb{R}$. Probar que C tiene medida cero. Por tanto, existen conjuntos no numerables que tienen medida cero.

2.21 *Existen compactos cuyo interior es vacío y que* no *tienen medida cero.* De hecho, puede encontrarse un subconjunto compacto K del intervalo $[0, 1]$ con esta propiedad. En particular K no tiene volumen, ya que todo conjunto con volumen cuyo interior sea vacío debe tener volumen cero.

Indicación: Modificar apropiadamente la construcción del conjunto de Cantor (por ejemplo, dividir el intervalo unidad en cinco partes y quitar la del medio; dividir ahora en $5^2 = 25$ partes cada uno de los dos intervalos adyacentes al excluido, y eliminar la del medio. En cada paso multiplicar por cinco las subdivisiones del paso anterior y quitar el intervalo que queda en el medio de cada uno de los conservados en el paso precedente. Continuar el proceso indefinidamente).

2.22 *Existen abiertos que no tienen volumen.* Utilizando el ejercicio anterior, encontrar un subconjunto abierto del intervalo $(0, 1)$ que no tenga volumen. Ver también el problema 3.25

2.23 Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función Lipschitziana, es decir, $\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|$ para todo $x, y \in A$. Probar que si $E \subset A$ tiene medida cero (respectivamente, contenido cero), entonces $f(E)$ también tiene medida cero (resp., contenido cero).

2.24 Sean U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1. Probar que si $E \subset U$ tiene medida cero, entonces $f(E)$ también tiene medida cero.
Indicación: Expresar U como unión de compactos, y utilizar el hecho de que f es Lipschitz sobre cada uno de estos compactos y el ejercicio anterior para obtener el resultado.

2.25 Demostrar que toda recta en $\mathbb{R}^2$ y todo plano en $\mathbb{R}^3$ tienen medida cero.

2.26 Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable en $[a, b]$. Demostrar que su gráfica $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in [a, b]\}$ tiene contenido cero en $\mathbb{R}^2$. Después, generalizar este resultado para funciones integrables sobre rectángulos de $\mathbb{R}^n$.

2.27 Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Probar que su gráfica $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}^n\}$ tiene medida cero en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$. *Indicación:* Utilizar el ejercicio anterior.

2.28 Sea $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva de clase C^1. Probar que la imagen de γ tiene contenido cero.

2.29 Sean U un abierto de $\mathbb{R}^m$, y $g : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación de clase C^1, con $m < n$. Probar que entonces $g(U)$ tiene siempre medida cero en $\mathbb{R}^n$.
Indicación: considerar $\mathbb{R}^m$ como subespacio de $\mathbb{R}^n$, y aplicar apropiadamente el problema 2.24.

Capítulo 3

El teorema de Lebesgue

En este capítulo estudiaremos un teorema que nos dice exactamente qué funciones son integrables y cuán grande puede ser la frontera de un conjunto para que éste tenga volumen. La respuesta de Lebesgue a estas dos preguntas fundamentales es la siguiente: una función es integrable si y sólo si el conjunto de sus puntos de discontinuidad tiene medida cero y, como consecuencia de esto, un conjunto tiene volumen si y sólo si su frontera tiene medida cero. Se trata de uno de los resultados fundamentales de la teoría de integración. Con este teorema, y al enfatizar la importancia del concepto de medida cero, H. Lebesgue abrió el camino para el desarrollo de la teoría de la medida y de una teoría de integración más flexible que la de Riemann. La teoría de la medida y la integral de Lebesgue son objeto de estudio en cursos más avanzados.

Teorema 3.1 *Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ acotado y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Extiéndase f a todo $\mathbb{R}^n$ poniendo $f(x) = 0$ para $x \in X \setminus A$. Entonces, f es integrable (Riemann) si y sólo si los puntos en los cuales la extensión f es discontinua forman un conjunto de medida cero.*

Antes de demostrar el teorema de Lebesgue deduciremos de este resultado algunos corolarios importantes.

Corolario 3.2 *Un subconjunto acotado A de $\mathbb{R}^n$ tiene volumen si y sólo si su frontera ∂A tiene medida cero.*

Demostración: Por la definición de conjunto con volumen y gracias al teorema anterior, basta demostrar que el conjunto de discontinuidades de la función característica 1_A,

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A, \end{cases}$$

es precisamente la frontera de A, que denotamos ∂A. Veámoslo. Por un lado, si $x \in \partial A$, entonces cualquier entorno de x corta tanto a A como a $\mathbb{R}^n \setminus A$. Esto implica decir que en cualquier entorno de x hay puntos y tales que $1_A(y) - 1_A(x) = 1$, luego 1_A no puede ser continua en x. Por otra parte, si $x \notin \partial A$ entonces existe todo un entorno de x que o bien queda dentro de A o bien está contenido en $\mathbb{R}^n \setminus A$; en cualquiera de los casos resulta que 1_A es constante en todo un entorno de x y por tanto es obviamente continua en x. Por consiguiente, $\partial A = \{x \in \mathbb{R}^n : 1_A \,\text{discontinua en}\, x\}$. $\Box$

Corolario 3.3 *Sea A un subconjunto acotado y con volumen de $\mathbb{R}^n$. Cualquier función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ cuyos puntos de discontinuidad formen un conjunto de medida cero es integrable.*

Demostración: Sea g la extensión de f que coincide con ella sobre A y que vale cero fuera de A. Si denotamos por $\mathrm{Disc}(f)$ el conjunto de los puntos de discontinuidad de f en A, y por $\mathrm{Disc}(g)$ el conjunto de discontinuidades de la extensión g en $\mathbb{R}^n$, es claro (por la misma razón que en la demostración del corolario anterior) que

$$\mathrm{Disc}(g) \subseteq \mathrm{Disc}(f) \cup \partial A,$$

y como tanto $\mathrm{Disc}(f)$ (por hipótesis) como ∂A (por tener A volumen y gracias al corolario anterior) tienen medida cero, su unión tiene medida cero, y por tanto el subconjunto de esta unión $\mathrm{Disc}(g)$ tiene medida cero. $\Box$

Observación 3.4 Nótese que en el teorema 3.1 la integrabilidad de f depende de su extensión. Por ejemplo, si A es el conjunto de los racionales del intervalo $[0, 1]$ y $f = 1$, entonces f restringida a A es continua, pero su extensión canónica no es continua en ningún punto y en particular no es integrable, luego f no es integrable sobre A según la definición que se ha dado. Por otra parte, en el enunciado del corolario 3.3 *no* es necesario extender f fuera de A porque, como se ve en la prueba, el conjunto de puntos de discontinuidad de su extensión canónica no se va a incrementar significativamente, a lo sumo se añadiría la frontera de A, que es un subconjunto de medida cero ya que A tiene volumen.

Una consecuencia inmediata del corolario anterior es lo siguiente:

Corolario 3.5 *Sea A un subconjunto acotado y con volumen de $\mathbb{R}^n$. Cualquier función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ cuyos puntos de discontinuidad formen un conjunto finito o numerable es integrable.*

La mayoría de las funciones que se manejan en la práctica son continuas o continuas a trozos (es decir, continuas salvo en un conjuto finito de puntos), y por tanto, según el corolario anterior, son también integrables.

Antes de pasar a la demostración del teorema de Lebesgue, y para concluir con la exposición de los resultados principales de este capítulo, probaremos otros dos teoremas que complementan los anteriores.

Teorema 3.6 *Sea A un subconjunto acotado y de medida cero de $\mathbb{R}^n$, y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable. Entonces*

$$\int_A f = 0.$$

Demostración: Sea S un rectángulo que contenga a A, y extendamos f a S poniendo $f(x) = 0$ para $x \in S \setminus A$. Sea P una partición cualquiera de S en subrectángulos $S_1, ..., S_N$, y sea M una cota superior de f en A. Entonces se tiene

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{N} m(f, S_i)v(S_i) \leq M \sum_{i=1}^{N} m(1_A, S_i)v(S_i).$$

Supongamos que $m(1_A, S_i) \neq 0$ para algún i; entonces $S_i \subseteq A$; pero esto es imposible, pues ningún conjunto de medida cero puede contener un rectángulo (ver ejercicio 2.16). Por tanto, $m(1_A, S_i) = 0$ para todo i, y en particular $\sum_{i=1}^{N} m(1_A, S_i)v(S_i) = 0$, lo que según la desigualdad anterior implica que $L(f, P) \leq 0$.

Por otra parte, como $M(f, S_i) = -m(-f, S_i)$, se tiene que

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{N} M(f, S_i)v(S_i) = -\sum_{i=1}^{N} m(-f, S_i)v(S_i) = -L(-f, P);$$

pero por la misma razón que antes, $L(-f, P) \leq 0$, luego $-L(-f, P) = U(f, P) \geq 0$.

Así, hemos probado que, para toda partición P de S,

$$L(f, P) \leq 0 \leq U(f, P)$$

y, como f es integrable, esto significa que $\int_A f = 0$. $\Box$

Teorema 3.7 *Si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable tal que $f(x) \geq 0$ para todo x, y además $\int_A f(x)dx = 0$, entonces el conjunto*

$$\{x \in A : f(x) \neq 0\}$$

tiene medida cero.

Demostración: Para cada $m \in \mathbb{N}$, probaremos que el conjunto $A_m = \{x \in A : f(x) > 1/m\}$ tiene contenido cero. En efecto, sea $\varepsilon > 0$. Sea S un rectángulo que contenga a A, y extendamos f a S poniendo $f(x) = 0$ para $x \in S \setminus A$ como de costumbre. Sea P una partición de S tal que $U(f, P) < \varepsilon/m$; existe una tal partición porque $\int_A f = 0$. Sean $S_1, ..., S_K$ los subrectángulos de la partición P cuyas intersecciones con A_m son no vacías; entonces se tiene $mM(f, S_i) > 1$ para $i = 1, ..., K$, y por tanto

$$\sum_{i=1}^{K} v(S_i) \leq \sum_{i=1}^{K} mM(f, S_i)v(S_i) \leq mU(f, P) < \varepsilon.$$

Es decir, los rectángulos $S_1, ..., S_K$ forman un recubrimiento de A_m tal que $\sum_{i=1}^{K} v(S_i) < \varepsilon$. Esto prueba que A_m tiene contenido cero. En particular, A_m tiene medida cero, para todo $m \in \mathbb{N}$.

Ahora bien, como

$$\{x \in A : f(x) \neq 0\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m,$$

y puesto que la unión numerable de conjuntos de medida cero tiene medida cero, se deduce que este conjunto tiene medida cero. □

El resto de este capítulo lo dedicaremos a la demostración del teorema de Lebesgue 3.1. Sea B un rectángulo que contenga a A. Debemos probar que la función f es integrable en A si y sólo si el conjunto de discontinuidades de la función extendida g (que coincide con f sobre A y es cero fuera de A) tiene medida cero.

Para probar esto, es útil tener una medida de *cuán mala* es una discontinuidad determinada. A tal fin, definimos la *oscilación de una función en un punto*.

Definición 3.8 Sea $h : W \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida sobre un abierto W de $\mathbb{R}^n$. Se define la oscilación de h en un punto $x_0 \in W$ como

$$O(h, x_0) = \inf\{\sup\{|h(x) - h(y)| : x, y \in U\} \mid U \text{ es un entorno de } x_0\}.$$

Alternativamente, si esta definición resulta algo indigesta, para cada entorno U de x podemos definir la oscilación de h en U como

$$O(h,U) = \sup\{|h(x) - h(y)| : x, y \in U\},$$

y la oscilación de h en el punto x_0 sería entonces

$$O(h,x_0) = \text{ínf}\{O(h,U) \mid U \text{ es un entorno de } x_0\}.$$

Claramente se tiene que $O(h,x_0) \geq 0$. Cuanto más grande sea este número, peor será el comportamiento de la función h en las proximidades de x_0. Como cabe esperar, una función es continua en un punto si y sólo si su oscilación en ese punto es cero.

Lema 3.9 *Sea $h : W \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida sobre un abierto W de $\mathbb{R}^n$, y sea $x_0 \in W$. Entonces, h es continua en x_0 si y sólo si $O(h,x_0) = 0$.*

La demostración de este lema es sencilla y se deja como ejercicio. Ahora ya podemos comenzar la demostración del teorema de Lebesgue.

Paso 1. Supongamos que el conjunto de discontinuidades de g tiene medida cero, y veamos que g es integrable.

Fijemos un $\varepsilon > 0$ arbitrario. Sea M tal que $|g(x)| \leq M$ para todo $x \in B$. Denotemos por D el conjunto de los puntos de discontinuidad de g. Sea $D_\varepsilon = \{x \in B : O(g,x) \geq \varepsilon\}$. Por el lema anterior, se tiene que $D_\varepsilon \subseteq D$. Es fácil ver que D_ε es compacto (ejercicio 3.13).

Como D_ε tiene medida cero (por ser un subconjunto de D, que tiene medida cero), existe una colección numerable de rectángulos $B_1, B_2, ...$ tales que $D_\varepsilon \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \text{int}(B_i)$ y $\sum_{i=1}^{\infty} v(B_i) < \varepsilon$. Pero D_ε es compacto, luego existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $D_\varepsilon \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} \text{int}(B_i)$ y, por supuesto, $\sum_{i=1}^{N} v(B_i) < \varepsilon$.

Ahora, sea P_0 una partición de B tal que cada subrectángulo de P_0 o bien está contenido en alguno de los B_i o bien su interior es disjunto con los B_i. Podemos dividir los subrectángulos de P_0 en dos clases C_1 y C_2 (no necesariamente disjuntas):

$$C_1 = \{Q \in P_0 \mid \exists i \in \{1,...,N\} : Q \subseteq B_i\}, \text{ y } \ C_2 = \{Q \in P_0 \mid Q \cap D_\varepsilon = \emptyset\},$$

de modo que $P_0 = C_1 \cup C_2$.

Sea S un subrectángulo de C_2; entonces la oscilación de g en cada punto de S es menor que ε. Por tanto, para cada $x \in S$, existe un entorno abierto U_x de x tal que

$$M_U(g) - m_U(g) = \sup\{|g(z) - g(y)| : y, z \in U\} < \varepsilon,$$

donde $M_U(g) = \sup\{g(z) : z \in U\}$ y $m_U(g) = \text{ínf}\{g(z) : z \in U\}$. Ahora, como S es compacto y $S \subseteq \bigcup_{x\in S} U_x$, existe una cantidad finita de puntos $x_1^s, ..., x_{K_s}^s \in S$ tal que

$$S \subseteq \bigcup_{i=1}^{K_s} U_i^s,$$

donde se denota $U_i^s = U_{x_i^s}$. Escojamos una partición P_S de S tal que cada subrectángulo de P_S está contenido en alguno de los U_i^s (esto es siempre posible; ver el ejercicio 3.15).

Sea ahora P una partición de B tal que cada subrectángulo Q de P o bien está contenido en alguno de los subrectángulos de las particiones P_s anteriores o bien su interior es disjunto con los subrectángulos de las P_s y, en este caso, Q está contenido en alguno de los rectángulos que son miembros de la clase C_1. Una tal partición puede definirse utilizando todos los lados de todos los miembros de C_1 y de las particiones P_s. Podemos dividir esta partición P en dos clases (ahora disjuntas, aunque esto no tenga especial relevancia), C_2' y C_1', según se dé una u otra de las dos posibilidades, es decir,

$$C_2' = \{Q \in P \mid \exists S \in C_2 \, \exists R \in P_s : Q \subseteq R\},$$

y

$$C_1' = \{Q \in P \mid \forall S \in C_2 \, \forall R \in S : \text{int}(Q) \cap R = \emptyset, \text{ y } \exists T \in C_1 : Q \subseteq T\},$$

de forma que $P = C_1' \cup C_2'$. Para esta partición P tenemos que

$$\begin{aligned}
&U(g,P) - L(g,P) \leq \\
&\sum_{Q\in C_2'} (M_Q(g) - m_Q(g))v(Q) + \sum_{Q\in C_1'} (M_Q(g) - m_Q(g))v(Q) \leq \\
&\varepsilon v(B) + \sum_{Q\in C_1'} 2Mv(Q) \leq \varepsilon v(B) + 2M\varepsilon,
\end{aligned}$$

ya que $\sum_{Q\in C_1'} v(Q) \leq \sum_{i=1}^{N} v(B_i) < \varepsilon$. Como $v(B)$ y M no dependen de ε, y ε es arbitrario, utilizando el criterio de integrabilidad de Riemann se concluye que g (y por tanto f) es integrable.

Paso 2. Ahora supongamos que g es integrable, y veremos que el conjunto D de los puntos de discontinuidad de g tiene medida cero.

Es claro que $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_{1/n}$, donde $D_{1/n} = \{x \in B : O(g,x) \geq 1/n\}$. Puesto que la unión numerable de conjuntos de medida cero tiene medida cero, bastará probar que cada uno de estos conjuntos tiene medida cero.

Veámoslo. Fijemos $n \in \mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$, como g es integrable, existe una partición P de B tal que

$$U(g,P) - L(g,P) = \sum_{S \in P} (M_S(g) - m_S(g))v(S) < \frac{\varepsilon}{2n}.$$

Ahora podemos escribir $D_{1/n} = E_1 \cup E_2$, donde

$$E_1 = \{x \in D_{1/n} \mid \exists S \in P : x \in \partial S\},$$

y

$$E_2 = \{x \in D_{1/n} \mid \exists S \in P : x \in \operatorname{int}(S)\};$$

aquí ∂S e $\operatorname{int}(S)$ denotan la frontera y el interior del rectángulo S, respectivamente. Es claro que la frontera de un rectángulo tiene volumen cero (ejercicio 3.16), y como E_1 está contenido en una unión finita de fronteras de rectángulos, se deduce que E_1 tiene volumen cero; por tanto existe una colección de rectángulos C_1 tales que $E_1 \subseteq \bigcup_{R \in C_1} R$ y $\sum_{R \in C_1} v(R) < \varepsilon/2$. Por otra parte, sea C_2 el conjunto de los subrectángulos de P que tienen en su interior algún elemento de $D_{1/n}$ (de E_2 para ser más precisos). Entonces, si $S \in C_2$, existe z_s en el interior de S tal que $z_s \in D_{1/n}$, y por tanto,

$$M_S(g) - m_S(g) = O(g,S) \geq O(g, z_s) \geq \frac{1}{n},$$

de donde deducimos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{S \in C_2} v(S) &\leq \sum_{S \in C_2} (M_S(g) - m_S(g))v(S) \\ &\leq \sum_{S \in P} (M_S(g) - m_S(g))v(S) < \frac{\varepsilon}{2n}, \end{aligned}$$

y así $\sum_{S \in C_2} v(S) < \varepsilon/2$. Entonces, $C = C_1 \cup C_2$ es una colección finita de rectángulos que recubre el conjunto $D_{1/n}$, con

$$\sum_{R \in C} v(R) \leq \sum_{R \in C_1} v(R) + \sum_{R \in C_2} v(R) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esto prueba que $D_{1/n}$ tiene volumen cero.

Problemas

3.10 Sea $f(x) = \sin(1/x)$ si $x \neq 0$, y $f(0) = 0$. Probar que $O(f, 0) = 2$.

3.11 Sea $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$, y $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Probar que $O(f, x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

3.12 Sea $h : W \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida sobre un abierto W de $\mathbb{R}^n$, y sea $O(h, x)$ la oscilación de h en x. Probar que h es continua en x_0 si y sólo si $O(h, x_0) = 0$.

3.13 Sea $D_\varepsilon = \{x \in B : O(g, x) \geq \varepsilon\}$, donde g es una función acotada definida en un rectángulo B. Demostrar que D_ε es compacto para cada $\varepsilon > 0$.

3.14 Sea g una función acotada definida en un rectángulo abierto B, y para cada abierto U contenido en B definamos $M_U(g) = \sup\{g(z) : z \in U\}$ y $m_U(g) = \text{ínf}\{g(z) : z \in U\}$. Probar que

$$M_U(g) - m_U(g) = \sup\{|g(z) - g(y)| : y, z \in U\} := O(g, U),$$

y por tanto

$$O(g, x) = \text{ínf}\{M_U(g) - m_U(g) \mid U \, \text{entorno abierto de } x\}.$$

3.15 Sea S un rectángulo cerrado, y $G_1, ..., G_k$ un recubrimiento finito de S por conjuntos abiertos. Probar que existe una partición P de S tal que cada subrectángulo de P está contenido en alguno de los abiertos G_i. *Indicación:* para cada $x \in S$ existen $i \in \{1, ..., k\}$ y $\delta_x > 0$ tales que $B_\infty(x, \delta_x) \subseteq G_i$; entonces $S \subseteq \bigcup_{x \in S} B_\infty(x, \delta_x)$. Usar ahora que S es compacto, y recordar que las bolas $B_\infty(x, r)$ tienen forma de cubos.

3.16 Demostrar que la frontera de un rectángulo tiene siempre volumen cero.

3.17 Demostrar que si A y B tienen volumen, entonces $A \cup B$, $A \cap B$ y $A \setminus B$ también tienen volumen.

3.18 Sea $f(x, y) = 1$ para $x \neq 0$, y $f(0, y) = 0$ para todo y. Probar que f es integrable en cualquier rectángulo de $\mathbb{R}^2$, y hallar estas integrales.

3.19 Sea $f(x) = \text{sen}(1/x)$ para $x > 0$, y $f(0) = 0$. +Es f integrable en $[0, 1]$?

3.20 Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + \operatorname{sen}\frac{1}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ x^2 & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

Probar que f es integrable en el círculo unidad abierto, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

3.21 Decidir si las functiones que siguen son integrables en los conjuntos indicados:

(a) $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} y & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \\ x & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$

con $A = \{(x,y) : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} \leq 1\}$.

(b) $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x^2 + y^2 < 1/2 \quad \text{o bien} \quad y = 0; \\ x \sin(\frac{1}{y}) & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

con $B = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(c) $h : C \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y; \\ x & \text{si } y < x, \end{cases}$$

con $C = \{(x,y) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.

3.22 Sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$ si x es irracional, y $f(x) = 1/m$ cuando x es racional y está expresado en la forma $x = n/m$ con n y m primos entre sí. Probar que f es continua en x si y sólo si x es irracional. Concluir que f, pese a ser discontinua en un subconjunto denso de $[0,1]$, es integrable en $[0,1]$.

3.23 Para cada $B \subseteq \mathbb{R}^n$ definamos

$$\lambda(B) = \text{ínf}\{\sum_{i=1}^{\infty} v(S_i) \mid (S_i) \text{ recubrimiento de } B \text{ por rectángulos abiertos}\}.$$

Probar que si B tiene volumen entonces $\lambda(B) = v(B)$.
Observación: A λ se le llama medida exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.

3.24 Si (B_i) es una sucesión de conjuntos con volumen que son disjuntos dos a dos y $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ tiene volumen, entonces

$$v(B) = \sum_{i=1}^{\infty} v(B_i).$$

Indicación: Usar el problema anterior.

3.25 Sea $r_1, r_2, ...$ una enumeración de los racionales de $[0, 1]$, y sea

$$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} (r_k - \frac{1}{5^k}, r_k + \frac{1}{5^k})$$

Probar que U es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$ que *no* tiene volumen. *Indicación:* usar el problema 3.23.

3.26 Sea A un subconjunto abierto y con volumen de $\mathbb{R}^n$, y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, tal que $f(x) \geq 0$ para todo x. Supongamos que existe $x_0 \in A$ tal que $f(x_0) > 0$. Demostrar que entonces $\int_A f > 0$.

3.27 Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables. Supongamos que $\int_A |f - g| = 0$. Probar que entonces $f(x) = g(x)$ para casi todo x, es decir, salvo en quizás en un subconjunto de A de medida cero.

3.28 Sean A un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^n$, y (f_k) una sucesión de funciones que converge uniformemente en A a otra función f. Sea S un rectángulo que contenga a A, y extendamos cada una de estas funciones a S haciéndolas valer cero en $S \setminus A$, como de costumbre. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea D_k el conjunto de los puntos de discontinuidad de la función f_k (extendida). Demostrar que el conjunto D de los puntos de discontinuidad de f está contenido en $\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$. *Indicación:* Recordar que el límite uniforme de una sucesión de funciones continuas en un conjunto es continuo en ese conjunto.

3.29 Utilizando el problema anterior, probar que si A es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^n$, y (f_k) una sucesión de funciones integrables que converge uniformemente en A a otra función f, entonces f es también integrable en A.

3.30 En las hipótesis del problema anterior, probar que además se tiene que

$$\lim_{k \to \infty} \int_A f_k = \int_A f.$$

Indicación: La prueba usual que se da de este hecho para funciones de una variable se generaliza sin dificultad al caso de funciones de varias variables.

Resumen de las propiedades de los conjuntos de medida cero y de los de contenido cero.

Definición Se dice que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ tiene medida cero si para cada $\varepsilon > 0$ existe una coleccion contable (numerable o finita) de rectángulos $(Q_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tales que $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$, y $\sum_{j=1}^{\infty} v(Q_j) \leq \varepsilon$.

Se dice que A tiene contenido cero (o volumen cero) si para cada $\varepsilon > 0$ existe una coleccion *finita* de rectángulos $Q_1, ..., Q_k$ tales que $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} Q_j$, y $\sum_{j=1}^{k} v(Q_j) \leq \varepsilon$. Esto equivale a decir que A tiene volumen (i.e. 1_A es integrable) y $v(A) = 0$.

En estas definiciones pueden sustituirse los rectángulos cerrados por rectángulos cerrados, o por cubos (abiertos o cerrados), a discreción del usuario.

Propiedades

1. Si A tiene contenido cero entonces también tiene medida cero. El recíproco no es cierto en general. Sin embargo:

2. Si K es compacto entonces K tiene medida cero si y sólo si K tiene contenido cero. También:

3. Si A tiene volumen entonces A tiene medida cero si y sólo si A tiene contenido cero.

4. Si A tiene medida cero (resp. contenido cero) y $B \subseteq A$ entonces B también tiene medida cero (resp. contenido cero).

5. La unión numerable de conjuntos de medida cero tiene medida cero.

6. La unión finita de conjuntos de contenido cero tiene contenido cero.

7. Si A tiene contenido cero entonces su adherencia $\overline{A}$ también tiene contenido cero. La propiedad análoga para medida cero no es cierta ($\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$).

8. Si A tiene volumen y $v(A) > 0$ entonces A tiene interior no vacío. O lo que es lo mismo: si A tiene volumen e interior vacío entonces $v(A) = 0$.

9. Si A tiene medida cero entonces A tiene interior vacío. El recíproco no es cierto en general: existen compactos con interior vacío que no tienen medida cero (y en particular tampoco tienen volumen).

10. Existen abiertos que no tienen volumen.

11. Existen conjuntos no numerables que tienen medida cero y contenido cero (conjunto de Cantor).

12. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función Lipschitziana. Entonces, si $E \subseteq A$ tiene medida cero (resp. contenido cero) en $\mathbb{R}^n$, su imagen $f(E)$ también tiene medida cero (resp. contenido cero) en $\mathbb{R}^n$.

    Recuérdese que f es Lipschitziana en A si existe $M > 0$ tal que $\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|$ para todos $x, y \in A$. Cuando f es diferenciable y A es *convexo* esto equivale a decir que f tiene derivada acotada en A.

13. Sean U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1. Si $E \subset U$ tiene medida cero, entonces $f(E)$ también tiene medida cero.

    Es importante aquí que la dimensión del dominio de f sea la misma que la de su imagen. Por ejemplo, existen funciones $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 que no transforman conjuntos de medida cero en conjuntos de medida cero (considérese $f(x, y) = x$; $E = \mathbb{R} \times \{0\}$ tiene medida cero en $\mathbb{R}^2$, pero $f(E) = \mathbb{R}$ no tiene medida cero en $\mathbb{R}$). Cuando la dimensión del espacio de llegada es mayor que la del de salida, ocurre lo siguiente:

14. Sean U un abierto de $\mathbb{R}^m$, y $g : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación de clase C^1, con $m < n$. Entonces $g(U)$ tiene siempre medida cero en $\mathbb{R}^n$. En particular:

15. Si $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva de clase C^1 entonces su traza tiene medida cero y contenido cero en $\mathbb{R}^2$. Esto no es cierto si sólo se pide que f sea continua (curvas de Peano...)

16. La gráfica de una función integrable $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene medida cero en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$. En particular, si una función $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua entonces su gráfica tiene medida cero en $\mathbb{R}^{n+1}$.

17. Una función es integrable si y sólo si el conjunto de puntos de discontinuidad de su extensión canónica a un rectángulo tiene medida cero (teorema de Lebesgue).

18. Un conjunto acotado $A \subseteq \mathbb{R}^n$ tiene volumen si y sólo si su frontera ∂A tiene medida cero en $\mathbb{R}^n$.

19. Si f es integrable y A tiene medida cero, entonces $\int_A f = 0$.

20. Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables. Supongamos que $\int_A |f - g| = 0$. Entonces $f(x) = g(x)$ para casi todo x, es decir, salvo quizás en un subconjunto de medida cero de A.

Capítulo 4

Propiedades de la integral

En este capítulo estudiaremos las propiedades elementales de la integral. En su mayoría resultarán familiares, pues las propiedades de la integral en $\mathbb{R}$ se extienden sin dificultad al caso de funciones de varias variables.

Teorema 4.1 *Sean A un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^n$, $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables, $c \in \mathbb{R}$. Entonces:*

(i) $f + g$ *es integrable, y* $\int_A (f+g) = \int_A f + \int_A g$.

(ii) cf *es integrable, y* $\int_A cf = c \int_A f$.

(iii) $|f|$ *es integrable, y* $|\int_A f| \leq \int_A |f|$.

(iv) Si $f \leq g$, *entonces* $\int_A f \leq \int_A g$.

(v) Si A *tiene volumen, y* $|f| \leq M$, *entonces* $|\int_A f| \leq Mv(A)$.

(vi) Si f *es continua,* A *tiene volumen y es compacto y conexo, entonces existe* $x_0 \in A$ *tal que* $\int_A f(x)dx = f(x_0)v(A)$.

(vii) Sean A, B *conjuntos acotados de* $\mathbb{R}^n$, *y sea* $f : A \cup B \longrightarrow \mathbb{R}$. *Supongamos que y que las restricciones de* f *a* A, B *y* $A \cap B$ *(que denotamos por* $f_{|A}$, *etc) son integrables. Entonces* f *es integrable, y* $\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f - \int_{A\cap B} f$.

(viii) Sean A, B *conjuntos acotados de* $\mathbb{R}^n$, *y sea* $f : A \cup B \longrightarrow \mathbb{R}$. *Supongamos que* f *es integrable en* $A \cup B$, *y que tanto* A *como* B *tienen volumen. Entonces las restricciones de* f *a* A, B *y* $A \cap B$ *son integrables, y* $\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f - \int_{A\cap B} f$.

En particular, en cualquiera de los casos (vii) *u* $(viii)$ *anteriores, si* $A \cap B$ *tiene medida cero, entonces* $\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f$.

Las propiedades (i) y (ii) nos dicen que el conjunto de las funciones integrables sobre un conjunto dado es un espacio vectorial, y que la integral, definida sobre este espacio vectorial (de dimensión infinita), es un operador lineal. Por otra parte, la propiedad (vi) se conoce como *teorema del valor medio integral*.

Demostración:
(i) Sea S un rectángulo que contenga a A, y extendamos f y g a S haciéndolas cero fuera de A, como es habitual. Sea $\varepsilon > 0$. Por el teorema de Darboux 1.10, existe $\delta_1 > 0$ tal que, si P_1 es cualquier partición de S en subrectángulos $S_1, ..., S_N$ cuyos lados tienen longitud menor o igual que δ_1, y $x_1 \in S_1$, ..., $x_N \in S_N$, entonces

$$|\sum_{i=1}^{N} f(x_i)v(S_i) - \int_A f| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Análogamente, existe $\delta_2 > 0$ tal que, si P_2 es cualquier partición de S en subrectángulos $R_1, ..., R_M$ cuyos lados tienen longitud menor o igual que δ_2, y $z_1 \in R_1$, ..., $z_M \in R_M$, entonces

$$|\sum_{i=1}^{M} f(z_i)v(R_i) - \int_A g| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces, para toda partición de S en subrectángulos $T_1, ..., T_K$ de lados menores que δ, y para cualesquiera $x_1 \in T_1$, ..., $x_K \in T_K$, se tiene que

$$|\sum_{i=1}^{K}(f(x_i) + g(x_i))v(T_i) - \int_A f - \int_A g| \leq$$
$$|\sum_{i=1}^{K} f(x_i)v(T_i) - \int_A f| + |\sum_{i=1}^{K} g(x_i)v(T_i) - \int_A g| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Teniendo en cuenta otra vez el teorema de Darboux otra vez, esto significa que $f + g$ es integrable en A, y $\int_A (f + g) = \int_A f + \int_A g$.

(ii) Podemos suponer $c \neq 0$ (la conclusión es evidente si $c = 0$). Sea $\varepsilon > 0$. Sea S un rectángulo que contenga a A, y extendamos f a S poniendo $f = 0$ fuera de A. Como f es integrable, por el teorema de Darboux existe $\delta > 0$

tal que si P es una partición de S en subrectángulos $S_1, ..., S_N$ de lados menores o iguales que δ, y $x_1 \in S_1, ..., x_N \in S_N$, entonces

$$|\sum_{i=1}^{N} f(x_i)v(S_i) - \int_A f| \leq \frac{\varepsilon}{|c|},$$

lo que implica que

$$|\sum_{i=1}^{N} cf(x_i)v(S_i) - c\int_A f| \leq \varepsilon.$$

Por el teorema de Darboux, esto prueba que cf es integrable en A, y $\int_A cf = c\int_A f$.

(iv) Sea S un rectángulo que contiene a A, y extendamos f y g a S por 0 en $S \setminus A$ como es habitual. Para toda partición P de S, como $f \leq g$ tenemos que

$$L(g-f, P) \geq 0,$$

luego

$$\sup\{L(g-f, P) : P \, \text{partición de} \, S\} \geq 0$$

es decir, $\int_A (g-f) \geq 0$, y aplicando (i) y (ii) se obtiene $\int_A f \leq \int_A g$.

(iii) Como $|f|$ es continua en todos los puntos que f lo es, tenemos que $\text{Disc}(|f|) \subseteq \text{Disc}(f)$, y como este último conjunto tiene medida cero (por ser f integrable y por el teorema de Lebesgue), resulta que el conjunto de discontinuidades de $|f|$, $\text{Disc}(|f|)$, tiene también medida cero, luego $|f|$ es integrable sobre A. Además, por la propiedad (iv), como $-|f| \leq f \leq |f|$, tenemos que

$$-\int_A |f| \leq \int_A f \leq \int_A |f|,$$

y por tanto $|\int_A f| \leq \int_A |f|$.

(v) Si $|f| \leq M$ sobre A, entonces la extensión canónica de $|f|$ a un rectángulo S que contenga a A seguirá verificando $|f| \leq M1_A$, luego, por (ii) y (iv), se tiene

$$\int_A |f| \leq \int_A M1_A = M\int_A 1_A = Mv(A),$$

y entonces, por (iii),

$$|\int_A f| \leq \int_A |f| \leq Mv(A).$$

(vi) Puede suponerse $v(A) \neq 0$ (en otro caso el resultado es consecuencia del teorema 3.6). Sean $m = \text{ínf}\{f(x) : x \in A\}$ y $M = \sup\{f(x) : x \in A\}$. Como A es compacto y f es continua, existen $x_1, x_2 \in A$ tales que $m = f(x_1)$ y $M = f(x_2)$. Sea

$$\lambda = \frac{\int_A f}{v(A)}.$$

Entonces, por la propiedad (iv), $m = f(x_1) \leq \lambda \leq M = f(x_2)$, y como f es continua y A es conexo, existe $x_0 \in A$ tal que $f(x_0) = \lambda$, es decir, $\int_A f = f(x_0)v(A)$.

(vii) Sean $f = f1_{A\cup B}$, $f_1 = f1_A$, $f_2 = f1_B$ y $f_3 = f1_{A\cap B}$ las extensiones canónicas de f, $f_{|A}$, $f_{|B}$ y $f_{|A\cap B}$ a un rectángulo que contenga a $A \cup B$. Es inmediato comprobar que $f = f_1 + f_2 - f_3$, y es obvio por la definición que $\int_{A\cup B} f1_A = \int_A f$, etc. Entonces, por (i) y (ii),

$$\begin{aligned} \int_{A\cup B} f &= \int_{A\cup B} f_1 + \int_{A\cup B} f_2 - \int_{A\cup B} f_3 \\ &= \int_A f + \int_B f - \int_{A\cap B} f. \end{aligned}$$

En el caso en que $A \cap B$ tenga medida cero, el teorema 3.6 nos dice que $\int_{A\cap B} f = 0$, y entonces $\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f$.

(vii) Basta observar que las discontinuidades de las extensiones canónicas a R de las restricciones de f a los conjuntos A, B y $A\cap B$ están contenidas en la unión de las discontinuidades de f con las fronteras de A y B, y por las presentes hipótesis estos tres conjuntos tienen medida cero; esto muestra que dichas restricciones son integrables. La identidad de las integrales se sigue entonces aplicando (vii).

Observación 4.2 Con un poco más de cuidado puede probarse que en la parte (vi) del teorema anterior no hace falta suponer A compacto; ver el ejercicio 4.13.

Problemas

4.3 Sean $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables. Probar que la función producto fg es también integrable en A.

4.4 Sean $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables Probar que las funciones $\max\{f, g\}$ y $\min\{f, g\}$ son también integrables en A.

4.5 Demostrar que si A y B tienen volumen, entonces $A \cup B$, $A \cap B$ y $A \setminus B$ también tienen volumen. *Indicación*: Usar los problemas anteriores y el hecho de que

$$1_{A\cup B} = 1_A + 1_B - 1_A \cdot 1_B,\ 1_{A\cap B} = 1_A \cdot 1_B \ \text{ y } \ 1_{A\setminus B} = 1_A(1 - 1_B).$$

4.6 Sean $A_1, A_2, ...$ una familia numerable de conjuntos con volumen. +Es cierto que su unión $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ también tiene volumen?.

4.7 Sea f una función integrable sobre cualquier intervalo acotado de $\mathbb{R}$. Definamos $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$ cuando $a \geq b$. Probar que, para cualesquiera $a, b, c \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$$

4.8 Sean A y B conjuntos con volumen tales que $A \cap B$ tiene volumen cero. Probar que

$$v(A \cup B) = v(A) + v(B).$$

4.9 Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables. Supongamos que $v(A) > 0$ y que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in A$. Demostrar que $\int_A f < \int_A g$. *Indicación:* Utilizar el teorema 3.7.

4.10 Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables. Supongamos que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A \setminus C$, donde C es un subconjunto de A que tiene medida cero. Probar que entonces $\int_A f = \int_A g$.

4.11 Sean $f(x, y) = e^{\sin(x+y)}$, $D = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$. Probar que

$$\frac{1}{e} \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_D f(x, y)dxdy \leq e.$$

4.12 Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua definida sobre un conjunto abierto A; para cada $\varepsilon > 0$ sea B_ε la bola cerrada de radio ε centrada en un punto $x_0 \in A$. Probar que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{v(B_\varepsilon)} \int_{B_\varepsilon} f(x)dx = f(x_0).$$

4.13 Probar que en el teorema del valor medio integral (teorema 4.1(vi)) no hace falta suponer que A sea compacto. *Indicación:* Sean $m = \text{ínf}\{f(x) : x \in A\}$, $M = \sup\{f(x) : x \in A\}$, $\lambda = (\int_A f)/v(A)$. Se tiene $m \leq \lambda \leq M$, pero en general no existirán $x_1, x_2 \in A$ tales que $m = f(x_1)$ y $M = f(x_2)$, y hay que considerar los casos $\lambda = M$, $\lambda = m$, y $m < \lambda < M$ separadamente. Para el caso $m < \lambda < M$ un razonamiento parecido al de la demostración de 4.1(vi) sirve. Para los dos primeros casos, puede usarse el teorema 3.7.

4.14 Si $A \subseteq A_1 \cup ... \cup A_N$, donde todos los conjuntos tienen volumen, probar que $v(A) \leq \sum_{i=1}^{N} v(A_i)$.

4.15 Probar que si $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, donde A es un conjunto abierto con volumen, y es $\int_B f = 0$ para cada $B \subseteq A$ con volumen, entonces $f = 0$.

4.16 Sea $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable, $f \geq 0$. Si $A \subseteq B$ y f es integrable en A, entonces $\int_A f \leq \int_B f$. +Es esto cierto si no se supone $f \geq 0$?

4.17 Sean $f, g : S \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables definidas sobre un rectángulo de $\mathbb{R}^n$. Sea D un subconjunto denso de S, y supongamos que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in D$. Probar que $\int_S f \leq \int_S g$.

4.18 Deducir del problema anterior que si $f, g : S \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones integrables definidas sobre un rectángulo de $\mathbb{R}^n$ y D es un subconjunto denso de S, de modo que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in D$, entonces $\int_S f = \int_S g$.

Capítulo 5

El teorema de Fubini

Hasta ahora hemos caracterizado las funciones que son integrables y hemos estudiado las propiedades básicas de la integral, pero en realidad no sabemos cómo calcular las integrales incluso de las funciones más simples en los recintos menos complicados. El teorema de Fubini, junto con el teorema del cambio de variable, que estudiaremos más adelante, es una de las herramientas fundamentales que nos permitirá hallar el valor de una integral múltiple (es decir, de una función de varias variables), al reducirlo a la integración iterada de unas cuantas funciones de una sola variable.

Comenzaremos por dar la versión del teorema de Fubini en el plano $\mathbb{R}^2$, que luego se extenderá sin dificultad al caso general.

Teorema 5.1 *Sea $A = [a, b] \times [c, d]$ un rectángulo de $\mathbb{R}^2$, y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable, tal que las funciones $f_x : [c, d] \longrightarrow$ definidas por $f_x(y) = f(x, y)$ son integrables en $[c, d]$, para todo $x \in [a, b]$. Entonces, la función $x \mapsto \int_c^d f(x, y)dy$ es integrable en $[a, b]$, y*

$$\int_A f = \int_a^b \big(\int_c^d f_x(y)dy \big) dx,$$

o, con una notación más práctica,

$$\int_A f = \int_a^b \big(\int_c^d f(x, y)dy \big) dx.$$

Análogamente, si se supone que $\int_a^b f(x, y)dx$ existe para cada $y \in [c, d]$, se obtiene que

$$\int_A f = \int_c^d \big(\int_a^b f(x, y)dx \big) dy.$$

Observación 5.2 Si f es continua entonces las funciones f, f_x y f_y (con $x \in [a,b]$, $y \in [c,d]$) son todas integrables, y entonces se obtiene que

$$\int_A f = \int_a^b \big(\int_c^d f(x,y)dy\big)dx = \int_c^d \big(\int_a^b f(x,y)dx\big)dy.$$

Este resultado se puede aplicar a recintos (acotados) A más generales que rectángulos, extendiendo la función a un rectángulo que contenga a A (haciéndola valer cero fuera de A, como es habitual) y usando entonces el teorema de Fubini. El siguiente corolario nos muestra una manera de hacer esto; el resultado puede utilizarse eficientemente para descomponer una región complicada en regiones más pequeñas a cada una de las cuales se aplica entonces el corolario.

Corolario 5.3 *Sean $\varphi, \psi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $\varphi(x) \leq \psi(x)$ para todo $x \in [a,b]$, y sea $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$. Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua (o continua salvo en una cantidad finita de puntos). Entonces*

$$\int_A f = \int_a^b \big(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\big)dx.$$

Antes de dar la demostración del teorema de Fubini y su corolario enunciaremos el teorema en su forma más general.

Teorema 5.4 *Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y $B \subset \mathbb{R}^m$ rectángulos, y $f : A \times B \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable tal que las funciones $f_x : B \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f_x(y) = f(x,y)$ son integrables sobre B para todo $x \in A$. Entonces, la función $x \mapsto \int_B f(x,y)dy$ es integrable en A, y*

$$\int_{A\times B} f = \int_A \big(\int_B f(x,y)dy\big)dx.$$

Análogamente, si se supone que $\int_A f(x,y)dx$ existe para cada $y \in B$, entonces

$$\int_{A\times B} f = \int_B \big(\int_A f(x,y)dx\big)dy.$$

De igual manera que el corolario 5.3 puede demostrarse, a partir de la versión general del teorema de Fubini, el siguiente resultado, muy útil a la hora de evaluar integrales en $\mathbb{R}^{n+1}$.

Corolario 5.5 *Sea A un conjunto con volumen de $\mathbb{R}^n$, sean $\varphi, \psi : A \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $\varphi(x) \leq \psi(x)$ para todo $x \in A$, y sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in A, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$. Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua (o continua salvo en una cantidad finita de puntos). Entonces*

$$\int_D f = \int_A \Big(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \Big) dx.$$

Demostración del teorema 5.1.

Sea $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$g(x) = \int_c^d f(x, y) dy.$$

Tenemos que ver que g es integrable sobre $[a, b]$, y que

$$\int_A f = \int_a^b g(x) dx.$$

Sean $P_{[a,b]}$ una partición cualquiera de $[a, b]$ en subintervalos $S_j = [s_{j-1}, s_j]$, donde $a = s_0 < s_1 < ... < s_N = b$, y sea $P_{[c,d]}$ una partición de $[c, d]$ en subintervalos $T_j = [t_{j-1}, t_j]$, donde $c = t_0 < t_1 < ... < t_M = d$. Sea entonces P_A la partición de A dada por los rectángulos

$$R_{ij} = S_i \times T_j,$$

con $1 \leq i \leq N$, $1 \leq j \leq M$. Nótese que cualquier partición del rectángulo A se obtiene de esta manera, como producto de particiones de los lados de A. Se tiene que

$$L(f, P_A) = \sum_{i,j} m(f, R_{ij}) v(R_{ij}) = \sum_{i=1}^{N} \Big(\sum_{j=1}^{M} m(f, R_{ij}) v(T_j) \Big) v(S_j).$$

Además, para cada $x \in S_i$ y para cada j es $m(f, R_{ij}) \leq m(f_x, T_j)$. Por tanto, sumando en j estas desigualdades, obtenemos que

$$\sum_{j=1}^{M} m(f, R_{ij}) v(T_j) \leq \sum_{j=1}^{M} m(f_x, T_j) v(T_j) \leq \int_c^d f_x(y) dy = g(x).$$

Como estas desigualdades valen para cualquier $x \in S_i$, podemos tomar ínfimos en x y obtener

$$\sum_{j=1}^{M} m(f, R_{ij}) v(T_j) \leq m(g, S_i)$$

para cada i, y entonces, sumando en i,

$$L(f, P_A) \leq \sum_{i=1}^{N} m(g, S_i) v(S_i) \leq L(g, P_{[a,b]}).$$

De aquí, y de un argumento análogo para supremos y sumas superiores, deducimos que

$$L(f, P_A) \leq L(g, P_{[a,b]}) \leq U(g, P_{[a,b]}) \leq U(f, P_A),$$

Como esto vale para cualquier partición P_A de A y, lo que es lo mismo, para cualesquiera particiones $P_{[a,b]}$ y $P_{[c,d]}$ de $[a,b]$ y $[c,d]$ respectivamente, y f es integrable, se deduce inmediatamente de estas desigualdades que g es integrable sobre $[a,b]$, y

$$\int_A f = \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \big(\int_c^d f(x,y)dy \big) dx.$$

Observación 5.6 Es claro que la misma prueba, sustituyendo intervalos por rectángulos y haciendo los pertinentes cambios de notación, sirve para establecer la versión general (teorema 5.4) del teorema de Fubini. La redacción de dicha prueba se deja como ejercicio para el lector.

Demostración del corolario 5.3.

Sea $S = [a,b] \times [c,d]$ un rectángulo cerrado que contenga a A, y extendamos f a S poniendo $f = 0$ en $S \setminus A$ como es habitual. Por el ejercicio 2.26, las gráficas de φ y ψ, es decir los conjuntos $G(\varphi) = \{(x, \varphi(x)) : x \in [a,b]\}$ y $G(\psi) = \{(x, \psi(x)) : x \in [a,b]\}$ tienen medida cero. Es claro que el conjunto de las discontinuidades de la función extendida f está contenido en la unión de estas dos gráficas, y por tanto tiene también medida cero. Luego, por el teorema de Lebesgue, f es integrable en S. Por otro lado, para cada $x \in [a,b]$, f_x es continua en $[c,d]$, salvo quizás en los puntos $\varphi(x)$ y $\psi(x)$, y por tanto, todas las f_x son integrables. Entonces, podemos aplicar el teorema de Fubini, lo que nos da, teniendo en cuenta que cada f_x es cero en $[c, \varphi(x)] \cup [\psi(x), d]$, que

$$\int_A f = \int_S f = \int_a^b \big(\int_c^d f_x(y)dy \big) dx = \int_a^b \big(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \big) dx.$$

Ejemplos y ejercicios

5.7 Calcular $\int_A (x+y)x dx dy$, donde $A=[0,1]\times[0,1]$.

5.8 Calcular las siguientes integrales iteradas:

(a) $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1}(x^4y+y^2)dydx$

(b) $\int_{0}^{1}\int_{e^x}^{e^{2x}} x\log y dydx$

(c) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\frac{arcseny}{y}} y\cos(xy)dxdy$

5.9 Expresar las integrales iteradas siguientes como integrales múltiples sobre un recinto, dibujar el recinto y cambiar el orden de intergración; finalmente, hallar el valor de las integrales usando el orden de integración que dé lugar a los cálculos más simples.

(a) $\int_{-3}^{2}\int_{0}^{y^2}(x^2+y)dxdy$

(b) $\int_{1}^{2}\int_{0}^{\log x}(x-1)\sqrt{1+e^{2y}}dydx$

(c) $\int_{-1}^{1}\int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y}dydx$

(d) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\cos x} y\sin x dxdy$

(e) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{x}\int_{0}^{y}(x+2y+3z)dzdydx$

(f) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{f(y)} xydxdy$, donde $f(y)=\text{mín}\{1,\log\frac{1}{y}\}$.

(g) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{(1-x^2)^{1/2}}(1-y^2)^{1/2}dxydx$

5.10 Sea $A=[0,1]\times[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases} 2y & \text{si } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q};\\ 1 & \text{si } x\in\mathbb{Q}.\end{cases}$$

(a) Decidir si f es integrable en A.

(b) Calcular $\int_0^1(\int_0^1 f(x,y)dy)dx$ si existe.

(c) Calcular $\int_0^1(\int_0^1 f(x,y)dx)dy$ si existe.

5.11 Cambiar el orden de integración en las siguientes integrales iteradas:

(a) $\int_0^a \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dxdy$

(b) $\int_0^a \int_{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{b} f(x,y)dydx$

(c) $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x,y,z)dzdydx$

(d) $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)dzdxdy$

5.12 *Diferenciación bajo el signo de la integral.* Sea $f:[a,b]\times[c,d]\longrightarrow\mathbb{R}$ continua tal que $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en $[a,b]\times[c,d]$. Definamos

$$F(y)=\int_a^b f(x,y)dx.$$

Probar que F es derivable y que

$$F'(y)=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx.$$

Indicación: Usando el Teorema Fundamental del Cálculo, se tiene que

$$F(u)=\int_a^b f(x,u)dx=\int_a^b (\int_c^u \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy+f(x,c))dx.$$

5.13 Sea $f:[a,b]\times[c,d]\longrightarrow\mathbb{R}$ continua con $\frac{\partial f}{\partial y}$ continua en $[a,b]\times[c,d]$. Definamos

$$F(x,y)=\int_a^x f(t,y)dt.$$

(a) Calcular $\frac{\partial F}{\partial x}$ y $\frac{\partial F}{\partial y}$

(b) Si $G(x)=\int_a^{g(x)} f(t,x)dt$, calcular $G'(x)$.

5.14 Calcular las integrales siguientes

(a) $\int_D x^2ydxdy$, siendo D el triángulo de vértices $(0,0),(0,1)$ y $(1,0)$.

(b) $\int_D ye^{-xy}dxdy$, siendo D el cuadrado de vértices $(0,0),(0,1),(1,0)$ y $(1,1)$.

(c) $\int_D xdxdy$, siendo $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le\sqrt{\pi}, 0\le y\le \sin x^2\}$.

(d) $\int_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy$, siendo D el interior de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

(e) $\int_D |\max\{x,y\}|dxdy$, siendo $D=[-2,2]\times[-1,1]$.

5.15 Probar la siguiente generalización del corolario del teorema de Fubini. Sean $A\subset\mathbb{R}^n$ un rectángulo cerrado, y $\varphi,\psi : A\longrightarrow\mathbb{R}^m$ funciones continuas tales que $\varphi_j(x)\le\psi_j(x)$ para todo $x\in A$, $1\le j\le m$. Sea

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m : x\in A,\ \varphi_j(x)\le y_j\le\psi_j(x),\ 1\le j\le m\}.$$

Para cada $x\in A$ definamos $B_x\subset\mathbb{R}^n$ por

$$B_x=\{y\in\mathbb{R}^m : \varphi_j(x)\le y_j\le\psi_j(x),\ 1\le j\le m\}.$$

Sea $f : D\longrightarrow\mathbb{R}$ una función continua, y definamos $f_x : B_x\subset\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}$ por $f_x(y)=f(x,y)$, y $g : A\subset\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ por

$$g(x)=\int_{B_x} f_x.$$

Entonces g es integrable sobre A, y

$$\int_D f=\int_A g.$$

5.16 Sean $A\subset\mathbb{R}^n$ y $B\subset\mathbb{R}^m$ conjuntos con volumen, y $f : A\longrightarrow\mathbb{R}$, $g : B\longrightarrow\mathbb{R}$ funciones integrables. Definamos

$$F(x,y)=f(x)+g(y),\ \text{ y }\ G(x,y)=f(x)g(y).$$

Hallar $\int_{A\times B}F(x,y)dxdy$ y $\int_{A\times B}G(x,y)dxdy$ en función de $\int_A f$, $\int_B g$, $v(A)$ y $v(B)$.

5.17 Hallar el volumen de la región acotada por $z=x^2+3y^2$, $z=9-x^2$.

5.18 Hallar el volumen de la región acotada por $x^2+2y^2=2$, $z=0$, $x+y+2z=2$.

5.19 Sea A la región de $\mathbb{R}^3$ acotada por los planos $x=0$, $y=0$, $z=2$ y la superficie $z=x^2+y^2$, con $x\ge 0$, $y\ge 0$. Calcular la integral $\int_A xdxdydz$.

5.20 Calcular la integral $\int_A ye^{-xy}dxdydz$, donde $A=[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$.

5.21 Calcular las siguientes integrales iteradas y dibujar las regiones A determinadas por los límites de integración:

(a) $\int_0^1 (\int_1^{e^x} (x+y)dy)dx$;

(b) $\int_0^1 (\int_{x^3}^{x^2} ydy)dx$.

5.22 Sea D la región acotada por los ejes positivos x e y y la recta $3x+4y = 10$. Calcular $\int_D (x^2+y^2)dxdy$.

5.23 Sea D la región dada como el conjunto de los (x,y) del plano tales que $-\varphi(x) \le y \le \varphi(x)$ y $a \le x \le b$, donde φ es una función continua no negativa en el intervalo $[a,b]$. Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en D tal que $f(x,y) = -f(x,-y)$ para todo $(x,y) \in D$. Probar que

$$\int_D f(x,y)dxdy = 0.$$

5.24 Dibujar la región correspondiente a cada una de las sigientes integrales dobles, cambiar el orden de integración y evaluar la integral usando el orden que sea más adecuado:

(a) $\int_0^1 (\int_x^1 xydy)dx$

(b) $\int_0^1 (\int_{2-y}^1 (x+y)^2 dx)dy$

(c) $\int_{-1}^1 (\int_{|y|}^1 (x+y)^2 dx)dy$

5.25 Calcular $\int_W x^2 \cos z dxdydz$, donde W es la región acotada por los planos $z=0$, $z=\pi$, $y=0$, $x=0$ y $x+y=1$.

5.26 Integrar $f(x,y,z) = xy+yz+zx$ sobre la porción del primer octante $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, cortada por el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

5.27 Utilizar integrales triples para hallar el volumen del sólido T de $\mathbb{R}^3$ limitado superiormente por el cilindro parabólico $z = 4-y^2$ e inferiormente por el paraboloide elíptico $z = x^2+3y^2$.

Capítulo 6

Integrales impropias

A menudo resulta útil poder integrar funciones que no son acotadas, e incluso integrarlas sobre recintos no acotados. En este capítulo desarrollaremos brevemente una teoría adecuada para tratar tales tipos de integrales, que reciben el nombre de *integrales impropias*, y que conducen a problemas de convergencia similares a los de las series infinitas. De hecho, la convergencia de integrales impropias de funciones de una variable equivale a la convergencia de las series asociadas a estas integrales; éste es el *criterio de la integral*.

Bastará con desarrollar la teoría de integrales impropias para funciones no negativas; una vez establecida para tales funciones la extenderemos fácilmente a funciones $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ con valores reales teniendo en cuenta que $f = \text{máx}\{f, 0\} + \text{mín}\{f, 0\}$. Se suele denotar $f^+ = \text{máx}\{f, 0\}$, *parte positiva de* f, y $f^- = -\text{mín}\{f, 0\} = \text{máx}\{-f, 0\}$, *parte negativa de* f, de modo que $f = f^+ - f^-$, y $|f| = f^+ + f^-$. De este modo resultará que f es integrable impropia si y sólo si f^+ y f^- lo son, y en este caso $\int_A f = \int_A f^+ - \int_A f^-$. También se tendrá que f es integrable impropia si y sólo si $|f|$ lo es, es decir, si y sólo si f es *absolutamente integrable*.

Estudiaremos primero las integrales de funciones positivas y no acotadas definidas sobre recintos que sí son acotados.

Definición 6.1 Sean A un subconjunto con volumen de $\mathbb{R}^n$, y $f : A \longrightarrow [0, \infty)$ una función, posiblemente no acotada. Para cada $M > 0$ consideremos la función $f_M : A \longrightarrow [0, \infty)$ definida por $f_M(x) = \text{mín}\{f(x), M\}$. Obsérvese que todas las f_M son acotadas en A. Supongamos que cada f_M es propiamente integrable sobre A. Nótese que, si $N \geq M$ entonces $0 \leq f_M \leq f_N \leq f$ y por tanto $\int_A f_M \leq \int_A f_N$, es decir, la función $M \mapsto \int_A f_M$ es creciente.

Entonces definimos
$$\int_A f = \lim_{M\to\infty} \int_A f_M$$
si este límite es finito, y en este caso decimos que f es integrable (impropia) sobre A.

Debe observarse que si f es integrable en A entonces todas las funciones $f_M = \min\{f, M\}$ son también integrables sobre A (ver ejercicio 4.4), y de hecho $f_M = f$ para todo M suficientemente grande, de modo que esta definición es ciertamente una extensión de la definición de función integrable.

A veces es muy útil tener en cuenta el siguiente hecho (llamado *criterio de comparación* de integrales):

Proposición 6.2 *Sean A un subconjunto con volumen de $\mathbb{R}^n$, y $f, g : A \longrightarrow [0, \infty)$ dos funciones (posiblemente no acotadas). Supongamos que cada f_M es integrable en A, que $f \leq g$, y que g es integrable sobre A. Entonces f es también integrable sobre A, y*
$$\int_A f \leq \int_A g.$$
La prueba de esta proposición es trivial teniendo en cuenta que la función $M \mapsto F(M) = \int_A f_M$ es monótona creciente y que, para una tal función F, existe el límite $\lim_{M\to\infty} F(M)$ si y sólo si F está acotada superiormente.

El siguiente teorema caracteriza la integrabilidad de una función f en un conjunto A mediante la convergencia de las integrales de esa función sobre una sucesión de conjuntos compactos K_j que aproximan el conjunto A. Este criterio será particularmente útil cuando A sea un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f : A \longrightarrow [0, \infty)$ sea continua, de modo que f será propiamente integrable sobre cada subconjunto compacto y con volumen de A. Además, este criterio se utilizará para establecer la versión más general del teorema del cambio de variables, que estudiaremos en el siguiente capítulo.

Teorema 6.3 *Sea A un conjunto con volumen, y sea $f : A \longrightarrow [0, \infty)$ una función, posiblemente no acotada. Sea (K_j) una sucesión de subconjuntos compactos y con volumen de A tales que $K_j \subseteq K_{j+1}$ para todo j, y $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$. Entonces, f es integrable sobre A si y sólo si f es integrable sobre cada K_j y el límite $\lim_{j\to\infty} \int_{K_j} f$ es finito. Además, en este caso,*
$$\int_A f = \lim_{j\to\infty} \int_{K_j} f.$$

En particular, para $f = 1$, se tiene que

$$v(A) = \lim_{j\to\infty} v(K_j).$$

Demostración: En primer lugar probaremos el resultado en el caso particular en que $f = 1$. Es decir, veremos que para toda sucesión (K_j) de subconjuntos compactos y con volumen de A tales que $K_j \subseteq K_{j+1}$ para todo j y $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$, es

$$v(A) = \lim_{j\to\infty} v(K_j).$$

A tal fin, para cada $B \subseteq \mathbb{R}^n$ definamos

$$\lambda(B) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} v(S_i) \mid (S_i) \,\text{recubrimiento de } B \text{ por rectángulos abiertos}\}.$$

No es difícil comprobar (ver ejercicios 3.23 y 3.24) que si B tiene volumen entonces $\lambda(B) = v(B)$, y que, si (B_i) es una sucesión de conjuntos con volumen que son disjuntos dos a dos y $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ tiene volumen, entonces

$$v(B) = \sum_{i=1}^{\infty} v(B_i).$$

Ahora, si (K_j) es una sucesión de subconjuntos compactos y con volumen de A tales que $K_j \subseteq K_{j+1}$ para todo j, y $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$, definamos $B_1 = K_1$, $B_2 = K_2 \setminus K_1$, y en general, para $j \geq 2$, $B_j = K_j \setminus K_{j-1}$. Es claro que (B_j) es una sucesión de conjuntos con volumen que son disjuntos dos a dos y $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. Entonces, por el ejercicio 3.24, se tiene que

$$v(A) = \sum_{i=1}^{\infty} v(B_i). \tag{3}$$

Pero, como para cada $N \in \mathbb{N}$ es $K_N = \bigcup_{i=1}^{N} B_j$, y los B_j son disjuntos dos a dos, tenemos que

$$v(K_N) = \sum_{i=1}^{N} v(B_i). \tag{4}$$

Entonces, combinando (3) y (4), obtenemos lo que queremos:

$$v(A) = \lim_{N\to\infty} v(K_N).$$

Ahora ya podemos probar el resultado en su forma más general. Fijemos una sucesión (K_j) de subconjuntos compactos y con volumen de A tales que $K_j \subseteq K_{j+1}$ para todo j y $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$.

Supongamos primero que f es integrable (impropia) sobre A. Como cada K_j tiene volumen y las funciones f_M son todas integrables, entonces las $f_M 1_{K_j}$ son integrables. Como además es $f1_{K_j} \leq f1_A$, y $f1_A$ es integrable por hipótesis, el criterio de comparación nos dice que $f1_{K_j}$ es integrable, es decir, f es integrable en K_j, y $\int_{K_j} f \leq \int_A f$, para todo j. Además, como la sucesión $(\int_{K_j} f)_{j=1}^{\infty}$ es monótona creciente y acotada, existe el límite $\lim_{j\to\infty} \int_{K_j} f$.

Recíprocamente, supongamos que cada f es integrable sobre K_j y que existe el límite $\lim_{j\to\infty} \int_{K_j} f = L$. Para cada $M > 0$ y cada $j \in \mathbb{N}$, la función $f_M 1_{K_j}$ es integrable por hipótesis, luego su conjunto de puntos de discontinuidad $D(f_M 1_{K_j})$ tiene medida cero. Como $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_j$, es claro que el conjunto de los puntos de discontinuidad de $f_M 1_A$ satisface

$$D(f_M 1_A) \subseteq \big[\bigcup_{i=1}^{\infty} D(f_M 1_{K_j})\big] \cup \big[\bigcup_{i=1}^{\infty} \partial K_j\big] \cup \partial A,$$

y entonces $D(f_M 1_A)$ tiene medida cero (por estar contenido en una unión numerable de conjuntos de medida cero), lo que significa que cada f_M es propiamente integrable en A. Veamos que f es integrable sobre A; esto equivale a probar que la función $M \mapsto \int_A f_M$ está acotada. Fijado un $M > 0$ arbitrario, por un lado tenemos que

$$\int_{K_j} f_M \leq \int_{K_j} f \leq L. \tag{5}$$

Por otra parte, como $v(A) = \lim_{j\to\infty} v(K_j)$, dado $\varepsilon > 0$, existe j tal que

$$v(A \setminus K_j) = v(A) - v(K_j) \leq \frac{\varepsilon}{M},$$

y por tanto

$$\int_A f_M - \int_{K_j} f_M = \int_{A\setminus K_j} f_M \leq M v(A \setminus K_j) \leq \varepsilon,$$

de donde

$$\int_A f_M - \varepsilon \leq \int_{K_j} f_M. \tag{6}$$

Combinando (5) y (6) tenemos que

$$\int_A f_M - \varepsilon \leq L. \tag{7}$$

Ahora, haciendo tender ε a cero en (7), obtenemos que

$$\int_A f_M \leq L, \tag{8}$$

y esto vale para todo $M > 0$. Por tanto, la función $M \mapsto \int_A f_M$ está acotada, f es integrable sobre A, y $\int_A f \leq L$. Además, como para todo j es

$$\int_{K_j} f \leq \int_A f \leq L,$$

y $L = \lim_{j\to\infty} \int_{K_j} f$, se deduce que

$$\int_A f = L. \ \Box$$

Ejemplo 6.4 Sea $A = [0,1]\times[0,1]$. Usar el teorema anterior para demostrar que la función $f(x,y) = (xy)^{-1/2}$ es integrable impropia sobre A, y calcular $\int_A f$.

Ahora pasamos a estudiar el caso de una función $f \geq 0$, posiblemente no acotada, definida en un subconjunto A no acotado de $\mathbb{R}^n$. Para cada $r > 0$, denotemos por $C_r = [-r,r] \times ... \times [-r,r]$ el cubo de centro el origen y lados de longitud $2r$; nótese que $C_r = B_\infty(0,r)$, donde $B_\infty(0,r)$ es la bola de centro 0 y radio r para la norma del supremo, $\|x\|_\infty = \sup_i |x_i|$.

Definición 6.5 Sean A un subconjunto no acotado de $\mathbb{R}^n$, y $f : A \longrightarrow [0,\infty)$ una función que es integrable (quizás impropia) en cada cubo C_r de radio $r > 0$. Diremos que f es integrable (impropia) sobre A si existe el límite

$$\lim_{r\to\infty} \int_{C_r} f = \lim_{r\to\infty} \int_{A\cap C_r} f,$$

y en este caso se define $\int_A f$ como el valor de dicho límite.

El siguiente resultado caracteriza la integrabilidad de una función f mediante la convergencia de las integrales de f sobre sucesiones de conjuntos con volumen que sean *cada vez más grandes.*

Teorema 6.6 *Sean A un subconjunto no acotado de $\mathbb{R}^n$, y $f : A \longrightarrow [0,\infty)$ una función que es integrable (quizás impropia) en $C \cap A$ para todo cubo $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Sea (B_k) una sucesión cualquiera de conjuntos acotados y con volumen tales que:*

(i) $B_k \subseteq B_{k+1}$ *para todo* k*, y*

(ii) para todo cubo C*, existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $C \subseteq B_k$*.*

Entonces, f *es integrable (impropia) sobre* A *si y sólo si* $\lim_{k\to\infty} \int_{A\cap B_k} f$ *es finito. Además, en este caso,*

$$\int_A f = \lim_{k\to\infty} \int_{A\cap B_k} f.$$

Demostración: Supongamos primero que f es integrable. Para cualquier sucesión (B_k) que satisfaga las condiciones del enunciado, si $C_a \subseteq B_k \subseteq C_b$, como $f \geq 0$, se tiene que

$$\int_{C_a} f \leq \int_{B_k} f \leq \int_{C_b} f \leq \int_A f. \tag{1}$$

Ahora, dado $\varepsilon > 0$, como $\lim_{r\to\infty} \int_{C_r} f = \int_A f$, existe $M > 0$ tal que, si $r \geq M$ entonces

$$\int_A f - \varepsilon \leq \int_{C_r} f. \tag{2}$$

Entonces, eligiendo $a, b \geq M$ y $k_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grandes para que $C_a \subseteq B_{k_0} \subseteq C_b$, combinando (1) y (2), tenemos que

$$\int_A f - \varepsilon \leq \int_{B_{k_0}} f \leq \int_{B_k} f \leq \int_A f$$

para todo $k \geq k_0$. Esto prueba que existe $\lim_{k\to\infty} \int_{B_k} = \int_A f$.

Recíprocamente, supongamos que $\lim_{k\to\infty} \int_{B_k}$ es finito para una sucesión (B_k) con las propiedades del enunciado. Por (i), y puesto que $f \geq 0$, es claro que la sucesión $\int_{B_k} f$ es monótona creciente. Sea $\alpha = \lim_{k\to\infty} \int_{B_k} f$. Claramente, $\int_{B_k} f \leq \alpha$ para todo k. Pero, por (ii), para cada $r > 0$ existe k tal que $C_r \subseteq B_k$, y por tanto

$$\int_{C_r} f \leq \int_{B_k} f \leq \alpha.$$

Así, la función

$$F(r) = \int_{C_r} f$$

es creciente y está acotada superiormente por α, y por consiguiente existe $\lim_{r\to\infty} F(r) = \int_A f$, es decir, f es integrable (impropia) sobre A. □

Ejemplo 6.7 Calcular la integral $\int_A xye^{-(x^2+y^2)}dxdy$, donde $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ 0 \leq y \leq 1\}$.

En el caso de funciones de una variable, recordemos el *criterio de la integral*, que establece la equivalencia entre convergencia de integrales impropias y de series de números reales.

Teorema 6.8 *Sea $f : [1, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ una función decreciente. Entonces la integral impropia $\int_1^\infty f$ converge si y sólo si la serie $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ converge.*

Igual que antes, es fácil probar un *criterio de comparación* para esta definición más general de integral impropia:

Proposición 6.9 *Sean A un subconjunto no acotado de $\mathbb{R}^n$, y $f, g : A \longrightarrow [0, \infty)$ dos funciones que son integrables (quizás impropias) sobre cada cubo $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Supongamos que $f \leq g$ y que g es integrable (impropia) sobre A. Entonces f es también integrable (impropia) sobre A, y*

$$\int_A f \leq \int_A g.$$

Por último, consideremos el caso más general posible de integral impropia: la de una función f no acotada, definida sobre un subconjunto no acotado A de $\mathbb{R}^n$, y que toma valores tanto positivos como negativos. Recordemos que la *parte positiva de f* es $f^+ = \max\{f, 0\}$, y que $f^- = -\min\{f, 0\} = \max\{-f, 0\}$ es la *parte negativa de f*; es obvio que $f = f^+ - f^-$, y $|f| = f^+ + f^-$.

Definición 6.10 Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Se dice que $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable (impropia) si las funciones f^+ y f^- son ambas integrables (impropias), y en este caso se define $\int_A f$ como

$$\int_A f = \int_A f^+ - \int_A f^-.$$

Nótese que, como $|f| = f^+ + f^-$, y $f^+ \leq |f| \geq f^-$, esto equivale a pedir que $|f|$ sea integrable. Por eso a veces también se dice que f es *absolutamente integrable*.

Para terminar, observaremos que casi todas las propiedades de la integral estudiadas en el capítulo 4 se extienden sin dificultad al caso de integrales impropias. Por ejemplo, el teorema 4.1 sigue siendo cierto en el caso de funciones integrables impropias (se invita al lector a justificar esta afirmación).

Sin embargo, hay otras propiedades de las funciones propiamente integrables que no se extienden al caso de integrales impropias; por ejemplo, el producto de funciones propiamente integrables es integrable, pero no es así cuando se habla de integrales impropias (ver el ejercicio 6.24).

Problemas

6.11 Sea $A = [0,1]\times[0,1] \subset \mathbb{R}^2$. Estudiar la integrabilidad de las siguientes funciones sobre A, calculando $\int_A f$ cuando sea posible.

(a) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{xy}}$

(b) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{|x-y|}}$

(c) $f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+2xy+y^2}$

6.12 Estudiar la convergencia de la siguiente integral impropia

$$\int_A \frac{x}{y} dxdy,$$

donde A es la región del plano acotada por $x = 1$, $x = y$, $x = 2y$.

6.13 Sea A una región no acotada del plano que puede describirse como

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x < \infty,\, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\},$$

donde $\varphi, \psi : [a,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas tales que $\varphi \leq \psi$. Sea f una función continua y no negativa sobre A. Utilizar el teorema de Fubini y los resultados de este capítulo para probar que

$$\int_A f(x,y)dxdy = \int_a^\infty \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dydx.$$

Formular enunciados análogos para otro tipo de regiones no acotadas del plano $\mathbb{R}^2$ y del espacio $\mathbb{R}^3$.

6.14 Calcular la integral $\int_A xye^{-(x^2+y^2)}dxdy$, donde $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\, 0 \leq y \leq 1\}$.

6.15 Usar el problema 6.13 para integrar e^{-xy} de dos maneras sobre la región $x \geq 0$, $1 \leq y \leq 2$. Concluir que

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx = \log 2.$$

6.16 Probar que la integral $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dxdy$ converge.

6.17 Sea A un abierto con volumen de $\mathbb{R}^n$. Probar que existe una sucesión (K_j) de conjuntos compactos con volumen tales que $K_j \subseteq K_{j+1}$ para todo j, y $A = \bigcup_{j=1}^\infty K_j$. *Indicación:* los K_j pueden ser uniones finitas de cubos cada vez más pequeños y más numerosos.

A continuación consideramos algunos ejemplos de integrales impropias de funciones de una variable que luego, en alianza con el criterio de comparación, serán muy útiles para decidir la convergencia o divergencia de integrales impropias de funciones de varias variables. De momento no hemos visto más que unos pocos ejemplos de integrales múltiples impropias. La razón es que, para tratar estos ejemplos, además de los teoremas 6.3 y 6.6 y del teorema de Fubini, se necesita (o cuando menos es extremadamente útil) el teorema del cambio de variables. En la sección de problemas del próximo capítulo veremos más ejemplos de integrales impropias de funciones de varias variables.

6.18 Probar que $\int_1^\infty x^p dx$ converge si $p < -1$ y diverge si $p \geq -1$.

6.19 Por el contrario, $\int_0^1 x^p dx$ converge si $p > -1$ y diverge si $p \leq -1$.

6.20 Demostrar que $\int_1^\infty x^p e^{-x} dx$ converge para todo $p \in \mathbb{R}$, y $\int_0^1 x^p e^{-x} dx$ converge si $p < -1$.

6.21 Sin embargo, $\int_0^1 x^p e^{1/x} dx$ diverge para todo $p \in \mathbb{R}$.

6.22 Probar que $\int_0^1 \log x dx$ converge, mientras que $\int_1^\infty \frac{dx}{\log x}$ diverge.

6.23 Reformular y demostrar el teorema 4.1 para el caso de integrales impropias.

6.24 Sean $f(x) = g(x) = 1/\sqrt{x}$. Probar que $\int_0^1 f$ y $\int_0^1 g$ convergen, y sin embargo $\int_0^1 fg$ diverge.

6.25 Sea $f : [a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$. Se dice que la integral impropia $\int_a^\infty f$ es *condicionalmente convergente* si existe el límite

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f = \int_a^\infty f.$$

Si $f \geq 0$, es obvio que esta integral existe si y sólo f es absolutamente integrable, luego esta definición de integral impropia equivale a la dada más arriba en el caso de funciones positivas. Sin embargo, estas dos definiciones de integral impropia en no coinciden en general: si

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

entonces $\int_1^\infty f$ es condicionalmente convergente (puede integrarse por partes para ver esto), pero no absolutamente convergente (encuéntrese una serie divergente de números reales que minore a $\int_1^\infty |f|$). Poner ejemplos de situaciones análogas en el caso de integrales de funciones no acotadas definidas sobre intervalos acotados.

6.26 Establecer por qué las siguientes integrales son impropias y determinar si son convergentes o divergentes. Calcular el valor de las que se pueda.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \log x\, dx$ (2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x\log x}\, dx$ (3) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\, dx$

(4) $\displaystyle\int_0^1 x\log x\, dx$ (5) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\, dx$ (6) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{e^x}}\, dx$

(7) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\log x}{x}\, dx$ (8) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x(\log x)^2}\, dx$ (9) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

(10) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-x}\, dx$ (11) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\, dx$ (12) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+4)}\, dx$

(13) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x-1}}\, dx$ (14) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x\log x}\, dx$ (15) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{1+x^2}\, dx.$

Capítulo 7

El teorema del cambio de variables

En este capítulo estudiaremos el otro resultado fundamental, aparte del teorema de Fubini, que nos ayudará a calcular integrales múltiples sobre recintos de forma no rectangular y que además permitirá simplificar el cálculo de muchas integrales múltiples (de manera parecida a como un caso particular de este resultado, el método de integración por sustitución, simplifica el cálculo de muchas integrales de funciones de una variable). Primero enunciaremos el teorema del cambio de variables y veremos varios ejemplos de sus aplicaciones. La demostración de este resultado es larga y complicada, y en una primera lectura podría omitirse; lo fundamental es comprender bien su enunciado y saber aplicarlo correctamente.

Antes de enunciar el teorema, recordemos que el (determinante) *jacobiano* de una aplicación diferenciable $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (donde A es un abierto de $\mathbb{R}^n$) se define como

$$Jf(x) = \det(f'(x))$$

para cada $x \in A$. Un *difeomorfismo* (de clase C^p) g entre dos abiertos A y B de $\mathbb{R}^n$ es una aplicación $g : A \longrightarrow B$ biyectiva y diferenciable (de clase C^p), tal que su inversa $g^{-1} : B \longrightarrow A$ es también diferenciable (de clase C^p).

Recordemos también que, como consecuencia del teorema de la función inversa, si A es un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $g : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación inyectiva y diferenciable (de clase C^p) en A tal que $Jg(x) \neq 0$ para todo $x \in A$, entonces $g(A)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$ y $g : A \longrightarrow g(A)$ es un difeomorfismo (de clase C^p).

Teorema 7.1 *Sean A y B subconjuntos abiertos y con volumen de $\mathbb{R}^n$, y sea $g : A \longrightarrow B$ un difeomorfismo C^1. Entonces, para toda función integrable*

$f : B \longrightarrow \mathbb{R}$, la función $(f \circ g)|Jg|$ es integrable en A, y

$$\int_B f = \int_A (f \circ g)|Jg|.$$

Observación 7.2 Si denotamos $g = (g_1, ..., g_n)$; $y_1 = g_1(x)$, ..., $y_n = g_n(x)$; y

$$Jg = \frac{\partial(g_1, ..., g_n)}{\partial(x_1, ..., x_n)},$$

entonces la conclusión del teorema puede escribirse así:

$$\int_B f(y_1, ..., y_n) dy_1 ... dy_n = \int_A f(g(x_1, ..., x_n)) \left| \frac{\partial(g_1, ..., g_n)}{\partial(x_1, ..., x_n)} \right| dx_1 ... dx_n.$$

Es conveniente hacer notar que el hecho de que en este teorema A y B sean abiertos no supone en la práctica ninguna restricción para el cálculo de integrales, ya que, al tener A y B volumen, sus fronteras tienen medida cero, y entonces, por los teoremas 4.1(vii) y 3.6 las integrales sobre la adherencia y el interior de A (y de B) coinciden, de modo que

$$\int_{\overline{B}} f = \int_B f = \int_A (f \circ g)|Jg| = \int_{\overline{A}} (f \circ g)|Jg|,$$

incluso si g dejara de ser un difeomorfismo en la frontera de A o Jg no estuviera bien definido en dicha frontera. Se sigue de estas observaciones que *el enunciado del teorema del cambio de variables sigue siendo válido si A y B se reemplazan por conjuntos con volumen cuyos interiores son difeomorfos mediante un difeomorfimo g de clase C^1.* La sección dedicada al cambio a coordenadas polares (ver más adelante) ilustrará este hecho.

Antes de ver ejemplos y aplicaciones de este teorema, esbozaremos una justificación intuitiva del mismo. Sea S un rectángulo *muy pequeño* contenido en A. Entonces, como g es un difeomorfismo, g es *aproximadamente* una aplicación afín en las proximidades de S, y $g(S)$ es *aproximadamente* un paralelepípedo. Si g fuera realmente afín sobre S, el volumen de $g(S)$ sería $|\det g|v(S)$. Como la aplicación $y \mapsto g(x) + Dg(x)(y - x)$ aproxima bien a g cerca de x y es una aplicación afín, tendríamos que el volumen de $g(S)$ sería aproximadamente igual a $|Jg|v(S)$, es decir, haciendo S cada vez más pequeño, tendríamos que estas *cantidades infinitesimales* coinciden:

$$f(g(x))|Jg(x)|dx = f(y)dy,$$

luego, *sumando* todas estas cantidades infinitesimales (es decir, integrando), obtendríamos el resultado:

$$\int_A f(g(x))|Jg(x)|dx = \int_B f(y)dy.$$

Veamos ahora algunos ejemplos.

Ejemplo 7.3 Usando el teorema del cambio de variables, hallar el volumen del paralelepípedo engendrado por los vectores $(1,1,1)$, $(2,3,1)$, y $(0,1,1)$ en $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 7.4 Usando el cambio de variables $x = u+v$, $y = u-v$, calcular $\int_0^1 \int_y^1 (x^2+y^2)dxdy$.

Hay algunos cambios de variable que son particularmente útiles en multitud de situaciones prácticas y que por ello merecen una atención especial. Los cambios a coordenadas polares, esféricas o cilíndricas son algunos de los más empleados.

Coordenadas polares

Sea $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación definida por

$$g(r,\theta) = (r\cos\theta, r\mathrm{sen}\theta).$$

Aunque g es diferenciable de clase C^∞, no es inyectiva en todo $\mathbb{R}^2$. Sin embargo, si la restringimos al abierto $U = \{(r,\theta) : r > 0, 0 < \theta < 2\pi\}$ entonces sí que es inyectiva (compruébese), y su jacobiano es

$$Jg(r,\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\theta \\ \mathrm{sen}\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\mathrm{sen}^2\theta = r > 0$$

en todo este conjunto U, luego por el teorema de la función inversa $g : U \longrightarrow g(U)$ es un difeomorfismo de clase C^∞; se comprueba inmediatamente que $g(U) = \mathbb{R}^2 \setminus ([0,\infty) \times \{0\})$. Es decir, g transforma difeomórficamente la banda abierta U sobre todo el plano excepto los puntos de la recta $y = 0$ con coordenada x positiva. Como dichos puntos forman un subconjunto de medida cero de $\mathbb{R}^2$, estos puntos no afectan al valor de las integrales a las que se aplique el cambio de variables g (ver la observación 7.2) y, para nuestros propósitos de cálculo de integrales, podemos actuar como si g fuera una biyección definida de la banda cerrada $\overline{U} = \{(r,\theta) : r \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ sobre todo el plano $\mathbb{R}^2$.

De esta manera, si B es cualquier sunconjunto con volumen de $\mathbb{R}^2$, y $A = g^{-1}(B)$, al aplicar el teorema del cambio de variables a la transformación g (y teniendo en cuenta las observaciones anteriores), se obtiene la siguiente fórmula:

$$\int_B f(x,y)dxdy = \int_A f(r\cos\theta, r\mathrm{sen}\theta) r dr d\theta$$

Ejemplo 7.5 Sea $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Aplicar el cambio de variables a coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r\mathrm{sen}\theta$ para hallar

$$\int_A e^{-x^2-y^2} dxdy.$$

Ejemplo 7.6 Calcular $\int_D \log(x^2+y^2)dxdy$, donde $D = \{(x,y) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}$.

Ejemplo 7.7 Hallar el área de un círculo de radio r usando el cambio a coordenadas polares.

Coordenadas esféricas

Sea ahora $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación definida por

$$g(r,\varphi,\theta) = (r\,\mathrm{sen}\varphi\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\varphi\mathrm{sen}\theta, r\cos\varphi).$$

Como sucedía en el caso de las coordenadas polares, g es C^∞ pero no es inyectiva en todo $\mathbb{R}^3$. No obstante, restringiéndola al abierto $U = \{(r,\varphi,\theta) : r > 0, 0 < \theta < 2\pi, 0 < \varphi < \pi\}$, g sí es inyectiva (no es difícil comprobarlo), y su jacobiano es

$$Jg(r,\varphi,\theta) = \begin{vmatrix} \mathrm{sen}\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\mathrm{sen}\varphi\mathrm{sen}\theta \\ \mathrm{sen}\varphi\mathrm{sen}\theta & r\cos\varphi\mathrm{sen}\theta & r\mathrm{sen}\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -r\mathrm{sen}\varphi & 0 \end{vmatrix} = r^2\mathrm{sen}\varphi > 0$$

en cada $(r,\varphi,\theta) \in U$, luego por el teorema de la función inversa $g : U \longrightarrow g(U)$ es un difeomorfismo de clase C^∞. Se ve fácilmente que $g(U) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) : y = 0, x \geq 0\}$. Es decir, g transforma difeomórficamente la banda abierta U sobre todo el espacio $\mathbb{R}^3$ excepto los puntos del plano $y = 0$ con coordenada x positiva. Pero dichos puntos forman un subconjunto de medida cero de $\mathbb{R}^3$, luego estos puntos no afectan al valor de las integrales a las que se aplique el cambio de variables g y, como en el caso de las coordenadas polares, para calcular integrales podemos hacer como si g fuera una biyección definida de $\overline{B} = \{(r, \varphi, \theta) : r \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$ sobre todo $\mathbb{R}^3$. En este caso, si B es cualquier sunconjunto con volumen de $\mathbb{R}^3$, y $A = g^{-1}(B)$, aplicando el teorema del cambio de variables a g, obtenemos la siguiente fórmula:

$$\int_B f(x,y,z)dxdydz = \int_A f(r\cos\theta \mathrm{sen}\varphi, r\mathrm{sen}\theta\mathrm{sen}\varphi, r\cos\varphi)r^2\mathrm{sen}\varphi drd\varphi d\theta.$$

Ejemplo 7.8 Sea B la bola unidad de $\mathbb{R}^3$. Calcular las integrales

$$\int_B \frac{dxdydz}{\sqrt{2+x^2+y^2+z^2}} \quad y \quad \int_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dxdydz.$$

Coordenadas cilíndricas

El cambio a coordenadas cilíndricas consiste en hacer un cambio a polares en las coordenadas x, y de cada punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, mientras que la coordenada z permanece fija. La transformación adecuada es pues

$$g(r, \theta, z) = (r\cos\theta, r\mathrm{sen}\theta, z),$$

donde g está definida en el abierto $U = \{(r, \theta, z) : r > 0, 0 < \theta < 2\pi\}$, y su imagen es todo $\mathbb{R}^3$ excepto los puntos del plano $y = 0$ con coordenada $x \geq 0$ (puntos que forman un subconjunto de medida cero de $\mathbb{R}^3$). El jacobiano de g es en este caso $Jg(r, \theta, z) = r > 0$ en U. Así, si B es cualquier sunconjunto con volumen de $\mathbb{R}^3$, y $A = g^{-1}(B)$, tenemos la siguiente fórmula de cambio de variables:

$$\int_B f(x,y)dxdydz = \int_A f(r\cos\theta, r\mathrm{sen}\theta, z)rdrd\theta dz.$$

Ejemplo 7.9 Calcular $\int_D ze^{-x^2-y^2}dxdydz$, donde $D = \{(x, y, z) : x^2+y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$.

Ejemplo 7.10 Calcular $\int_D z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, donde $D = \{(x, y, z) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, 1 \leq z \leq 2\}$.

Ejemplo 7.11 Hallar el valor de

$$\int_0^1 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} z(x^2+y^2)dxdydz.$$

Demostración del teorema 7.1

La demostración del teorema del cambio de variables es necesariamente larga y complicada técnicamente. Seguiremos estos pasos:

- Paso 1: Si $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación lineal y A un conjunto con volumen entonces $v(L(A)) = |\det L| v(A)$.
- Paso 2: Si C es un conjunto con volumen tal que $\overline{C} \subset A$, entonces $g(C)$ también tiene volumen.
- Paso 3: Si $C \subset A$ es un conjunto cerrado y con volumen, entonces
$$v(g(C)) \leq \int_C |Jg|.$$
- Paso 4: Sea C un subconjunto cerrado y con volumen de A. Entonces, para toda $f : g(C) \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable,
$$\int_{g(C)} f = \int_C (f \circ g)|Jg|.$$
- Paso 5: El teorema es cierto, incluso si $x \mapsto |Jg(x)|$ o $x \mapsto 1/|Jg(x)|$ no están acotadas sobre A y las integrales son impropias.

Paso 1. Comenzamos por probar el teorema en el caso más sencillo, aunque no del todo trivial: suponiendo que g es lineal, $f = 1$ y A es un conjunto con volumen:

Lema 7.12 *Sean $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación lineal, y $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto con volumen. Entonces $L(A)$ tiene volumen, y*
$$v(L(A)) = |\det L| v(A),$$
es decir,
$$\int_{L(A)} 1 = \int_A |\det L|.$$

Demostración: Nos bastaría con probar esto en el caso que L es isomorfismo lineal (es todo lo que se requiere para demostrar el teorema del cambio de variable), pero como el enunciado de este lema es cierto incluso cuando L no es isomorfismo, discutiremos también este caso. Si $\det L = 0$ entonces $L(A)$ está contenido en $L(\overline{A})$, que es compacto y a su vez está contenido en un hiperplano de $\mathbb{R}^n$, luego $L(\overline{A})$ tiene medida y contenido cero, y la igualdad $v(L(A)) = |\det L|v(A)$ es trivial en este caso. Podemos suponer entonces que $\det L \neq 0$, es decir, L es un isomorfismo lineal.

Veamos primero que $L(A)$ tiene volumen si A lo tiene. Por el ejercicio 2.24 sabemos que una aplicación de clase C^1 entre dos abiertos de $\mathbb{R}^n$ transforma conjuntos de medida nula en conjuntos de medida nula. En particular esto es cierto para una aplicación lineal $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Por tanto, si A tiene volumen, ∂A tiene medida cero y $L(\partial A)$ también. Pero, como L es isomorfismo lineal, $\partial L(A) = L(\partial A)$, de modo que $\partial L(A)$ tiene medida cero y así $L(A)$ tiene volumen.

Para establecer la igualdad $v(L(A)) = |\det L|v(A)$, recordemos que si $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación lineal, entonces existen aplicaciones lineales $L_1, ..., L_N : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tales que $L = L_1 \circ ... \circ L_N$ y cada L_k opera sobre cualquier vector $x \in \mathbb{R}^n$ de una de las maneras siguientes:

(a) Una coordenada de x se multiplica por una constante, y las demás coordenadas permanecen invariables;

(b) Para ciertos i, j (fijos para cada L_k), se reemplaza la coordenada x_i por $x_i + x_j$, mientras que las otras coordenadas permanecen invariables.

Esto es equivalente a afirmar que cualquier matriz $n \times n$ se descompone como producto de matrices $n \times n$ cada una de las cuales es de uno de los dos tipos siguientes: o bien se obtiene de la matriz identidad sustituyendo un 1 de la diagonal por una constante c, o bien se obtiene a partir de la matriz identidad poniendo un uno en vez de un cero en cualquier lugar fuera de la diagonal principal.

Puesto que $\det L = \det L_1 ... \det L_N$, basta probar el resultado para cada una de las L_k anteriores. Es decir, podemos suponer que L es de una de las formas (a) o (b) anteriores. En efecto, si $v(L_j(A)) = |\det L_j|v(A)$ para cada L_j y cada conjunto con volumen A entonces, aplicando este hecho reiteradamente, obtenemos que

$$v(L(A)) = |\det L_1||\det L_2|...|\det L_N|v(A) = |\det L|v(A).$$

Veamos pues que si L es una aplicación lineal del tipo (a) o (b) anteriores y A es un conjunto con volumen entonces $v(L(A)) = |\det L|v(A)$. A tal fin, comenzamos considerando el caso especial en que A es un rectángulo,

$$A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n].$$

Si L es del tipo (a), es decir,

$$L(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., cx_i, ..., x_n),$$

donde c es una constante, entonces es claro que $\det L = c$, y

$$L(A) = [a_1, b_1] \times ... \times [ca_2, cb_2] \times ... \times [a_n, b_n],$$

si $c > 0$, y

$$L(A) = [a_1, b_1] \times ... \times [cb_2, ca_2] \times ... \times [a_n, b_n],$$

cuando $c < 0$, luego $v(L(A)) = |c|v(A)$ en ambos situaciones, y el resultado se cumple para aplicaciones del tipo (a). Supongamos ahora que L es del tipo (b), es decir

$$L(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_{i-1}, x_i + x_j, x_{i+1}, ..., x_n),$$

entonces es obvio que $\det L = 1$, y por tanto sólo hay que probar que $v(A) = v(L(A))$ en este caso. Como

$$L(A) = \{(x_1, ..., x_{i-1}, x_i + x_j, x_{i+1}, ..., x_n) : x_k \in [a_k, b_k]\},$$

entonces, utilizando el teorema de Fubini, obtenemos que

$$v(L(A)) = \Big(\int_D 1_D dx_i dx_j\Big) \prod_{k=1, k\neq i, k\neq j}^{n} (b_k - a_k),$$

donde $D = \{(x_j, x_i + x_j) \in \mathbb{R}^2 : x_j \in [a_j, b_j], x_i \in [a_i, b_i]\}$. Por tanto, tendremos lo que deseamos si probamos que

$$\int_D 1_D dx_i dx_j = (b_j - a_j)(b_i - a_i).$$

Es decir, en realidad basta con demostrar esto en el caso de $\mathbb{R}^2$, cuando $A = [a, b] \times [c, d]$ y $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ está definida por

$$L(x, y) = (x, x + y).$$

Pero esto es ya un sencillo ejercicio que se deja al cuidado del lector (hágase un dibujo para convencerse de que $v(L(A)) = (b - a)(d - c) = v(A)$ si no se tiene ganas de calcular).

Este argumento prueba que $v(L(A)) = |\det L|v(A)$ cuando A es un rectángulo y L es una aplicación lineal del tipo (a) o (b). Veamos por último que esta igualdad sigue siendo cierta en el caso de que A es un conjunto cualquiera con volumen (y L sigue siendo de uno de esos dos tipos).

Sea S un rectángulo que contiene a A y tomemos $\varepsilon > 0$ cualquiera. Como A tiene volumen existe una partición P de S tal que

$$U(1_A, P) - v(A) \leq \frac{\varepsilon}{|\det L|}, \quad \text{y} \quad v(A) - L(1_A, P) \leq \frac{\varepsilon}{|\det L|}.$$

Sean entonces $V = V_\varepsilon = \bigcup\{Q \in P : Q \subseteq A\}$, y $W = W_\varepsilon = \bigcup\{Q \in P : Q \cap A \neq \emptyset\}$. Por lo anterior se tiene que

$$v(L(V)) = \sum_{Q \in P, Q \subseteq A} v(L(Q)) = \sum_{Q \in P, Q \subseteq A} |\det L| v(Q) =$$
$$|\det L| L(1_A, P) \geq |\det L| v(A) - \varepsilon,$$

y análogamente $v(L(W)) \leq |\det L| v(A) + \varepsilon$. Ahora, como $V \subseteq A \subseteq W$, tenemos que $L(V) \subseteq L(A) \subseteq L(W)$, y como ya sabemos que $L(A)$ tiene volumen, esto impone que

$$|\det L| v(A) - \varepsilon \leq v(L(V)) \leq v(L(A)) \leq v(L(W)) \leq |\det L| v(A) + \varepsilon,$$

y en particular $|\det L| v(A) - \varepsilon \leq v(L(A)) \leq |\det L| v(A) + \varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario se deduce de aquí que $v(L(A)) = |\det L| v(A)$. $\Box$

Paso 2. Veamos ahora que los difeomorfismos transforman conjuntos con volumen en conjuntos con volumen.

Lema 7.13 *Sea $g : A \longrightarrow B$ un difeomorfismo C^1 entre dos abiertos de $\mathbb{R}^n$. Si C es un conjunto con volumen tal que $\overline{C} \subset A$, entonces $g(C)$ también tiene volumen.*

Demostración: Como g es un difeomorfismo, $\partial g(C) = g(\partial C)$. Por el ejercicio 2.24 sabemos que una aplicación de clase C^1 entre dos abiertos de $\mathbb{R}^n$ transforma conjuntos de medida nula en conjuntos de medida nula. Entonces, como ∂C tiene medida nula (puesto que C tiene volumen), resulta que $\partial g(C) = g(\partial C)$ tiene también medida nula, lo que significa que $g(C)$ tiene volumen. $\Box$

Paso 3. Veremos que si $C \subset A$ es un conjunto cerrado y con volumen, entonces

$$v(g(C)) \leq \int_C |Jg|.$$

A tal fin, probaremos primero una versión aproximada de este hecho para el caso en que C es un cubo, de lo cual deduciremos el caso general.

Recordemos que la norma $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

tiene la propiedad de que para todos $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$,

$$B_\infty(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\|_\infty \leq r\} = [x_1 - r, x_1 + r] \times \ldots \times [x_n - r, x_n + r],$$

es decir, la bola $B_\infty(x,r)$ es un cubo de centro x y lados de longitud $2r$. Obviamente, todo cubo C en $\mathbb{R}^n$ puede expresarse de esta manera para ciertos x y r. El siguiente lema nos da la clave de la demostración de este paso:

Lema 7.14 *Sea $g : A \longrightarrow B$ un difeomorfismo C^1 entre dos abiertos de $\mathbb{R}^n$ y K un compacto contenido en A. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, si Q es un cubo de lados menores o iguales que δ y $x \in Q \cap K$, se tiene*

$$v(g(Q)) \leq (1+\varepsilon)^n |\det g'(x)| v(Q).$$

Demostración: Como g' y $(g^{-1})'$ son continuas en el compacto K, ambas aplicaciones están acotadas en K, y por tanto existe una constante $M > 0$ tal que, para todo $x \in K$, los isomorfismos lineales $g'(x)$ satisfacen que

$$\frac{1}{M}\|z\|_\infty \leq \|g'(x)(z)\|_\infty \leq M\|z\|_\infty,$$

para todo $z \in \mathbb{R}^n$, lo cual equivale a decir que, para todo $x \in K$, y para todos $y \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$,

$$B_\infty(g'(x)(y), \frac{r}{M}) \subseteq g'(x)(B_\infty(y,r)) \subseteq B_\infty(g'(x)(y), Mr). \tag{1}$$

Por otra parte, como g es de clase C^1 en el compacto $K \subset A$, g es uniformemente diferenciable en K (ver problema 7.29), es decir, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\|g(y+h) - g(y) - g'(y)(h)\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2M}\|h\| \tag{2}$$

para todos $y \in K$, $\|h\| \leq \delta_1$. Además, como g' es uniformemente continua en el compacto K, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$\|g'(x) - g'(y)\| \leq \frac{\varepsilon}{2M}$$

para todos $x, y \in K$ con $\|x-y\|_\infty \leq \delta_2$, lo que conlleva

$$\|g'(x)(h) - g'(y)(h)\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2M}\|h\| \tag{3}$$

para todos $x, y \in K$, $h \in \mathbb{R}^n$, con $\|x-y\|_\infty \leq \delta_2$ y $\|h\| \leq \delta_2$. Ahora, tomando $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$ y combinando las desigualdades (2) y (3), tenemos que

$$\|g(y+h) - g(y) - g'(x)(h)\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{M}\|h\|, \tag{4}$$

es decir, para todo $x, y \in K$ con $\|x-y\| \leq \delta$ y $\|h\| \leq \delta$, se tiene que

$$g(y+h)-[g(y)+g'(x)(h)] \in B_\infty(0, \frac{\varepsilon}{M}\|h\|) \subseteq g'(x)(B_\infty(0, \varepsilon\|h\|)),$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} &g(B_\infty(y,r)) \subseteq g(y) + g'(x)(B_\infty(0,r)) + g'(x)(B_\infty(0,\varepsilon r)) \\ &\subseteq g(y) + g'(x)(B_\infty(0, r(1+\varepsilon))) \end{aligned}$$

para todo $x, y \in K$ con $x \in B_\infty(y,r)$, $r \in (0,\delta)$, y por tanto, tomando volúmenes y teniendo en cuenta el paso 1,

$$\begin{aligned} &v(g(B_\infty(y,r))) \leq v(g(y) + g'(x)(B_\infty(0, r(1+\varepsilon)))) = \\ &v(g'(x)(B_\infty(0, r(1+\varepsilon)))) = |\det g'(x)| v(B_\infty(0, r(1+\varepsilon))), \end{aligned}$$

y, como $v(B_\infty(z,t)) = (2t)^n$ para todo $z \in \mathbb{R}^n$ y $t > 0$, esto equivale a

$$\begin{aligned} &v(g(B_\infty(y,r))) \leq |\det g'(x)|(2r)^n(1+\varepsilon)^n = \\ &(1+\varepsilon)^n |\det g'(x)| v(B_\infty(y,r)) \end{aligned}$$

para todo $y \in K$, $x \in K \cap B_\infty(y,r)$, $r \in (0,\delta)$. Esto prueba que, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo cubo Q de centro $y \in K$ cuyos lados midan menos que δ, y para todo $x \in K \cap Q$, se tiene

$$v(g(Q)) \leq (1+\varepsilon)^n |\det g'(x)| v(Q).$$

Ahora ya podemos deducir el resultado principal del paso 3:

Lema 7.15 *Sea $g : A \longrightarrow B$ un difeomorfismo C^1 entre dos abiertos de $\mathbb{R}^n$ y sea C un cerrado con volumen contenido en A. Entonces,*

$$v(g(C)) \leq \int_C |Jg(x)| dx.$$

Demostración: Sea $s = \operatorname{dist}_\infty(C, \partial A)$. Como C es un compacto contenido en el abierto A, se tiene $s > 0$. Sea $K = \{x \in A : \operatorname{dist}_\infty(x, C) \leq s/2\}$; claramente K es un compacto contenido en A. Además, cualquier cubo Q de lados menores que $\delta_1 := s/2$, y cuya intersección con C sea no vacía, estará contenido en K.

Ahora, aplicamos el lema anterior (7.14) a nuestro compacto K: fijado un $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe $\delta_2 > 0$ tal que, si Q es un cubo de lados menores o iguales que δ_2 y $x \in Q \cap K$, se tiene

$$v(g(Q)) \leq (1+\varepsilon)^n |\det g'(x)| v(Q). \tag{5}$$

Por otro lado, como la aplicación $x \mapsto |Jg(x)|$ es continua en el compacto C, que tiene volumen, $|Jg|$ es integrable en C. Sea S un cubo que contenga a C. Al ser $|Jg|$ integrable en C, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta_3 > 0$ tal que para cualquier partición P de S en cubos $Q_1, ..., Q_N$ cuyos lados miden menos que δ_3, y $x_1 \in S_1$, ..., $x_N \in S_N$ cualesquiera, se tiene que

$$\Big| \int_C |Jg| - \sum_{i=1}^{N} |Jg(x_i)| 1_C(x_i) v(Q_i) \Big| \leq \varepsilon,$$

y por tanto

$$\sum_{i=1}^{N} |Jg(x_i)| 1_C(x_i) v(Q_i) \leq \int_C |Jg| + \varepsilon. \tag{6}$$

Sea ahora $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Fijemos P una partición cualquiera de S en cubos de lados menores o iguales que δ, y sea

$$P_c = \{Q \in P : Q \cap C \neq \emptyset\}.$$

Para cada $Q \in P$ escojamos $x_Q \in Q$ de tal manera que $x_Q \in Q \cap C$ cuando $Q \in P_c$. Como $\delta \leq \delta_1 = s/2$, se tiene $x_Q \in Q \subseteq K$ para todo $Q \in P_c$, y entonces, por (5) y (6),

$$v(g(Q)) \leq (1+\varepsilon)^n |Jg(x_Q)| v(Q), \quad \text{y} \quad \sum_{Q \in P_c} |Jg(x_Q)| v(Q) \leq \int_C |Jg| + \varepsilon$$

para todo $Q \in P_c$.

Entonces, aplicando el Lema 7.14 y el Teorema 4.1(vii), obtenemos que

$$\begin{aligned} & v(g(C)) = v\Big(\bigcup_{Q \in P} g(C \cap Q)\Big) = \sum_{Q \in P} v(g(C \cap Q)) = \sum_{Q \in P_c} v(g(C \cap Q)) \\ & \leq \sum_{Q \in P_c} v(g(Q)) \leq \sum_{Q \in P_c} (1+\varepsilon)^n |Jg(x_Q)| v(Q) \\ & = (1+\varepsilon)^n \sum_{Q \in P} |Jg(x_Q)| 1_C(x_Q) v(Q) \leq (1+\varepsilon)^n \Big(\int_C |Jg| + \varepsilon \Big), \end{aligned}$$

es decir

$$v(g(C)) \leq (1+\varepsilon)^n \Big(\int_C |Jg| + \varepsilon \Big). \tag{8}$$

Finalmente, teniendo en cuenta que en todo este razonamiento $\varepsilon > 0$ es arbitrario e independiente de C, haciendo tender ε a cero en la desigualdad (8), obtenemos lo que deseabamos: $v(g(C)) \leq \int_C |Jg|$.

Paso 4. Lo más duro de la demostración del teorema del cambio de variables ya ha pasado, y estamos en condiciones de probar el teorema para cualquier subconjunto cerrado y con volumen de A:

Lema 7.16 *Sea $g : A \longrightarrow B$ un difeomorfismo C^1 entre dos abiertos de $\mathbb{R}^n$ y sea C un subconjunto cerrado y con volumen de A. Entonces, para toda función $f : g(C) \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable,*

$$\int_{g(C)} f = \int_C (f \circ g)|Jg|.$$

Demostración: Como las aplicaciones $x \mapsto |Jg(x)|$ y $x \mapsto 1/|Jg(x)|$ son continuas en los compactos C y $D = g(C)$ respectivamente, ambas están acotadas en dichos conjuntos, que además tienen volumen (paso 2), y por tanto $|Jg|$ es integrable en C y $|Jg^{-1}| = 1/|Jg|$ es integrable en D. Además, si S es un rectángulo que contiene a C y $D(f)$ es el conjunto de discontinuidades de la extensión canónica de f a S, es claro que $D(f) \subset B$ y $D(f)$ tiene medida cero (por ser f integrable en $g(C)$), luego, como $g^{-1} : B \longrightarrow A$ es de clase C^1, se tiene que $g^{-1}(D(f))$ tiene medida cero (ejercicio 2.24). Pero, como g es un difeomorfismo, $g^{-1}(D(f))$ es precisamente el conjunto de discontinuidades de $f \circ g$, denotado por $D(f \circ g)$. Por tanto $D(f \circ g)$ tiene medida cero, y así $f \circ g$ es integrable en C.

Sea S un rectángulo que contenga a $g(C)$, y extiéndase f a S poniendo $f = 0$ en $S \setminus g(C)$ como de costumbre. Sea P una partición cualquiera de S en subrectángulos $S_1, ..., S_N$. Utilizando el resultado del paso anterior y el hecho evidente de que $m(f, S_i) = m(f \circ g, g^{-1}(S_i))$, así como el teorema 4.1(vii), tenemos que

$$\begin{aligned}
&L(f,P) = \sum_{i=1}^N m(f,S_i)v(S_i) = \sum_{i=1}^N m(f,S_i)v(g(g^{-1}(S_i)))\\
&\leq \sum_{i=1}^N m(f,S_i)\int_{g^{-1}(S_i)} |Jg| = \sum_{i=1}^N \int_{g^{-1}(S_i)} m(f,S_i)|Jg|\\
&= \sum_{i=1}^N \int_{g^{-1}(S_i)} m(f\circ g, g^{-1}(S_i))|Jg| \leq \sum_{i=1}^N \int_{g^{-1}(S_i)} (f\circ g)|Jg| =\\
&= \int_{g^{-1}(S)} (f\circ g)|Jg| = \int_{g^{-1}(g(C))} (f\circ g)|Jg| = \int_C (f\circ g)|Jg|,
\end{aligned}$$

es decir,

$$L(f,P) \leq \int_C (f \circ g)|Jg|.$$

Como esto vale para cualquier partición P de S y f es integrable en $g(C)$, se deduce que

$$\int_{g(C)} f \leq \int_C (f \circ g)|Jg|. \tag{9}$$

Por supuesto, todo lo que se ha hecho hasta ahora, y en particular esta última desigualdad, se puede aplicar al difeomorfismo $g^{-1} : B \longrightarrow A$ en lugar de g, y a cualquier función integrable $h : C = g^{-1}(g(C)) \longrightarrow \mathbb{R}$. Así pues, si ponemos g^{-1} en lugar de g y $h = (f \circ g)|Jg|$ en lugar de f en la desigualdad (9), obtenemos

$$\int_C (f \circ g)|Jg| \leq \int_{g(C)} (f \circ g \circ g^{-1})(|Jg| \circ g^{-1})|Jg^{-1}| = \int_{g(C)} f, \tag{10}$$

ya que $g \circ g^{-1} = I$, luego $I = (g' \circ g^{-1}) \circ (g^{-1})'$, donde I es la aplicación identidad, y tomando determinantes, $1 = (|Jg| \circ g^{-1})|Jg^{-1}|$.

Finalmente, combinando las desigualdades (9) y (10) obtenemos el resultado que buscábamos:

$$\int_{g(C)} f = \int_C (f \circ g)|Jg|.$$

Paso 5. Para terminar este capítulo veremos que el teorema del cambio de variables es cierto tal y como está enunciado, incluso si $x \mapsto |Jg(x)|$ o $x \mapsto 1/|Jg(x)|$ no están acotadas sobre A y las integrales son impropias.

Sea (K_n) una sucesión cualquiera de compactos con volumen tales que

$$K_n \subseteq K_{n+1} \text{ para todo } n, \text{ y } A = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n.$$

Por el teorema 6.3), para probar que $(f \circ g)|Jg|$ es integrable en A (quizás impropia) y que $\int_A (f \circ g)|Jg| = \int_B f$, basta ver que

$$\lim_{n \to \infty} \int_{K_n} (f \circ g)|Jg| = \int_B f.$$

Ahora bien, como $g : A \longrightarrow B$ es un difeomorfismo, $(g(K_n))$ es una sucesión de compactos con volumen tales que

$$g(K_n) \subseteq g(K_{n+1}) \text{ para todo } n, \text{ y } B = \bigcup_{n=1}^{\infty} g(K_n).$$

Entonces, como f es integrable (quizás impropia) sobre B, esto implica (otra vez por el teorema 6.3) que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{g(K_n)} f = \int_B f;$$

pero, por el resultado del paso anterior,

$$\int_{g(K_n)} f = \int_{K_n} = (f \circ g)|Jg|;$$

luego, combinando estas dos últimas igualdades obtenemos lo que deseamos:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{K_n} (f \circ g)|Jg| = \int_B f.$$

Problemas

7.17 Determinar el área de la región acotada por las curvas $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x^2$ e $y = 2x^2$, por medio del cambio de variables $u = xy$, $v = y/x^2$.

7.18 Hallar el volumen de la región determinada por la intersección del cono sólido $z^2 \geq x^2 + y^2$ y la bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

7.19 Usar coordenadas cilíndricas para hallar el volumen del sólido T limitado superiormente por el plano $z = y$ e inferiormente por el paraboloide $z = x^2 + y^2$.

7.20 Demostrar que el volumen de un cono circular de radio de la base r y altura h es $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

7.21 Calcular

$$\int_D \frac{1}{1 + x^2 + y^2 + z^2} dxdydz,$$

donde D es la bola unidad de $\mathbb{R}^3$.

7.22 Utilizando coordenadas polares, calcular las integrales:

(a) $\int_D \sin(x^2 + y^2)dxdy$, siendo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(b) $\int_D |x + y|dxdy$, siendo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(c) $\int_D \log(x^2+y^2)dxdy$, siendo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x^2+y^2 \leq b^2, x \geq 0, y \geq 0\}$.

(d) $\int_D (x^2+y^2)^{-3}dxdy$, siendo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x\}$.

7.23 (a) Hallar el área limitada por las curvas en polares: $\rho = a\cos\theta$ y $\rho = a(1+\cos\theta)$; $(a > 0)$.

(b) Hallar el área limitada por la curva en polares: $\rho = a|\sin 3\theta|$; $(a > 0)$.

(c) Hallar el área limitada por la lemniscata: $(x^2+y^2)^2 = 2a(x^2-y^2)$; $(a > 0)$.

7.24 Se considera la transformación $\phi(u,v) = (u^2-v^2, 2uv)$; sea $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq u^2+v^2 \leq 9, u \geq 0, v \geq 0\}$. Determinar el conjunto $\phi(D)$ y calcular su área. *Indicación:* ¿Qué es $\phi(z)$ cuando $z = u+iv$ es un número complejo?

7.25 Se considera la transformación $\phi(u,v) = (x = u+v, y = v-u^2)$; sea D el triángulo de vértices $(0,0), (2,0)$ y $(0,2)$ en el plano (u,v). Comprobar que ϕ es un cambio de variables alrededor de D. Determinar el conjunto $\phi(D)$ y calcular su área.

7.26 Utilizando cambios de variable, calcular:

(a) $\int_D (x^2+y^2)dxdy$, siendo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2-y^2 \leq 9, 2 \leq xy \leq 4\}$.

(b) $\int_D \frac{x}{4x^2+y^2}dxdy$, siendo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq 4x^2+y^2 \leq 16, x \geq 0, y \geq 0\}$.

(c) $\int_D (x^2+y^2)dxdy$, siendo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2-y^2 \leq 1, |y| \geq 1\}$.

7.27 Calcular:

(a) $\int_V (x^2+y^2)dxdydz$, donde $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 2z \leq 4\}$.

(b) $\int_V z dxdydz$, donde $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

(c) $\int_V z(x+y)dxdydz$, donde V está limitado por: $z = 0$, $z = a$, $xy = a^2$, $2(x+y) = 5a$, $(a > 0)$.

(d) $\int_V e^x dxdydz$, donde $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.

(e) $\int_V z\sin(x^2+y^2)dxdydz$, donde $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid o \leq (R^2-x^2-y^2)^{1/2}\}$, $(R > 0)$.

(f) $\int_V |z|dxdydz$, donde $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 1, z^2 \leq x^2\}$.

(g) $\int_V (x^2+y^2+z^2)^{-2}dxdydz$, donde $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq b^2\}$.

7.28 Calcular el volumen de los cuerpos siguientes:

(a) El cuerpo limitado por los cilindros $x^2+y^2=1$ y $x^2+z^2=1$.

(b) El cuerpo limitado por la superficie $z = x^2+y^2$ y los planos $z=2$ y $z=4$.

(c) El cuerpo limitado por una esfera de radio R y un cono de ángulo en el origen 2α, si el vértice del cono está en el centro de la esfera.

(d) El cuerpo limitado por la esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ y el cilindro $(x-a/2)^2+y^2=a^2/4$.

(e) El cuerpo limitado por las superficies $x+y=z$; $xy=1$, $y=x$, $y=2x$, $z=0$.

7.29 Se dice que una aplicación $g : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es *uniformemente diferenciable en* $U \subseteq A$ si es diferenciable y además, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|g(y) - g(x) - g'(x)(y-x)\| \leq \varepsilon\|y-x\|$$

para todos x, y con $x \in U$, $\|y-x\| \leq \delta$.

Probar que si $g : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es de clase C^1 entonces, para todo subconjunto compacto $K \subset A$, g es uniformemente diferenciable en K.
Indicación: Reducirlo al caso de una función que g que tome valores escalares. Utilizar el teorema del valor medio y que la derivada g' es uniformemente continua en el compacto K.

7.30 Calcular, mediante una transformación previa de coordenadas, las integrales:

(a) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}dzdydx$ (a cilíndricas).

(b) $\int_0^{2R} \int_{-\sqrt{2Rx-x^2}}^{\sqrt{2Rx-x^2}} \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)dzdydx$ (a esféricas).

7.31 Hacer un cambio de variables a coordenadas polares y usar los teoremas sobre integrales impropias para calcular $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy$. Después, utilizar el teorema de Fubini para probar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

7.32 Enunciar y probar una versión del teorema del cambio de variables para difeomorfismos C^1 entre abiertos posiblemente no acotados e integrales impropias.

7.33 ¿Para qué valores de p es la función

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^p$$

integrable sobre B, donde B es la bola unidad euclidea de $\mathbb{R}^3$? ¿Para cuáles lo es sobre $\mathbb{R}^3 \setminus B$?

7.34 Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ la bola unidad abierta en el plano. Hallar el valor de las siguientes integrales impropias:

(a) $\int_A \left[1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right]^p dxdy$, para $p < -1$.

(b) $\int_A \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$.

7.35 Deducir fórmulas para el volumen de cuerpos de revolución en $\mathbb{R}^3$. Después calcular el volumen del toro engendrado al girar una circunferencia de radio r y centro $(a, 0, 0)$ situada en el plano $y = 0$ alrededor del eje z (se supone $0 < r < a$).

Capítulo 8

Teoremas de convergencia y derivación bajo el signo integral

En este capítulo estudiaremos sucintamente bajo qué circunstancias puede intercambiarse el orden de la integral con las operaciones de paso al límite más habituales en el análisis, tales como la convergencia de sucesiones y series de funciones o la derivación.

Una de las principales desventajas de la integral de Riemann frente a la de Lebesgue (que se estudia en cursos más avanzados) es que el límite puntual de una sucesión de funciones integrables Riemann no es en general integrable, y la convergencia puntual no es suficiente para poder intercambiar el orden de las operaciones límite e integral. Los ejemplos siguientes ilustrarán este hecho con más precisión.

Ejemplo 8.1 Sea $(r_j)_{j=1}^{\infty}$ una enumeración de los números racionales del intervalo $[0,1]$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ definamos $f_k : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ como $f_k = 1_{\{r_1,\ldots,r_k\}}$, es decir $f(x) = 1$ si $x = r_j$ para algún j con $1 \leq j \leq k$, y $f(x) = 0$ en caso contrario. Si $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ y $f = 1_A$, es claro que

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$$

para todo $x \in [0,1]$. Cada f_k es integrable por ser igual a la función cero salvo en una cantidad finita de puntos. Sin embargo, $f = 1_A$ no es integrable.

Incluso cuando el límite puntual f de una sucesión de funciones integrables (f_k) en un conjunto A sea integrable, en general no será verdad que $\lim_{k\to\infty} \int_A f_k = \int_A f$, como prueba el siguiente ejemplo.

Ejemplo 8.2 Para cada $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, definamos $f_k : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$f_k(x) = \begin{cases} k^2 x \quad \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{k}; \\ 2k - k^2 x \quad \text{si } \frac{1}{k} \leq x \leq \frac{2}{k}; \\ 0 \quad \text{si } x \geq \frac{2}{k}, \end{cases}$$

y sea $f = 0$. Es claro que $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x) = 0$ para todo x. Las funciones f_k son todas integrables, con $\int_0^1 f_k = 1$, y por supuesto $f = 0$ es integrable, con $\int_0^1 f = 0$. Obviamente,

$$1 = \lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_k \neq \int_0^1 f = 0.$$

No obstante, cuando la convergencia de f_k a f es uniforme en A entonces sí es cierto que f es integrable Riemann cuando las f_k lo son, y se cumple que

$$\lim_{k\to\infty} \int_A f_k = \int_A f.$$

Teorema 8.3 *Sea A un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^n$, y (f_k) una sucesión de funciones integrables que converge uniformemente en A a una función f. Entonces f es también integrable en A, y*

$$\lim_{k\to\infty} \int_A f_k = \int_A f.$$

Demostración: Sea S un rectángulo que contenga a A, y extendamos cada una de las funciones f_k, y también f, a S, haciéndolas valer cero en $S \setminus A$. Es claro que estas extensiones tienen la propiedad que f_k converge a f uniformemente en S. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea D_k el conjunto de los puntos de discontinuidad de la función f_k (extendida). Sea

$$B = S \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k.$$

Es evidente que todas las funciones f_k son continuas en B, y además f_k converge uniformemente a f en $B \subseteq S$. Entonces, como el límite uniforme de una sucesión de funciones continuas en un conjunto es continuo en ese conjunto, se tiene que f es continua en B. Por tanto, el conjunto D de los puntos de discontinuidad de f está contenido en $S \setminus B = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$, que tiene medida cero por ser unión numerable de conjuntos de medida cero (los D_k

tienen medida cero porque cada f_k es integrable). Luego D tiene también medida cero y así f es integrable.

Veamos ahora que $\lim_{k\to\infty}\int_A f_k = \int_A f$. Dado $\varepsilon > 0$, puesto que $f_k \to f$ uniformemente en S, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq k_0$ entonces

$$|f_k(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{v(S)}$$

para todo $x \in S$. Entonces, si $k \geq k_0$, se tiene

$$\Big|\int_A f_k - \int_A f\Big| \leq \int_A |f_k - f| = \int_S |f_k - f| \leq \int_S \frac{\varepsilon}{v(S)} = \varepsilon.$$

Por tanto $\lim_{k\to\infty}\int_A f_k = \int_A f$.

De aquí se deduce inmediatamente el siguiente corolario.

Corolario 8.4 *Sea A un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^n$, y (f_k) una sucesión de funciones integrables tal que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converge uniformemente en A a una función f. Entonces $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ es también integrable en A, y*

$$\int_A f = \sum_{k=1}^{\infty} \int_A f_k.$$

A continuación probamos un resultado que justifica la *derivación bajo el signo integral*. Utilizaremos la siguiente notación. Si $f : A\times B \subseteq \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, para cada $x_0 \in A$ consideramos la función $f_x : B \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f_{x_0}(y) = f(x_0, y)$$

y, si existe la derivada de esta función f_{x_0} en un punto $y_0 \in B$, denotaremos

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f'_{x_0}(y_0),$$

es decir, $\frac{\partial f}{\partial y}$ es la *derivada parcial* de f con respecto de la variable vectorial y. Obsérvese que, según esta definición, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ no es un número, sino una aplicación lineal. Entenderemos entonces que

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx$$

denota la forma lineal que a cada $h \in \mathbb{R}^m$ le asigna el número

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)(h)dx.$$

Teorema 8.5 *Sea U un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, y sea $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que la función derivada $(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ existe y es continua en todo U. Entonces, si A y B son subconjuntos con volumen de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente, tales que B es abierto y $A \times B \subseteq U$, se tiene que la función $F : B \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$F(y) = \int_A f(x, y)dx$$

es diferenciable en B, y

$$F'(y) = \int_A \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx$$

para todo $y \in B$.

Demostración: Para cada $(x, y) \in A \times B$, y $h \in \mathbb{R}^m$, por el teorema del valor medio sabemos que existe $c_{x,y,h}$ en el segmento $[y, y + h]$ tal que

$$f(x, y + h) - f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, c_{x,y,h})(h). \tag{1}$$

Como la función $(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ es continua en el compacto U, es uniformemente continua en U y en cualquier subconjunto suyo; en particular $\frac{\partial f}{\partial y}$ es uniformemente continua en $A \times B$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|\frac{\partial f}{\partial y}(x, z) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\| \leq \frac{\varepsilon}{v(A)}$$

para todos $z, y \in B$ tales que $\|z-y\| \leq \delta$, y en particular, como $\|c_{x,y,h}-y\| \leq \delta$ por estar $c_{x,y,h}$ en el segmento $[y, y + h]$ y ser $\|h\| \leq \delta$, se tiene que

$$\|\frac{\partial f}{\partial y}(x, c_{x,y,h}) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\| \leq \frac{\varepsilon}{v(A)} \tag{2}$$

si $(x, y) \in A \times B$ y $\|h\| \leq \delta$. Entonces, usando (1) y (2) e integrando en x, obtenemos que, para todos $y \in B$ y $h \in \mathbb{R}^m$ con $\|h\| \leq \delta$,

$$\begin{aligned}
&\big|F(y+h) - F(y) - \int_A \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)(h)dx\big| \\
&= \big|\int_A f(x,y+h)dx - \int_A f(x,y)dx - \int_A \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)(h)dx\big| \\
&= \big|\int_A [f(x,y+h) - f(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)(h)]dx\big| \\
&= \big|\int_A [\frac{\partial f}{\partial y}(x,c_{x,y,h})(h) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)(h)]dx\big| \\
&\leq \int_A \|\frac{\partial f}{\partial y}(x,c_{x,y,h}) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\| \, \|h\|dx \leq \int_A \frac{\varepsilon}{v(A)}\|h\|dx = \varepsilon\|h\|.
\end{aligned}$$

Esto prueba que para todo $y \in B$ y todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\big|F(y+h) - F(y) - \int_A \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)(h)dx\big| \leq \varepsilon\|h\|$$

si $\|h\| \leq \delta$, lo que significa que F es diferenciable en B, con

$$F'(y) = \int_A \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

para todo $y \in B$.

Una demostración alternativa de este resultado puede obtenerse generalizando la solución del problema 5.12 (es decir, combinando el teorema de Fubini con el Teorema Fundamental del Cálculo) para obtener que

$$\frac{\partial F}{\partial y_j} = \int_A \frac{\partial f}{\partial y_j}(x,y)dx$$

para cada $j = 1, ..., m$, y después usar el Teorema 8.3 para probar que todas las derivadas parciales de F son continuas, de donde se sigue que F es de clase C^1. Se dejan como ejercicio al cuidado del lector los detalles de esta otra demostración.

Problemas

8.6 Sea (f_n) la sucesión de funciones $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f_n(x) = \frac{nx^3}{1+n^8x^4}.$$

Estimar las normas uniformes $\|f_n\|_\infty$ de esta sucesión de funciones, y demostrar que la serie de números reales $\sum_{n=1}^\infty \|f_n\|$ es convergente. Concluir que la serie de funciones $\sum_{n=1}^\infty f_n$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$ a una cierta función continua f. Después calcular $\int_{-1}^1 f$ (obtener una expresión de esta integral como una serie de números reales).

8.7 Hallar el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \frac{n^2+1+y^5-x^4}{n^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy,$$

donde $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$.

8.8 Si $a > 0$ demostrar que $\lim_n \int_a^\pi \frac{\sin nx}{nx}\,dx = 0$. ¿Qué sucede si $a = 0$?

8.9 Calcular $\lim_n \int_0^{\pi/4} x^n \sin \frac{1}{x}\,dx$.

8.10 Calcular $\lim_n \int_0^1 x^2 e^{-nx^2}\,dx$ y $\lim_n \int_{1/n}^1 x^2 e^{-nx^2}\,dx$.

8.11 Calcular la diferencial de la función $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x,y) = \int_0^1 \int_0^1 \operatorname{sen}(sxy) e^t\,dsdt.$$

8.12 Hacer lo mismo con la función $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x,y) = \int_0^x yte^t\,dt + \int_0^1 \operatorname{sen}(xyt)\,dt.$$

8.13 Calcular, para cada $t \in \mathbb{R}$, el valor de la integral

$$\int_{-\infty}^\infty \cos(tx) e^{-x^2}\,dx.$$

Indicación: Considerar la función $F(t) = \int_{-\infty}^\infty \cos(tx)e^{-x^2}dx$ y derivarla usando el teorema de derivación bajo el signo integral; después desarrollar la expresión obtenida integrando por partes; finalmente resolver la ecuación diferencial así hallada. Recuérdese también que $F(0) = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

Capítulo 9

Integrales sobre caminos

Hasta ahora hemos estudiado integración de funciones sobre conjuntos (con volumen) de $\mathbb{R}^n$. En este y los próximos capítulos discutiremos la integración de funciones sobre caminos y superficies en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$, y las relaciones que pueden establecerse entre las diversas clases de integrales (por ejemplo, entre una integral sobre una superficie y otra sobre un camino cuando éste es el borde de aquélla, relación explicada por el teorema de Stokes). Estos tipos de integrales se utilizan con frecuencia en la física y de hecho su definición se hace más natural cuando se explicita alguna de las posibles interpretaciones físicas. Así, por ejemplo, la integral de linea (esto es, de un campo vectorial a lo largo de un camino) puede interpretarse como el trabajo realizado por una fuerza sobre una partícula que recorre dicho camino.

Comenzaremos este capítulo definiendo la longitud de un camino, y después estudiaremos las integrales de funciones escalares a lo largo de caminos (integrales de camino) y las integrales de funciones vectoriales a lo largo de caminos (integrales de linea). En este capítulo, como en todos los siguientes, $\|\cdot\|$ denotará la norma euclidea en $\mathbb{R}^n$.

Recordemos que un camino γ en $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es una aplicación continua de un intervalo $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ en A. Se dice en este caso que el camino γ une los puntos $p = \gamma(a)$ y $q = \gamma(b)$. Si $\gamma_1 : [a_1, b_1] \longrightarrow A$ y $\gamma_2 : [a_2, b_2] \longrightarrow A$ son dos caminos en A tales que $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$ (es decir, γ_2 comienza donde γ_1 acaba), se define la concatenación $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2$ de γ_1 y γ_2 como el camino $\gamma : [a_1, b_1 + b_2 - a_2] \longrightarrow A$,

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{si } t \in [a_1, b_1]; \\ \gamma_2(t + a_2 - b_1) & \text{si } t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2]. \end{cases}$$

Más en general, si $\gamma_1, ..., \gamma_k$ son caminos en A, se puede definir su concatenación $\gamma_1 * ... * \gamma_k$ por inducción de manera evidente. A la imagen $\gamma([a,b])$ de un camino $\gamma : [a,b] \longrightarrow A$ se le llama *traza* de γ. Si $\gamma = \gamma_1 * ... * \gamma_k$ es una concatenación de varios caminos, es claro que la traza de γ es la unión de las trazas de todos los γ_i. Finalmente, si $\gamma : [a,b] \longrightarrow A$ es un camino en A entonces el *camino inverso* $\overline{\gamma} : [a,b] \longrightarrow A$ definido por

$$\overline{\gamma}(t) = \gamma(b + a - t)$$

tiene la misma traza que γ, sólo que la recorre en sentido inverso ($\overline{\gamma}$ une $\gamma(b)$ con $\gamma(a)$).

Definición 9.1 Si $\gamma : [a,b] \longrightarrow A$ es un camino, se define la longitud de γ como

$$\ell(\gamma) = \sup\{\sum_{i=1}^{N} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| : a = t_0 < t_1 < ... < t_N = b, N \in \mathbb{N}\};$$

cuando este supremo es finito se dice que γ es un camino rectificable, o simplemente que tiene longitud finita. Nótese que el supremo se toma respecto de todas las posibles particiones $P = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_N = b\}$ de $[a,b]$. La longitud de γ es, pues, el supremo de las longitudes de todos los caminos poligonales que aproximan a γ.

A continuación enumeramos algunas propiedades elementales de la longitud de caminos.

Proposición 9.2 *Si $\gamma : [a,b] \longrightarrow A$ es un camino, entonces*

(1) $\ell(\gamma) \geq \|\gamma(b) - \gamma(a)\|$ (dicho de otra manera, la linea recta es el camino más corto entre dos puntos);

(2) Si $\varphi : [c,d] \longrightarrow [a,b]$ es una función biyectiva, entonces $\ell(\gamma) = \ell(\gamma \circ \varphi)$;

(3) Si $\gamma = \gamma_1 * ... * \gamma_k$ es concatenación de varios caminos, entonces

$$\ell(\gamma) = \ell(\gamma_1) + ... + \ell(\gamma_k);$$

(4) El camino inverso $\overline{\gamma}$ satisface que $\ell(\overline{\gamma}) = \ell(\gamma)$;

(5) Si γ es Lipschitz entonces $\ell(\gamma)$ es finita; en particular, si γ es de clase C^1 en todo $[a,b]$ entonces tiene longitud finita.

(6) Si γ tiene longitud finita l, entonces la función $\lambda : [a,b] \longrightarrow [0,l]$ definida por

$$\lambda(t) = \ell(\gamma_{|[a,t]}),$$

donde $\gamma_{|[a,t]}$ es la restricción de γ a $[a,t]$, es monótona creciente y continua.

La demostración de las propiedades (1) a (5) es sencilla y se deja al cuidado del lector. También es inmediato que la función λ de la propiedad (6) es creciente. Veamos cómo puede probarse que λ es continua en todo punto $t_0 \in [a,b]$. Basta demostrar que los límites laterales de λ en t_0 son ambos iguales a $\lambda(t_0)$. Veamos por ejemplo que $\lim_{t\to t_0^+} \lambda(t) = \lambda(t_0)$ (la demostración es totalmente análoga cuando se considera el límite por la izquierda). Puesto que, por la propiedad (3), es $\lambda(t) = \lambda(t_0) + \ell(\gamma_{|[t_0,t]})$, puede suponerse sin pérdida de generalidad que $t_0 = a$. Debemos probar, por tanto, que $\lim_{t\to a^+} \lambda(t) = 0 = \lambda(a)$. Como λ es creciente, de lo contrario tendríamos que

$$\lambda(t) \geq \varepsilon > 0 \text{ para todo } t > a,$$

donde $\varepsilon := \lim_{t\to a^+} \lambda(t)$. Al ser γ continuo en a, podemos encontrar $\delta_0 > 0$ tal que

$$\|\gamma(t) - \gamma(a)\| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

siempre que $t - a \leq \delta_0$. Por otro lado, como $\lambda(b) = \ell(\gamma)$ es finita, existe una partición $t_0 = a < t_1 < ... < t_N = b$ de $[a,b]$ tal que

$$\sum_{j=1}^{N} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| \geq \lambda(b) - \frac{\varepsilon}{4} \qquad (*)$$

Evidentemente podemos suponer (añadiendo $a + \delta_0$ a esta partición de $[a,b]$ si fuera necesario) que $t_1 - t_0 \leq \delta_0$, y por tanto $\|\gamma(t_1) - \gamma(t_0)\| \leq \varepsilon/4$, lo que combinado con $(*)$ nos da

$$\sum_{j=2}^{N} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| \geq \lambda(b) - \frac{\varepsilon}{2},$$

pero

$$\ell(\gamma_{|[t_1,b]}) \geq \sum_{j=2}^{N} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|,$$

luego

$$\ell(\gamma_{|[t_1,b]}) \geq \lambda(b) - \frac{\varepsilon}{2},$$

y así, usando la propiedad (3), obtenemos

$$\lambda(b) = \lambda(t_1) + \ell(\gamma_{|[t_1,b]}) \geq \varepsilon + \lambda(b) - \frac{\varepsilon}{2} = \lambda(b) + \frac{\varepsilon}{2},$$

luego $0 \geq \varepsilon$, lo que es absurdo. $\Box$

Es evidente que dos caminos diferentes pueden tener la misma traza. Por ejemplo, las curvas $\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ y $\beta(t) = (\cos(2t), \operatorname{sen}(2t))$, con $0 \leq t \leq 2\pi$, tienen la misma traza, a saber, la circunferencia unidad, pero mientras el primero la recorre solamente una vez, el segundo lo hace dos veces ya que viaja el doble de rápido. Por esta razón la longitud de β es también el doble que la de α. Sin embargo, cuando dos caminos con la misma traza son inyectivos, o cuando son inyectivos salvo en una cantidad finita de puntos, ambos tienen la misma longitud (ver el ejercicio 9.17); esto es una consecuencia directa de las propiedades (2) y (3) de la proposición anterior. Por lo tanto, la longitud de la traza de una curva es independiente de la parametrización de ésta, siempre que se trate de parametrizaciones inyectivas salvo quizás en una cantidad finita de puntos. Más adelante volveremos sobre el concepto de *reparametrización* de un camino. Ahora conviene detenernos para estudiar un modo más práctico de calcular la longitud de un camino que el de aplicar directamente la definición 9.1.

Cuando un camino es lo suficientemente regular, su longitud puede calcularse mediante una integral (quizás impropia, o incluso divergente). Un camino $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ se dice que es de clase C^1 a trozos si su derivada existe y es continua salvo quizás en una cantidad finita de puntos de $[a,b]$. En lo que sigue, consideraremos casi exclusivamente caminos de clase C^1 a trozos, de modo que los lectores poco pacientes muy bien podrían tomar la fórmula (1) de la siguiente proposición como una definición y saltarse su demostración.

Proposición 9.3 *Sea $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un camino de clase C^1 a trozos. Entonces*

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt. \tag{1}$$

Es conveniente observar que no todos los caminos continuos y C^1 a trozos tienen longitud finita (ver ejercicio 9.15); por tanto la integral $\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$ puede ser infinita. Lo que nos dice (1) es que $\ell(\gamma)$ es finita si y sólo si $\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$ lo es, y en este caso estas dos cantidades valen lo mismo.

Demostración:

Caso 1. Consideraremos primero el caso en que γ es de clase C^1 en todo el intervalo $[a,b]$. Como este intervalo es compacto, la derivada γ es uniformemente continua y acotada en $[a,b]$. En particular $t \mapsto \|\gamma'(t)\|$ es integrable en $[a,b]$ y $\int_a^b \|\gamma'(t)\|dt$ es finita. También sabemos que $\ell(\gamma)$ es finita, puesto que γ es Lipschitz. Por tanto en este caso sólo tenemos que probar que $\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|dt$. Veámoslo.

Como la derivada de γ es continua en el compacto $[a,b]$, sus funciones componentes $\gamma_1', ..., \gamma_n'$ son uniformemente continuas en $[a,b]$, lo que supone que la función

$$[a,b]^n \ni (s^1, ..., s^n) \mapsto \left(\sum_{j=1}^n |\gamma_j'(s^j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

es uniformemente continua en $[a,b]^n$, y por tanto, fijado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que si $s^j, s \in [a,b]$, $j = 1, ..., n$, y $|s^j - s| \leq \delta_1$ entonces

$$\left| \left(\sum_{j=1}^n |\gamma_j'(s^j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\sum_{j=1}^n |\gamma_j'(s)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right| \leq \frac{\varepsilon}{3(b-a)}. \tag{2}$$

Ahora, como $\|\gamma'\|$ es integrable sobre $[a,b]$, por el teorema de Darboux, existe $\delta_2 > 0$ tal que, si $P = \{t_0 = a < t_1 < ... < t_N = b\}$ es una partición de $[a,b]$ en intervalos de longitud menor o igual que δ_2 entonces

$$\Big| \int_a^b \|\gamma'(t)\|dt - \sum_{i=1}^N \|\gamma'(t_{i-1})\|(t_i - t_{i-1}) \Big| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3}$$

Por otro lado, por definición de $\ell(\gamma)$, y teniendo en cuenta que esta longitud es finita, existe $P = \{t_0 = a < t_1 < ... < t_N = b\}$ partición de $[a,b]$ tal que

$$\left| \ell(\gamma) - \sum_{i=1}^N \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4}$$

No hay inconveniente en suponer (añadiendo puntos si fuera necesario) que esta partición P tiene la propiedad de que $|t_i - t_{i-1}| \leq \delta$, donde $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$.

Por el teorema del valor medio aplicado a cada función componente $\gamma_j : [a,b] \to \mathbb{R}$ del camino γ en cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, sabemos que existe $s_i^j \in [t_{i-1}, t_i]$ tal que

$$\gamma_j(t_i) - \gamma_j(t_{i-1}) = \gamma_j'(s_i^j)(t_i - t_{i-1}). \tag{5}$$

Usando (2) y (5) obtenemos que

$$\left|\sum_{i=1}^{N}\|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})\|-\sum_{i=1}^{N}\|\gamma'(t_{i-1})\|(t_i-t_{i-1})\right|=$$

$$\left|\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{n}|\gamma_j'(s_i^j)|^2\right)^{\frac{1}{2}}(t_i-t_{i-1})-\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{n}|\gamma_j'(t_{i-1})|^2\right)^{\frac{1}{2}}(t_i-t_{i-1})\right|\leq$$

$$\sum_{i=1}^{N}\left|\left(\sum_{j=1}^{n}|\gamma_j'(s_i^j)|^2\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\sum_{j=1}^{n}|\gamma_j'(t_{i-1})|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right|(t_i-t_{i-1})\leq$$

$$\frac{\varepsilon}{3(b-a)}\sum_{i=1}^{N}(t_i-t_{i-1})=\frac{\varepsilon}{3},$$

lo que combinado con (3) y (4) nos da

$$\left|\ell(\gamma)-\int_a^b\|\gamma'(t)\|dt\right|\leq 3\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

Como esto sirve para todo $\varepsilon>0$, deducimos que $\ell(\gamma)=\int_a^b\|\gamma'(t)\|dt$.

Caso 2. Ahora consideraremos el caso en que γ es continua en $[a,b]$ y la derivada $\gamma'(t)$ existe y es continua en el intervalo abierto (a,b). En primer lugar veamos que $\ell(\gamma)$ es finita si y solo si la integral impropia $\int_a^b\|\gamma'(t)\|dt$ converge. En efecto, supongamos que esta integral es finita. Como γ es continua, dado $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que si $a<t<s<b$, con $|t-a|\leq\delta$ y $|b-s|\leq\delta$, entonces

$$\|\gamma(t)-\gamma(a)\|\leq\varepsilon \qquad \text{y} \qquad \|\gamma(s)-\gamma(b)\|\leq\varepsilon,$$

y por tanto, para toda partición $P=\{a=t_0<t_1<...<t_N=b\}$ de $[a,b]$ en intervalos de longitud menor o igual que δ, se tendrá (aplicando el caso 1 a γ en $[t_1,t_{N-1}]$) que

$$\sum_{i=1}^{N}\|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})\|\leq$$

$$\|\gamma(t_1)-\gamma(a)\|+\ell(\gamma_{|[t_1,t_{N-1}]})+\|\gamma(b)-\gamma(t_{N-1})\|=$$

$$\|\gamma(t_1)-\gamma(a)\|+\int_{t_1}^{t_{N-1}}\|\gamma'(s)\|ds+\|\gamma(b)-\gamma(t_{N-1})\|\leq$$

$$2\varepsilon+\int_{t_1}^{t_{N-1}}\|\gamma'(s)\|ds\leq 2\varepsilon+\int_a^b\|\gamma'(s)\|ds,$$

y esto implica que $\ell(\gamma)$ es finita.

Por otro lado, si $\ell(\gamma)$ es finita, sabemos que, fijando $r \in (a,b)$, la función $\lambda : [r,b] \longrightarrow [0,l]$ definida por

$$\lambda(t) = \ell(\gamma_{|[r,t]}),$$

donde $\gamma_{|[r,t]}$ es la restricción de γ a $[r,t]$, es monótona creciente y continua. En particular,

$$\lim_{t\to b} \ell(\gamma_{|[r,t]}) = \ell(\gamma_{|[r,b]}),$$

y como, por lo anterior, es $\ell(\gamma_{|[r,t]}) = \int_r^t \|\gamma'(s)\|ds$, se deduce que

$$\int_r^b \|\gamma'(s)\|ds = \lim_{t\to b} \int_r^t \|\gamma'(s)\|ds = \lim_{t\to b} \ell(\gamma_{|[r,t]}) = \ell(\gamma_{|[r,b]}).$$

Un razonamiento análogo prueba que

$$\int_a^r \|\gamma'(s)\|ds = \lim_{t\to a} \int_t^r \|\gamma'(s)\|ds = \ell(\gamma_{|[a,r]}).$$

Entonces

$$\ell(\gamma) = \ell(\gamma_{|[a,r]}) + \ell(\gamma_{|[r,b]}) = \int_a^r \|\gamma'(s)\|ds + \int_r^b \|\gamma'(s)\|ds = \int_a^b \|\gamma'(s)\|ds.$$

Esto prueba (1) en el caso en que γ es continua en $[a,b]$ y la derivada $\gamma'(t)$ existe y es continua en el intervalo abierto (a,b).

Caso 3. Por último, consideremos el caso más general en que γ es continua y de clase C^1 a trozos. El camino γ puede expresarse entonces como concatenación de una cantidad finita de caminos γ_j cada uno de los cuales está en el caso anterior; es decir, $\gamma = \gamma_1 * ... * \gamma_k$, con $\gamma_j = \gamma_{|[t_{j-1},t_j]}$, para ciertos $a = t_0 < t_1 < ... < t_k = b$, y cada γ_j es de clase C^1 en el intervalo abierto (t_{j-1}, t_j). Entonces, aplicando las propiedades de la longitud de caminos y lo ya demostrado, se tiene que

$$\ell(\gamma) = \sum_{j=1}^{k} \ell(\gamma_j) = \sum_{j=1}^{k} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\gamma'(s)\|ds = \int_a^b \|\gamma'(s)\|ds,$$

y así (1) queda probada en toda su generalidad. $\Box$

Retomemos ahora la cuestión de las diferentes parametrizaciones de un camino.

Definición 9.4 Sea $\alpha : [a,b] \longrightarrow A \subseteq \mathbb{R}^n$ un camino C^1 a trozos, y sea $h : [c,d] \longrightarrow [a,b]$ una biyección de clase C^1. Entonces, la composición

$$\beta = \alpha \circ h : [c,d] \longrightarrow A, \ \beta(t) = \alpha(h(t)),$$

se dice que es una reparametrización de α. Es claro que si β es reparametrización de α entonces ambos caminos tienen la misma traza e incluso la misma longitud (propiedad (2) de la proposición 9.2). Así, h no es más que un cambio de variable que modifica la rapidez con que se recorre el camino. En efecto, nótese que $\beta'(t) = \alpha'(h(t))h'(t)$, de modo que el vector velocidad de β se multiplica por el factor escalar $h'(t)$. Además, como h es una biyección C^1, h es o bien estrictamente creciente, o bien o estrictamente decreciente, y la derivada $h'(t)$ no cambia de signo; en el primer caso se tendrá $h(c) = a$ y $h(d) = b$, luego β recorre la traza de α en el mismo sentido que lo hace α (se dice entonces que la reparametrización β *conserva la orientación*); y en el segundo caso es $h(c) = b$ y $h(d) = a$, luego β recorre la traza de α en sentido opuesto al que lo hace α: comienza en $\alpha(b)$ y termina en $\alpha(a)$ (en este caso se dice que β *invierte la orientación*).

Cuando un camino $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es *regular* (es decir, es de clase C^1 y tiene la propiedad de que $\alpha'(t) \neq 0$ para todo t), siempre existe una reparametrización $\beta : [0,l] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de α que conserva la orientación y que tiene la agradable propiedad de que

$$\int_0^t \|\gamma'(s)\| ds = t$$

para todo $t \in [0,l]$, es decir, el parámetro t coincide con la longitud de la curva recorrida por β desde el instante $s=0$ hasta el tiempo $s=t$. Se dice entonces que β está *parametrizado por la longitud de arco*. Esta condición equivale a decir que β recorre la traza de α con rapidez constante igual a 1:

$$\|\beta'(t)\| = 1$$

para todo $t \in [0,l]$. Ver el ejercicio 9.22. La reparametrización por la longitud de arco simplifica muchas veces las demostraciones y se utiliza sistemáticamente en geometría diferencial de curvas; ver por ejemplo la demostración de la desigualdad isoperimétrica en el capítulo sobre el teorema de Green.

A continuación daremos la definición de integral de una función escalar $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sobre un camino $\gamma : [a,b] \longrightarrow A$. Las interpretaciones físicas de este tipo de integral son variadas. Por ejemplo, supóngase que la traza de γ representa un alambre de densidad variable, y la función $f(x, y, z)$ denota la densidad de masa del alambre en el punto (x, y, z); entonces la integral $\int_\gamma f$ será la masa total del alambre.

Definición 9.5 Sean $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalar continua, y $\gamma : [a, b] \longrightarrow A$ un camino C^1 a trozos sobre su dominio. Se define la integral de f sobre γ por

$$\int_\gamma f ds = \int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\| dt$$

cuando esta integral existe.

Nótese que si la longitud de γ es finita entonces la integral existe siempre. Por otra parte, cuando $f = 1$ la integral $\int_\gamma f ds$ es precisamente la longitud de γ.

Ejemplo 9.6 Sean $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la hélice $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, y $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Calcular la integral $\int_\gamma f(x, y, z) ds$.

Ejemplo 9.7 Hallar la masa de un alambre que sigue la circunferencia plana de radio 50 centímetros y centro el origen, y cuya densidad de masa en cada punto (x, y) de la circunferencia viene dada por la función $f(x, y) = x^2 + 2|y|$ gramos por centímetro de alambre.

Cuando $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva plana y $z = f(x, y) \geq 0$, puede interpretarse que $f(x, y)$ es la altura de una valla levantada sobre la curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$; entonces la integral $\int_\gamma f(x, y) ds$ representa el área de dicha valla.

Ejemplo 9.8 Calcular el área de una valla de base una circunferencia de radio 10 metros y cuya altura en cada punto es un metro más que la décima parte de la distancia al cuadrado de dicho punto a un punto fijo situado sobre la circunferencia.

Pasamos ahora a definir la integral de un *campo vectorial* sobre un camino. A este tipo de integral se le llama *integral de linea*. La principal interpretación física de la integral de linea es la siguiente. Consideremos $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, un campo de fuerza en el espacio tridimensional y una partícula p (por ejemplo, una carga pequeña inmersa en un campo eléctrico, o una masa pequeña en un campo gravitatorio) que está sujeta a esta fuerza y se mueve a lo largo de un camino $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mientras F actúa sobre ella. Es deseable tener una fórmula para el trabajo realizado por el campo F

sobre la partícula p. Si γ fuera un trozo de linea recta equivalente a un vector d y F fuera constante sobre γ entonces las leyes elementales de la física nos dicen que el trabajo realizado por F al mover p sobre d es el producto escalar

$$\text{trabajo realizado por } F = F \cdot d,$$

es decir, el producto de la intensidad de la fuerza por el desplazamiento en la dirección de la fuerza. En el caso general en que la curva γ no es recta ni la fuerza F constante, puede pensarse que la curva se aproxima por una sucesión de segmentos infinitesimales sobre cada uno de los cuales la fuerza sí es constante, y que sumando los productos de $F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$, es decir, los trabajos realizados sobre cada uno de esos segmentos infinitesimales que contienen el punto $\gamma(t)$ y que tienen la dirección de la tangente a γ en ese punto, $\gamma'(t)$, podemos obtener la fuerza total realizada por F sobre p al moverla a lo largo de γ. Esto nos lleva a la siguiente fórmula:

$$\text{trabajo realizado por } F = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt,$$

que es precisamente la definición de integral de linea.

Definición 9.9 Sea $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, un campo vectorial continuo sobre la imagen de un camino C^1 a trozos $\gamma : [a, b] \longrightarrow A$ con longitud finita. Se define la integral de linea de F sobre γ por la fórmula

$$\int_\gamma F \cdot ds = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt,$$

donde $F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ denota el producto escalar de $F(\gamma(t))$ con $\gamma'(t)$. Si $n = 3$ y $F = (F_1, F_2, F_3)$, donde las F_i son las funciones componentes de F, otro modo frecuente de denotar esta integral es

$$\int_\gamma F \cdot ds = \int_\gamma F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = \int_a^b \big(F_1 \frac{dx}{dt} + F_2 \frac{dy}{dt} + F_3 \frac{dz}{dt}\big) dt.$$

De la expresión $F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$ se dice que es una *forma diferencial*; ver el último capítulo para una breve introducción a la teoría de formas diferenciales.

Ejemplo 9.10 Si $F(x, y, z) = (x, y, z)$ y γ es la hélice $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, calcular la integral de linea $\int_\gamma F \cdot ds$. Calcular también

$$\int_\sigma x^2 dx + xydy + dz,$$

donde $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (t, t^2, 1)$, con $0 \leq t \leq 1$.

A continuación veremos que las integrales a lo largo de un camino son invariantes respecto de reparametrizaciones de dicho camino.

Proposición 9.11 *Sean $\alpha : [a,b] \longrightarrow A \subseteq \mathbb{R}^n$ un camino C^1 a trozos, y $\beta : [c,d] \longrightarrow A$ una reparametrización de α. Entonces, para todo campo escalar $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, es*
$$\int_\alpha f ds = \int_\beta f ds,$$
y para todo campo vectorial $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^3$, se tiene que, o bien
$$\int_\beta F \cdot ds = \int_\alpha F \cdot ds, \quad \textit{si } \beta \textit{ conserva la orientación},$$
o bien
$$\int_\beta F \cdot ds = -\int_\alpha F \cdot ds, \quad \textit{si } \beta \textit{ invierte la orientación}.$$

Demostración: Por hipótesis, existe una biyección $h : [c,d] \longrightarrow [a,b]$ de clase C^1 tal que $\beta = \alpha \circ h$, y por la regla de la cadena es
$$\beta'(t) = \alpha'(h(t))h'(t),$$
de modo que
$$\int_\beta F \cdot ds = \int_c^d [F(\alpha(h(t))) \cdot \alpha'(h(t))]h'(t).$$
Entonces, si h conserva la orientación, $|h'(t)| = h'(t)$ para todo t, y aplicando el teorema de cambio de variables $s = h(t)$, obtenemos que
$$\int_\alpha F \cdot ds = \int_a^b F(\alpha(s)) \cdot \alpha'(s) ds = \int_{h(c)}^{h(d)} = F(\alpha(s)) \cdot \alpha'(s) ds$$
$$= \int_c^d [F(\alpha(h(t))) \cdot \alpha'(h(t))]h'(t) dt = \int_\beta F \cdot ds.$$
Por otra parte, si h invierte la orientación entonces $|h'(t)| = -h'(t)$, y en este caso es
$$\int_\alpha F \cdot ds = \int_{h(d)}^{h(c)} F(\alpha(s)) \cdot \alpha'(s) ds = \int_c^d [F(\alpha(h(t))) \cdot \alpha'(h(t))]|h'(t)| dt$$
$$= -\int_c^d [F(\alpha(h(t))) \cdot \alpha'(h(t))]h'(t) dt = -\int_\beta F \cdot ds.$$

Por último, en el caso de integral de un campo escalar, tanto si h conserva la orientación como si la invierte, se tiene que

$$f(\beta(t))\|\beta'(t)\| = f(\alpha(h(t)))\|\alpha'(h(t))h'(t)\| = f(\alpha(h(t)))\|\alpha'(h(t))\||h'(t)|,$$

de donde, aplicando el teorema de cambio de variables, podemos concluir que

$$\int_{\alpha} f ds = \int_{\beta} f ds.$$

La proposición anterior es muy útil en la práctica, pues nos permite usar cualquier reparametrización de un camino para calcular una integral a lo largo de él.

Ejemplo 9.12 Calcular la integral de linea

$$\int_{\gamma} \cos x d + \sin y dy,$$

donde γ es un camino que recorre la semicircunferencia $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$, en el sentido contrario a las agujas del reloj.

Para terminar este capítulo daremos una definición y algunas observaciones sobre las *curvas simples* y las *curvas cerradas simples*, una clase de curvas que son particularmente útiles, entre otras razones porque permiten escribir las integrales sobre sus trazas sin hacer referencia a una parametrización concreta, ya que dichas integrales son independientes de la parametrización elegida; de este modo se consigue expresar la teoría de integrales a lo largo de curvas simples de manera más intrínseca y más geométrica.

Definición 9.13 Se dice que $C \subset \mathbb{R}^n$ es una *curva simple* si C es la traza de un camino inyectivo, es decir, si existe un camino $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ inyectivo tal que $\gamma([a, b]) = C$. Es decir, una curva simple es la traza de un camino que no se corta a sí mismo. Los puntos $p = \gamma(a)$ y $q = \gamma(b)$ se llaman los extremos de la curva simple C. Nótese que estos extremos son los mismos para cualquier reparametrización α de γ, sólo puede cambiar el sentido en que se recorre C: o bien p es el punto inicial de α y q su punto final, o bien es al revés. Por tanto, toda curva simple con extremos p y q tiene dos posibles *orientaciones* o *direcciones*: C puede estar *dirigida* o bien de p a q, o bien de q a p. La curva C, junto con una de estas dos orientaciones se dice que es una *curva simple orientada*.

Por otra parte, se dice que $C \subset \mathbb{R}^n$ es una *curva cerrada simple* si existe un camino $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\gamma([a, b]) = C$, $\gamma(a) = \gamma(b)$, y γ es inyectivo en el intervalo $[a, b)$. Si γ satisface la condición $\gamma(a) = \gamma(b)$, pero no es necesariamente inyectivo en $[a, b)$, se dice solamente que $C = \gamma([a, b])$ es una *curva cerrada*. Como en el caso anterior, hay dos posibles orientaciones para una curva cerrada simple, dependiendo del sentido en que ésta se recorre. La curva C, junto con una de estas dos orientaciones se dice que es una *curva cerrada simple orientada*.

A propósito de curvas cerradas simples no debemos dejar de recordar el siguiente resultado fundamental, conocido como *teorema de la curva de Jordan*.

Teorema 9.14 (de la curva de Jordan) *Sea C una curva cerrada simple en el plano $\mathbb{R}^2$. Entonces $\mathbb{R}^2 \setminus C$ tiene exactamente dos componentes conexas, una acotada y homeomorfa al interior del círculo unidad, y otra no acotada (homeomorfa al exterior del círculo unidad).*

La demostración de este teorema, bastante más difícil de lo que su inocente enunciado permite suponer, suele hacerse en los cursos de topología algebraica o de geometría diferencial.

Si $C \subset A \subseteq \mathbb{R}^n$ es una curva simple orientada o una curva cerrada simple orientada, y $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un campos vectorial, puede definirse sin lugar a ambigüedades la integral de linea de F a lo largo de C, $\int_C F \cdot ds$; basta elegir cualquier parametrización γ de C que conserve su orientación, y poner

$$\int_C F \cdot ds = \int_\gamma F \cdot ds;$$

la proposición 9.11 nos garantiza que $\int_\gamma F \cdot ds$ vale lo mismo para cualquier parametrización γ de C que conserve su orientación. Análogamente, si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar, se define

$$\int_C f ds = \int_\gamma f ds,$$

donde γ es cualquier parametrización de C que conserve su orientación.

Debe notarse que en todo lo anterior es fundamental el hecho de que las curvas son simples (es decir, inyectivas salvo quizás en un punto a lo sumo). Es posible que dos caminos γ y σ tengan como imagen la misma curva e induzcan la misma orientación sobre ella, y sin embargo $\int_\gamma F \cdot ds \neq \int_\sigma F \cdot ds$; por ejemplo, esto sucede para $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ y $\sigma(t) = (\cos 2t, \sin 2t, 0)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, con $F(x, y, z) = (y, 0, 0)$. Claramente γ y σ tienen la misma imagen, a saber la circunferencia unidad C, que es una curva cerrada simple, y la recorren en el mismo sentido, pero mientras que γ lo hace solo una vez y por tanto es una parametrización de la curva cerrada simple C, σ la recorre dos veces; en particular σ no es inyectiva y no vale como parametrización de la curva cerrada simple C.

Si C es una curva simple orientada, o una curva cerrada simple orientada, denotaremos por C^- la misma curva, pero con la orientación opuesta. Por otra parte, si C está compuesta de varias curvas simples (posiblemente cerradas) orientadas $C_1, ..., C_k$, recorridas de forma sucesiva, tales que el punto final de cada una de ellas es el inicial de la siguiente, denotaremos $C = C_1 + ... + C_k$. Esto equivale a decir que $\gamma = \gamma_1 * ... * \gamma_k$, donde cada γ_i es una parametrización de C_i, y γ es una parametrización de C. De hecho, dados varias curvas (quizás cerradas) simples orientadas C_1, ..., C_k, podemos incluso eliminar la restricción de que el punto inicial de C_i sea el inicial de C_{i+1}, y definir formalmente la *suma de curvas*

$$C = C_1 + ... + C_k,$$

e incluso también la *diferencia de curvas* como la suma de una con la otra orientada al revés, es decir

$$C_1 - C_2 = C_1 + C_2^-.$$

De este modo, el conjunto de todas las sumas finitas formales de curvas (posiblemente cerradas) simples orientadas de clase C^1 incluidas en un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ genera un grupo, cuyo elemento neutro denotaremos 0. Si $C = C_1 + ... + C_k$ es un elemento de este grupo y $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial continuo, se define

$$\int_C F \cdot ds = \int_{C_1} F \cdot ds + \int_{C_2} F \cdot ds + ... + \int_{C_k} F \cdot ds,$$

bien entendido que $\int_0 F \cdot ds = 0$, y así se tiene también que

$$\int_{C_1 + C_2^-} F \cdot ds = \int_{C_1} F \cdot ds - \int_{C_2} F \cdot ds.$$

Estas definición es coherente con las propiedades de la concatenación de caminos y de las integrales a lo largo de caminos: si γ es un camino C^1 a trozos que es concatenación de caminos de clase C^1 a trozos contenidos en $A \subseteq \mathbb{R}^n$, digamos $\gamma = \gamma_1 * ... * \gamma_k$, entonces

$$\int_\gamma F \cdot ds = \int_{\gamma_1} F \cdot ds + \int_{\gamma_2} F \cdot ds + ... + \int_{\gamma_k} F \cdot ds,$$

para todo campo vectorial $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (ver ejercicios 9.29 y 9.30).

Una de las razones para escribir una curva C como suma de componentes curvas C_i es la de que a menudo resulta más fácil parametrizar dichas componentes una por una que parametrizar C directamente. Por ejemplo, si C es el cuadrado de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ y $(1,1)$ en $\mathbb{R}^2$, orientado según el orden de dichos vértices, para calcular $\int_C F \cdot ds$ es más fácil evaluar $\int_{C_i} F \cdot ds$, donde C_i es cada segmento del cuadrado, y después sumar estas cuatro integrales de linea.

Problemas

9.15 Sea $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ el camino definido por $\gamma(t) = (t, t \operatorname{sen}(1/t))$ si $t > 0$, y $\gamma(0) = (0,0)$. Probar que γ es continuo y de clase C^1 a trozos en $[0,1]$ y de hecho es diferenciable de clase C^∞ en $(0,1]$, pero su longitud es infinita.

9.16 Hacer un dibujo de la traza de los siguientes caminos, y calcular su longitud:

(a) $\gamma(t) = (R\cos 2t, R\sin 2t)$, $0 \le t \le \pi$.

(b) $\gamma(t) = (R\cos t, -R\sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

(c) $\gamma(t) = (R\cos t^2, R\sin t^2)$, $0 \le t \le \sqrt{2\pi}$.

(d) $\gamma(t) = (t^4, t^4)$, $-1 \le t \le 1$.

(e) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \le t \le 4\pi$.

(f) $\gamma(t) = (R\cos 2t, R\sin 2t)$, $0 \le t \le \pi$.

(g) $\gamma(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t)$, $0 \le t < \infty$ (espiral logarítmica).

(h) $\gamma(t) = (t^3, t^2)$, $-2 \le t \le 2$.

(i) $\gamma(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$, $-4 \le t \le 4$.

9.17 Sean α y β dos caminos que tienen la misma traza. Supongamos que ambos son inyectivos excepto en una cantidad finita de puntos. Probar que α y β tienen la misma longitud. *Indicación:* Suponer primero que tanto α como β son inyectivos en todo su dominio, y deducir el resultado de la propiedad (2) de la proposición 9.3. Para probar el caso más general, expresar α y β como concatenación de caminos inyectivos y aplicar lo anterior.

9.18 Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 a trozos. Probar que la longitud de la gráfica de f sobre $[a,b]$ es

$$\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}dx.$$

9.19 Definamos $\alpha : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$\alpha(t) = \begin{cases} (-e^{-1/t^2}, e^{-1/t^2}) \quad \text{si } t < 0; \\ (0,0) \quad \text{si } t = 0; \\ (e^{-1/t^2}, e^{-1/t^2}) \quad \text{si } t > 0, \end{cases}$$

y sea $\beta : [-e^{-1}, e^{-1}] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\beta = (t, |t|)$. Probar que α y β tienen la misma traza (a saber, un trozo de la gráfica de la función valor absoluto); sin embargo α es de clase C^∞ en todo su dominio, mientras que β no es diferenciable en el origen. No obstante, obsérvese que $\alpha'(0) = 0$; es decir, α debe detenerse en $t = 0$ para poder ser diferenciable en ese punto. Generalizar este hecho: probar que si $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ es un camino diferenciable y su traza coincide con la gráfica de una función f cuyas derivadas laterales (no necesariamente finitas) son diferentes en un punto x_0 (y en particular la función no es derivable en ese punto), entonces $\alpha'(t) = 0$ para todos los t tales que $x(t) = x_0$. Por otra parte, si sólo se supone que f no es derivable en x_0, probar que al menos se tiene $x'(t) = 0$ para todo t con $x(t) = x_0$.

9.20 Sea $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un camino C^1 tal que $\gamma'(t) \neq 0$ para todo t. Probar que $\|\gamma(t)\|$ es una constante no nula si y sólo si el vector velocidad $\gamma'(t)$ es ortogonal al vector posición $\gamma(t)$ para todo t.

9.21 Un camino α de clase C^2 tiene la propiedad de que su segunda derivada $\alpha''(t)$ es idénticamente cero. ¿Qué puede decirse sobre α?

9.22 *Reparametrización de curvas por la longitud de arco.*
Un camino $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ se dice que es *regular* si es de clase C^1 y tiene

la propiedad de que$\gamma'(t) \neq 0$ para todo t. Se dice que un camino regular γ está *parametrizada por la longitud de arco* si

$$\int_a^t \|\gamma'(s)\| ds = t - a$$

para todo $t \in [a, b]$, es decir, el parámetro $t - a$ coincide con la longitud de la curva recorrida por γ desde el instante $s = a$ hasta el tiempo $s = t$. Comprobar que γ está parametrizado por la longitud de arco si y sólo si

$$\|\gamma'(t)\| = 1$$

para todo $t \in [a, b]$, es decir, el vector velocidad del camino tiene longitud constante e igual a 1. Después, demostrar que todo camino regular puede reparametrizarse por la longitud de arco. Es decir, si $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un camino regular, existe otro camino $\beta : [0, l] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ parametrizado por la longitud de arco tal que α y β tienen la misma traza y la misma longitud. *Indicación:* Defínase

$$u = u(t) = \int_a^t \|\alpha'(s)\| ds;$$

entonces, como $u'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$ para todo t, la función $u = u(t)$ tiene una inversa diferenciable $u^{-1} : [0, l] \longrightarrow [a, b]$. Póngase entonces $\beta = \alpha \circ u^{-1}$, y compruébese que β y α tienen la misma traza, y $\|\beta'(s)\| = 1$ para todo s.

9.23 Sea γ una curva en el plano cuya expresión en coordenadas polares viene dada por $\rho = \rho(\theta)$, con $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$. Demostrar que su longitud es

$$\ell(\gamma) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2} d\theta.$$

9.24 Calcular la longitud de la cardioide $\rho = a(1 + \cos\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

9.25 En los siguientes casos, calcular la integral de f a lo largo de γ:

(a) $f(x, y) = 1 + y$; $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, $0 \leq t \leq 3\pi/2$.

(b) $f(x, y, z) = xyz$; $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 3)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

(c) $f(x, y, z) = x + y + z$; $\gamma(t) = (\sin t, \cos t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

9.26 En los siguientes casos, calcular la integral del campo F a lo largo de la curva γ:

(a) $F(x,y) = (-x^2y, xy^2)$; $\gamma(t) = (\sin t, \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

(b) $F(x,y,z) = (x,y,z)$; $\gamma(t) = (\sin t, \cos t, t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

(c) $f(x,y,z) = (y^2, x^2)$; $\gamma \equiv \{(x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, y \ge 0\}$, recorrida en sentido positivo.

9.27 Calcular:

(a) $\int_\gamma ydx - xdy$; $\quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

(b) $\int_\gamma x^2dx + xydy$; $\quad \gamma$ es el cuadrado de vértices $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$, en sentido positivo.

(c) $\int_\gamma \sin zdx + \cos zdy - (xy)^{1/3}dz$; $\quad \gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, t)$, $0 \le t \le 7\pi/2$.

(d) $\int_\gamma ydx + (3y^2 - x)dy + zdz$; $\quad \gamma(t) = (t, t^n, 0)$, $0 \le t \le 1$; siendo $n \in \mathbb{N}$.

(e) $\int_\gamma 2xydx + (x^2 + z)dy + ydz$; $\quad \gamma$ es el segmento de $(1,0,2)$ a $(3,4,1)$.

(f) $\int_\gamma xydx + yzdy + xzdz$; $\quad \gamma \equiv \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx, z = x, y \ge 0\}$.

9.28 Consideramos la fuerza $F(x,y,z) = (x,y,z)$. Calcular el trabajo realizado al mover una particula sobre la parábola $y = x^2, z = 0$, desde $x = 1$ hasta $x = 2$.

9.29 Probar que si γ es un camino C^1 a trozos que es concatenación de caminos de clase C^1 a trozos contenidos en $A \subseteq \mathbb{R}^n$, digamos $\gamma = \gamma_1 * ... * \gamma_k$, entonces

$$\int_\gamma F \cdot ds = \int_{\gamma_1} F \cdot ds + \int_{\gamma_2} F \cdot ds + ... + \int_{\gamma_k} F \cdot ds,$$

y

$$\int_\gamma f ds = \int_{\gamma_1} f ds + \int_{\gamma_2} f ds + ... + \int_{\gamma_k} f ds,$$

para todo campo vectorial $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y todo campo escalar $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$.

9.30 Recordemos que si $\gamma : [a,b] \longrightarrow A$ es un camino en $A \subseteq \mathbb{R}^n$ entonces el *camino inverso* $\overline{\gamma} : [a,b] \longrightarrow A$ se define por

$$\overline{\gamma}(t) = \gamma(b + a - t).$$

Probar que para todo campo vectorial $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$\int_{\overline{\gamma}} F \cdot ds = -\int_{\gamma} F \cdot ds,$$

mientras que si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar entonces es

$$\int_{\overline{\gamma}} f ds = \int_{\gamma} f ds.$$

Capítulo 10

Campos conservativos

En este capítulo continuaremos estudiando las integrales de linea, concentrándonos en la siguiente pregunta: ¿bajo qué circunstancias la integral de linea de un campo vectorial no depende tanto del camino a lo largo del que se integra, sino sólo de los puntos inicial y final de su trayectoria?

Comenzaremos con un resultado que generaliza el teorema fundamental del cálculo y que también es muy útil para calcular las integrales de linea de campos vectoriales que son gradientes (derivadas) de campos escalares; en este caso la integral del campo vectorial gradiente dependerá solamente del valor del campo escalar correspondiente en los extremos del camino. Utilizaremos la siguiente notación: si $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar de clase C^1, su función derivada se llama también *gradiente*, y se denota

$$\nabla f(x) = f'(x) = \big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\big)$$

para cada $x \in A$. En este caso se tiene que $\nabla f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial continuo en A. Recíprocamente, se dice que un campo vectorial continuo $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un *campo vectorial gradiente* si existe un cierto campo escalar $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $F = \nabla f$. En este caso se dice que f es una función o campo *potencial* para F.

Teorema 10.1 *Sean $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar de clase C^1, y $\gamma : [a, b] \longrightarrow A$ un camino C^1 a trozos. Entonces*

$$\int_\gamma \nabla f \cdot ds = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Por tanto, si $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial gradiente y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función potencial suya, entonces, para todo par de puntos

$p, q \in A$ y para todo camino C^1 a trozos γ con traza contenida en A y que comience en p y acabe en q, se tiene

$$\int_\gamma F \cdot ds = f(q) - f(p).$$

Demostración: Consideremos la función $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(t) = f(\gamma(t)),$$

cuya derivada es

$$g'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t).$$

Apligando el teorema fundamental del cálculo a esta función g obtenemos lo que deseamos:

$$f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = g(b) - g(a) = \int_a^b g'(t)dt$$
$$= \int_a^b \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt = \int_a^b \nabla f \cdot ds. \qquad \Box$$

Si un campo vectorial puede reconocerse como el gradiente de un campo escalar, el cálculo de sus integrales de linea resulta mucho más sencillo.

Ejemplo 10.2 Sea $\gamma(t) = (t^4/4, \sin^3(\pi t/2))$. Calcular la integral de linea

$$\int_\gamma ydx + xdy.$$

Sin embargo, a diferencia de lo que ocurre en el caso de funciones de una variable (donde toda función continua $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene una primitiva, a saber, $g(t) = \int_a^t h(s)ds$), no todo campo vectorial $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un gradiente, es decir, salvo en el caso $n = 1$, no tiene por qué existir un campo escalar $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $F = \nabla f$. Precisamente, un modo de saber que un campo vectorial F *no* es un gradiente, es aplicar el teorema anterior: basta entontrar dos caminos γ_1 y γ_2, con los mismos puntos inicial y final, a lo largo de los cuales las integrales de linea $\int_{\gamma_1} F \cdot ds$ y $\int_{\gamma_1} F \cdot ds$ toman valores diferentes.

Ejemplo 10.3 Sea $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ el campo vectorial definido por

$$F(x, y, z) = (xy, y, z).$$

Probar que no existe ninguna función $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = F$.

De hecho, resulta que la condición de independencia del camino que nos da el teorema 10.1 no sólo es necesaria, sino también suficiente (al menos cuando el recinto A tiene una forma sencilla). El siguiente resultado complementan el teorema 10.1, caracterizando los campos gradientes como aquellos campos vectoriales para los que las integrales de linea sólo dependen de los puntos inicial y final del camino sobre el que se integran o también, si el dominio sobre el que están definidos es convexo, como aquellos cuyas componentes tienen derivadas parciales que satisfacen una condición de simetría.

Sea $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo, y sea $\gamma : [a, b] \longrightarrow A$ un camino C^1 a trozos. Se dice que $\int_\gamma F \cdot ds$ es independiente del camino γ si para cualquier otro camino C^1 a trozos $\sigma : [c, d] \longrightarrow A$ se tiene que

$$\int_\gamma F \cdot ds = \int_\sigma F \cdot ds.$$

Teorema 10.4 *Sea A un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *F es un campo gradiente, es decir, existe una función potencial $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $F = \nabla f$;*

2. *$\int_\gamma F \cdot ds = 0$ para todo camino cerrado γ;*

3. *$\int_\gamma F \cdot ds$ es independiente del camino γ.*

   Si además F es de clase C^1 y A es un abierto convexo*, las afirmaciones anteriores también equivalen a la siguiente:*

4. *Para todos $i, j = 1, ..., n$ se tiene que*

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}.$$

De un campo F que satisfaga una de estas propiedades (y por tanto todas) se dice que es un campo conservativo.

Demostración:
(1) $\Longrightarrow$ (2): Es consecuencia del teorema 10.1
(2) $\Longrightarrow$ (3): Sean $\gamma_1 : [a_1, b_1] \longrightarrow A$ y $\gamma_2 : [a_2, b_2] \longrightarrow A$ dos caminos C^1 a trozos con el mismo comienzo $p = \gamma(a_i)$ y el mismo final $q = \gamma(b_i)$, $i = 1, 2$. Entonces, si $-\gamma_2$ es el camino inverso a γ_2, se tiene que $\gamma = \gamma_1 * (-\gamma_2)$ es un camino cerrado en A luego, por hipótesis, $\int_\gamma F \cdot ds = 0$. Pero

$$\int_\gamma F \cdot ds = \int_{\gamma_1} F \cdot ds + \int_{-\gamma_2} F \cdot ds = \int_{\gamma_1} F \cdot ds - \int_{\gamma_2} F \cdot ds,$$

y se deduce que $\int_{\gamma_1} F\cdot ds=\int_{\gamma_2} F\cdot ds$.
(3) $\implies$ (1): sea $a\in A$. No hay pérdida de generalidad en suponer que A es conexo (si no lo fuera podríamos trabajar en cada una de sus componentes conexas). Como A es un abierto de $\mathbb{R}^n$, resulta que A es conexo por caminos e incluso conexo por caminos poligonales; en particular A es conexo por caminos C^1 a trozos. Así, dado cualquier $x\in A$ podemos escoger un camino C^1 a trozos $\gamma_x:[0,1]\longrightarrow A$ tal que $\gamma_x(0)=a$ y $\gamma_x(1)=x$. Definamos entonces $f:A\longrightarrow\mathbb{R}$ por

$$f(x)=\int_{\gamma_x} F\cdot ds$$

para cada $x\in A$. Por la condición (3), es claro que la definición de $f(x)$ no depende de la elección de γ_x. Veamos que f es diferenciable en A y que $\nabla f(x)=F(x)$ para cada $x\in A$. Fijemos $x\in A$. Como F es continuo en x, dado $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que si $\|h\|\leq\delta$ entonces $\|F(x+h)-F(x)\|\leq\varepsilon$. Nótese que, por la condición (3), si σ denota el segmento $[x,x+h]$, entonces

$$\int_{\gamma_x} F\cdot ds+\int_{\sigma} F\cdot ds=\int_{\gamma_x*\sigma} F\cdot ds=\int_{\gamma_{x+h}} F\cdot ds,$$

puesto que tanto γ_{x+h} como $\gamma_x*\sigma$ son caminos que empiezan en a y terminan en $x+h$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} f(x+h)-f(x) &= \int_{\gamma_{x+h}} F\cdot ds-\int_{\gamma_x} F\cdot ds \\ &= \int_{\sigma} F\cdot ds=\int_0^1 F(x+th)\cdot h dt, \end{aligned}$$

y por tanto

$$\big|f(x+h)-f(x)-F(x)\cdot h\big|=\Big|\int_0^1 \big(F(x+th)-F(x)\big)\cdot h dt\Big|$$
$$\leq\int_0^1 \|F(x+th)-F(x)\|\cdot\|h\|dt\leq\int_0^1 \varepsilon\|h\|dt=\varepsilon\|h\|,$$

para todo h tal que $\|h\|\leq\delta$. Esto prueba que f es diferenciable en x y $\nabla f(x)=F(x)$.
(1) $\implies$ (4): Si $\nabla f=F$ (es decir, $\partial f/\partial x_i=F_i$, $i=1,...,n$) y F es C^1 entonces f es de clase C^2 y, por el teorema de Schwarz,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j},$$

lo que significa que

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}.$$

(4) $\Longrightarrow$ (1): Fijemos un punto $a \in A$. Para cada $x \in A$ sea σ_x el segmento que une a con x,

$$\sigma_x(t) = tx + (1-t)a, \quad t \in [0,1].$$

La traza de σ_x está dentro de A por ser este conjunto convexo. Definamos $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \int_{\sigma_x} F \cdot ds$$

para cada $x \in A$. Tenemos que comprobar que $\nabla f(x) = F(x)$, es decir,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = F_j(x)$$

para cada $x \in A$, $j = 1, ..., n$. Utilizando el teorema de derivación bajo el signo integral (ver 8.5) y la hipótesis de simetría de las derivadas, e integrando por partes al final, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\big(\int_0^1 \sum_{j=1}^n F_j(a+t(x-a))(x_j-a_j)dt\big) \\
&= \int_0^1 \left[\left(\sum_{j=1}^n t\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(a+t(x-a))(x_j-a_j)\right) + F_i(a+t(x-a))\right] dt \\
&= \int_0^1 \big(\sum_{j=1}^n t\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(a+t(x-a))(x_j-a_j)dt + \int_0^1 F_i(a+t(x-a))\big)dt \\
&= \int_0^1 t\nabla F_i(a+t(x-a))(x-a)dt + \int_0^1 F_i(a+t(x-a))dt \\
= \quad & F_i(x) - \int_0^1 F_i(a+t(x-a))dt + \int_0^1 F_i(a+t(x-a))dt = F_i(x),
\end{aligned}$$

que es lo que queríamos. $\Box$

Observación 10.5 Cuando $F = (P, Q)$ es un campo vectorial definido en un abierto del plano $\mathbb{R}^2$, la condición (4) del teorema anterior significa simplemente que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

En el caso de un campo vectorial F definido sobre un abierto del espacio $\mathbb{R}^3$, recordemos que puede definirse el *rotacional* de $F = (F_1, F_2, F_3)$ por

$$\mathrm{rot}F(x,y,z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}.$$

En el caso $n = 3$ la condición (4) del teorema anterior significa así que $\mathrm{rot}F(x,y,z) = (0,0,0)$ para todo $(x,y,z) \in A$ (ver el ejercicio 10.13). Se dice en este caso que el campo F es *irrotacional.*

Observación 10.6 La prueba de la parte (1) $\iff$ (4) del teorema anterior muestra que la hipótesis de que A sea convexo puede sustituirse por una más débil, por ejemplo que A sea un abierto *estrellado*, es decir que exista un punto $a \in A$ tal que para cualquier otro punto $x \in A$ el segmento $[a,x]$ está contenido en A. Sin embargo, el teorema anterior no es cierto para todo conjunto abierto A; si A no es simplemente conexo entonces el enunciado del teorema no es cierto en general, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 10.7 Sean $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, y $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definido por

$$F(x,y) = (P,Q) = \big(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\big).$$

Comprobar que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

en A, y que sin embargo F no es un campo gradiente: por ejemplo, si σ es un camino que recorre una vez la circunferencia unidad entonces $\int_\sigma F \cdot ds \neq 0$.

No obstante, en $\mathbb{R}^3$ las cosas son un poco diferentes: puede probarse que si F es un campo vectorial de clase C^1 definido en todo $\mathbb{R}^3$ salvo quizás una cantidad finita de puntos entonces las cuatro condiciones del teorema anterior son equivalentes. Por ejemplo, para el campo gravitatorio de la tierra, definido por

$$F(x,y,z) = \frac{-GMm}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,y,z),$$

y que tiene una singularidad en el origen, el teorema es válido.

Problemas

10.8 Calcular:

(a) $\int_\gamma xdy + ydx$, si γ es un camino de $(-1,2)$ a $(2,3)$.

(b) $\int_\gamma yzdx + zxdy + xydz$, si γ es un camino de $(1,1,1)$ a $(1,2,3)$.

10.9 Probar que dos funciones de potencial para un mismo campo vectorial (definido en un abierto conexo) difieren a lo sumo en una constante

10.10 Calcular una función de potencial para el campo

$$F(x,y) = (3x^2 + y, e^y + x)$$

en $\mathbb{R}^2$.

10.11 Sea $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ el campo definido por

$$F(x,y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}).$$

(a) Calcular $\int_\gamma F$, siendo $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$. Deducir que F no es conservativo.

(b) Encontrar un abierto $A \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tal que $F_{|A}$ sea conservativo.

10.12 Comprobar que el campo $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definido por

$$F(x,y,z) = (y, z\cos yz + x, y\cos yz)$$

es conservativo, y calcular un potencial.

10.13 Sea F un campo vectorial definido en un abierto de $\mathbb{R}^3$. Comprobar que se satisface la condición de simetría del teorema 10.4

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i},$$

$i, j = 1, 2, 3$, si y sólo si $\text{rot}F = 0$.

10.14 Sea $\sigma : [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ el camino definido por

$$\sigma(t) = (e^{t-1}, \sin\frac{\pi}{t}).$$

Calcular la integral de linea

$$\int_\sigma 2x \cos y dx - x^2 \sin y dy.$$

10.15 Demostrar que el campo gravitatorio de la tierra es irrotacional, y calcular una función de potencial suya.

10.16 Sea $F(x,y,z) = (2xyz + \sin x, x^2 z, x^2 y)$. Encontrar una función f tal que $\nabla f = F$.

10.17 Calcular $\int_\gamma F \cdot ds$, donde $\gamma(t) = (\cos^5 t, \sin^3 t, t^4)$, y F es el campo del ejercicio anterior.

Capítulo 11

El teorema de Green

El teorema de Green relaciona la integral de línea de un campo vectorial sobre una curva plana con una integral doble sobre el recinto que encierra la curva. Este tipo de teoremas resulta muy útil porque, dados un campo vectorial y una curva cerrada simple sobre la cual hay que integrarlo, podemos elegir la posibilidad más simple entre integrar el campo directamente sobre la curva o bien integrar la diferencia de sus derivadas parciales cruzadas sobre en recinto que delimita la curva. Por otro lado, la relación así establecida entre la integral de línea sobre una curva y la integral doble sobre la región interior a ésta permite a veces obtener información sobre una función o su integral en un recinto a partir del comportamiento de la función sobre la frontera de dicho recinto. Los ejemplos y ejercicios de este capítulo ilustrarán las diversas posibilidades y aplicaciones de este tipo de resultados, que generalizaremos a integrales sobre superficies en $\mathbb{R}^3$ en los siguientes capítulos.

Antes de enunciar el teorema de Green convendría precisar qué entendemos por una curva cerrada simple *orientada positivamente*. Sabemos ya que toda curva simple tiene dos posibles orientaciones, y que éstas son invariantes por reparametrizaciones cuyas funciones de cambio de variables tiene derivada positiva. Ahora bien, ¿cómo distinguir entre una y otra orientación? ¿Qué hacer para privilegiar y reconocer una de las dos? Hay varios procedimientos para conseguir esto. Quizá el más intuitivo sea el siguiente, que presenta el concepto de *normal unitaria exterior* a una curva.

Si C es una curva cerrada simple regular a trozos en $\mathbb{R}^2$, parametrizada por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, el *vector normal unitario exterior* a C se define por

$$N(t) = \frac{1}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}\big(y'(t), -x'(t)\big).$$

Nótese que N es ortogonal al vector tangente o velocidad de la curva, $V(t) = (x'(t), y'(t))$. Consideremos estos vectores sumergidos en $\mathbb{R}^3$ (con coordenada $z = 0$). Diremos que C está orientada positivamente si el producto vectorial $N \times V$ (que tiene la dirección del eje z en este caso) tiene coordenada z positiva (es decir, $N \times V$ apunta hacia arriba) para cada t. Esta definición corresponde intuitivamente a decir que C se recorre en el sentido contrario al de las agujas del reloj, o bien que si recorremos C con la orientación positiva entonces N apunta hacia afuera de la región interior a C, y que dicha región interior queda siempre a mano izquierda según se va recorriendo C.

Otra posibilidad para definir la orientación de una curva cerrada simple sería utilizar el número de giros (the winding number); ver el problema 11.17.

Diremos que una curva cerrada simple $C \subset \mathbb{R}^2$ es *regular a trozos* si se puede parametrizar mediante un camino γ que a su vez puede escribirse como concatenación $\gamma_1 * ... * \gamma_k$ de una cantidad finita de caminos $\gamma_j : [a_j, b_j] \to \mathbb{R}^2$ cada uno de los cuales es de clase C^1 y satisface que $\gamma_j'(t) \neq 0$ para todo $t \in [a_j, b_j]$ (en particular, γ podrá dejar de ser diferenciable en una cantidad finita de puntos, pero incluso en estos tendrá derivadas laterales). Para esta clase de curvas cerradas simples enunciaremos y demostraremos el teorema de Green.

Teorema 11.1 (de Green) *Sea C una curva cerrada simple regular a trozos, positivamente orientada, en el plano $\mathbb{R}^2$, y sea D la unión de la región interior a C con la propia curva C. Sea $F = (P, Q) : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase C^1. Entonces se tiene que*

$$\int_C P dx + Q dy = \int_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dxdy.$$

Antes de dar una demostración de este importante teorema, veamos algunos ejemplos y aplicaciones del mismo.

Ejemplo 11.2 Integrar el campo $F(x, y) = (x, xy)$ sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ recorrida en sentido positivo.

Ejemplo 11.3 Calcular el trabajo realizado por el campo de fuerzas $F(x, y) = (y + 3x, 2y - x)$ al mover una partícula a lo largo de la elipse $4x^2 + y^2 = 4$.

Ejemplo 11.4 Hallar el valor de la integral

$$\int_C (5 - xy - y^2) dx - (2xy - x^2) dy,$$

donde C es el borde del cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$.

Una aplicación muy importante del teorema de Green es el cálculo de áreas de recintos delimitados por curvas cerradas simples mediante una integral de línea sobre el borde de dichas curvas. Si tenemos un recinto D en el plano cuya frontera es una curva cerrada simple $C = \partial D$ y queremos calcular su área, nos basta hallar un campo vectorial (P, Q) tal que $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y = 1$ y aplicar entonces la fórmula de Green para expresar el área de D como la integral de línea de (P, Q) sobre su borde C. Por ejemplo, podemos tomar $P = -y/2$, $Q = x/2$, de modo que

$$a(D) = \int_D 1dxdy = \int_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \int_{\partial D} Pdx + Qdy = \frac{1}{2}\int_C xdy - ydx.$$

Fórmulas análogas pueden deducirse poniendo $(P, Q) = (-y, 0)$, o bien $(P, Q) = (0, x)$. Obtenemos así el siguiente resultado

Corolario 11.5 *Sea C una curva cerrada simple regular a trozos, y sea D la región interior a C. Entonces su área es*

$$a(D) = \frac{1}{2}\int_C xdy - ydx = -\int_C ydx = \int_C xdy.$$

Ejemplo 11.6 Hallar el área de la región encerrada por la hipocicloide (astroide) de ecuación $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Demostración del teorema de Green

Tenemos que probar la siguiente igualdad

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \int_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy. \qquad (*)$$

A tal fin, observemos que la validez de $(*)$ para todos los campos $F = (P, Q)$ de clase C^1 sobre D equivale a la de las dos fórmulas siguientes

$$-\int_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = \int_{\partial D} Pdx \qquad (11.1)$$

$$\int_D \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy = \int_{\partial D} Qdy, \qquad (11.2)$$

también para todos los campos $F = (P, Q)$ de clase C^1 en D. En efecto, si estas fórmulas son válidas, obtenemos $(*)$ sin más que sumarlas. Recíprocamente, si $(*)$ es cierta podemos obtener 11.1 tomando $Q = 0$ en $(*)$, y análogamente 11.2, tomando $P = 0$ en $(*)$.

Paso 1. La primera parte de la demostración del teorema de Green consiste en probar 11.1 para una clase especial de recinto D, que denominaremos recinto de tipo I; un tal recinto será el limitado por las gráficas de dos funciones $y = f(x)$, $y = g(x)$, con $f \leq g$. Es decir, supondremos en primer lugar que

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\},$$

donde f y g son funciones reales de clase C^1 a trozos. Este recinto D está limitado por una curva cerrada simple $C = \partial D$ regular a trozos que puede expresarse como concatenación de cuatro caminos regulares a trozos:

$$C = C_1 + C_2 - C_3 - C_4,$$

(como es costumbre, los signos negativos que preceden a un camino denotan que se recorre el camino en sentido opuesto al especificado); aquí, C_1 está parametrizado por $\gamma_1(t) = (t, f(t))$, $a \leq t \leq b$; C_2 lo está por $\gamma_2(t) = (b, t)$, con $f(b) \leq t \leq g(b)$; C_3 es $\gamma_3(t) = (t, g(t))$, $a \leq t \leq b$; y C_4 viene dado por $\gamma_4(t) = (a, t)$, $f(a) \leq t \leq g(a)$. Nótese que, a lo largo de C_2 y de C_4, $x = x(t)$ es constante, luego $dx = 0$ sobre estos caminos, y las correspondientes integrales de línea se anularán, mientras que sobre los restantes caminos es $dx = 1$. Entonces se tiene que

$$\int_{\partial D} P dx = \int_{C_1} P dx + \int_{C_2} P dx - \int_{C_3} P dx - \int_{C_4} P dx =$$
$$\int_{C_1} P dx - \int_{C_3} P dx = \int_a^b P(t, f(t)) dt - \int_a^b P(t, g(t)) dt;$$

y por otra parte, aplicando el teorema de Fubini y el teorema fundamental del cálculo,

$$-\int_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = -\int_a^b \Big[\int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \Big] dx =$$
$$-\int_a^b \big[P(x, g(x)) - P(x, f(x))\big] dx = \int_a^b P(t, f(t)) dt - \int_a^b P(t, g(t)) dt.$$

Combinando las igualdades anteriores obtenemos 11.1.

Paso 2. Ahora probaremos 11.2 para otra clase especial de recinto D, que denominaremos recinto de tipo II, el limitado por las gráficas de dos funciones $x = \varphi(y)$, $x = \psi(y)$, con $\varphi \leq \psi$. Es decir, ahora tenemos que

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\},$$

con φ, ψ funciones reales de clase C^1 a trozos. Como antes, D está limitado por una curva cerrada simple $C = \partial D$ regular a trozos que puede expresarse como concatenación de cuatro caminos regulares a trozos:

$$C = -C_1 + C_2 + C_3 - C_4,$$

donde C_1 está parametrizado por $\gamma_1(t) = (\varphi(t), t)$, $c \leq t \leq d$; C_2 es $\gamma_2(t) = (t, c)$, con $\varphi(c) \leq t \leq \psi(c)$; C_3 es $\gamma_3(t) = (\psi(t), t)$, $c \leq t \leq d$; y C_4 es $\gamma_4(t) = (t, d)$, con $\varphi(d) \leq t \leq \psi(d)$. A lo largo de C_2 y de C_4, $y = y(t)$ es constante, luego $dy = 0$ sobre estos caminos, y las correspondientes integrales de línea son cero; para C_1 y C_3 se tiene $dy = 1$. Entonces,

$$\int_{\partial D} Qdy = -\int_{C_1} Qdy + \int_{C_2} Qdy + \int_{C_3} Qdy - \int_{C_4} Qdy =$$
$$-\int_{C_1} Qdy + \int_{C_3} Qdy = -\int_c^d Q(\varphi(t), t)dt + \int_c^d Q(\psi(t), t)dt,$$

y por otro lado,

$$\int_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int_c^d \Big[\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx\Big] dy =$$
$$\int_c^d \big[Q(\psi(y), y) - Q((\varphi(y); y)\big] dy = \int_c^d Q(\psi(t), t)dt - \int_c^d Q(\varphi(t), t)dt;$$

luego, juntando estas igualdades, obtenemos 11.2.

Paso 3. De acuerdo con la observación que hemos hecho antes y con lo probado en los pasos 1 y 2, la fórmula de Green $(*)$ es válida para toda región D que sea a la vez de tipo I y de tipo II. Todos los círculos, los rectángulos y los triángulos constituyen ejemplos de regiones que son de tipo I y II simultáneamente. Por tanto, el teorema de Green es válido para todos estos tipos de curvas. También podría probarse, utilizando el teorema del cambio de variables, que la igualdad $(*)$ es cierta para cualquier región D que sea difeomorfa con un círculo, un rectángulo o un triángulo (ejercicio 11.12).

Paso 4. El siguiente paso consiste en establecer la validez de $(*)$ para toda región D que pueda descomponerse como unión finita de regiones simultáneamente de tipo I y II. Más precisamente, se prueba $(*)$ para todo recinto $D \subset \mathbb{R}^2$ de la forma

$$D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i,$$

donde todos los D_i son regiones de tipo I y II simultáneamente, con interiores disjuntos dos a dos, y cuyos bordes, $C_i = \partial D_i$, están positivamente orientados, y de forma que se cumplen:

- si una curva C_i tiene una parte en común con otro camino C_j entonces esa parte no es común a ningún otro C_k con $k \neq i, j$;
- si C_i tiene un trozo en común con C_j entonces C_i recorre ese trozo común en sentido contrario al que lo hace C_j; y
- si C_i tiene un trozo en común con $C = \partial D$ entonces ambos caminos recorren dicho trozo en el mismo sentido

(hágase un dibujo aquí).

Podemos aplicar la fórmula $(*)$ a cada región D_i y sumar todas las igualdades correspondientes para obtener que

$$\int_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dxdy = \sum_{i=1}^{n} \int_{D_i} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dxdy = \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial D_i} Pdx + Qdy.$$

Pero en esta suma de integrales de línea, las integrales sobre $C_i = \partial D_i$ pueden descomponerse a su vez en sumas finitas de integrales sobre curvas simples de dos tipos: o bien son trozos del camino C_i comunes a algún otro de los C_j, o bien son partes de $C = \partial D$. La suma total de todas las integrales sobre caminos del primero de estos tipos es igual a cero ya que, al integrar y sumar, cada una de estas curvas se recorre exactamente dos veces, y con orientaciones opuestas, de modo que la suma de las dos integrales que se hacen sobre cada camino del primer tipo es cero. Por otro lado, la suma de todas las integrales sobre los caminos del segundo tipo es igual a la integral del campo (P, Q) sobre C, ya que C puede expresarse como concatenación de todos los caminos del segundo tipo. Por consiguiente,

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\partial D_i} Pdx + Qdy = \int_{\partial D} Pdx + Qdy,$$

lo que combinado con las igualdades anteriores nos permite concluir que

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \int_{D} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy,$$

para todo recinto que pueda romperse en una cantidad finita de recintos de tipo I y II simultáneamente. En particular se obtiene que $(*)$ es válida para toda curva cerrada simple E que sea *poligonal* (a saber, concatenación finita de segmentos de recta), ya que una tal curva siempre puede *triangularse*, es decir expresarse como una unión finita

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} T_i,$$

donde los T_i son triángulos (y por tanto regiones de tipo I y II simultáneamente) orientados de modo que si T_i y T_j tienen un lado común entonces T_i recorre este lado en sentido contrario a como lo hace T_j (hágase aquí otro dibujo).

Paso 5. La última parte de la prueba del teorema de Green consiste en aproximar la curva dada C por una curva cerrada simple poligonal $\mathcal{P}$ de modo que la región $\mathcal{D}$ interior a $\mathcal{P}$ queda dentro del dominio del campo $F = (P, Q)$ y cuyo área, $a(\mathcal{D})$, es también una buena aproximación del área de la región interior a C, es decir $a(D)$. Se aplica entonces el teorema de Green establecido en el paso anterior para curvas cerradas simples poligonales y se concluye que $(*)$ es aproximadamente válida para D, más o menos un cierto error ε que a continuación haremos tender a cero, obteniendo así $(*)$ en toda su generalidad el enunciado del teorema 11.1. Esta última parte de la demostración, que detallamos a continuación, es bastante pesada técnicamente y puede muy bien omitirse en una primera lectura.

Sea pues C una curva cerrada simple regular a trozos, y supongamos que está parametrizada por $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$. Fijemos $\varepsilon > 0$. Para empezar, debe observarse que, como F es de clase C^1, existe una extensión de F de clase C^1 a un abierto que contiene a D (seguiremos denotando esta extensión como F). Como consecuencia de esto y de la compacidad de D, existe un abierto A que contiene a D y con $\operatorname{dist}(\partial A, \partial D) > 0$ y de modo que F es Lipschitz y de clase C^1 en todo A. Definamos

$$M = \sup\{\left|\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right| : (x,y) \in A\} + \sup\{\|F(x,y)\| : (x,y) \in A\} + 1$$

Por otra parte, al ser γ concatenación de caminos C^1, es un camino Lipschitz. Por tanto, eligiendo

$$\delta_0 = \text{mín}\{\frac{\varepsilon}{\text{Lip}(F)\text{Lip}(\gamma)^2(b-a)+1}, \frac{\operatorname{dist}(\partial A, \partial D)}{2(\text{Lip}(\gamma)+1)}\}$$

deducimos que si $a = t_0 < t_1 < ... < t_N = b$ es una partición de $[a,b]$ con la propiedad de que $t_i - t_{i-1} \leq \delta_0$ para todo $i = 1, ..., N$ entonces la curva poligonal $\mathcal{P}$ que une los puntos $\gamma(t_0), \gamma(t_1), ..., \gamma(t_{N-1})$, $\gamma(t_N) = \gamma(t_0)$ (en este orden) está dentro de A. Además, como C es cerrada simple, podemos suponer (añadiendo más puntos a la partición de $[a,b]$ si fuera necesario) que la poligonal $\mathcal{P}$ así obtenida es también cerrada simple (ver el ejercicio 11.20), y entonces la región interior a esta poligonal $\mathcal{P}$ también queda dentro de A. Por otra parte también tenemos que, para cualesquiera $s_i \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
&|\sum_{i=1}^{N}\langle F(\gamma(t_{i-1})), \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\rangle - \\
&\sum_{i=1}^{N}\langle F((1-s_i)\gamma(t_{i-1}) + s_i\gamma(t_i)), \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\rangle| \leq \\
&\sum_{i=1}^{N}\|F((1-s_i)\gamma(t_{i-1}) + s_i\gamma(t_i)) - F(\gamma(t_{i-1}))\| \, \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \leq \\
&\text{Lip}(F)\text{Lip}(\gamma)^2(t_i - t_{i-1})^2 \leq \\
&\sum_{i=1}^{N}\text{Lip}(F)\text{Lip}(\gamma)^2\frac{\varepsilon}{\text{Lip}(F)\text{Lip}(\gamma)^2(b-a)+1}(t_i - t_{i-1}) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ahora bien, si $\sigma_i(t) = (1-t)\gamma(t_{i-1}) + t\gamma(t_i)$, $t \in [0,1]$, es el segmento que une los puntos $\gamma(t_{i-1})$ y $\gamma(t_i)$, podemos aplicar el teorema del valor medio para integrales para encontrar $s_i \in [0,1]$ de modo que

$$\int_{\sigma_i} F \cdot ds = \int_0^1 \langle F(\sigma_i(t)), \sigma_i'(t)\rangle dt = \langle F((1-s_i)\gamma(t_{i-1}) + s_i\gamma(t_i)), \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\rangle$$

y por tanto, para esta elección de s_i, obtenemos

$$\int_{\mathcal{P}} F \cdot ds = \sum_{i=1}^{N} \int_{\sigma_i} F \cdot ds = \sum_{i=1}^{N} \langle F((1-s_i)\gamma(t_{i-1}) + s_i\gamma(t_i)), \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\rangle,$$

lo que, combinado con la desigualdad anterior, nos da

$$\left| \int_{\mathcal{P}} F \cdot ds - \sum_{i=1}^{N} \langle F(\gamma(t_{i-1})), \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\rangle \right| \leq \varepsilon, \tag{1}$$

y esto vale para toda curva poligonal cerrada simple $\mathcal{P}$ que una los puntos $\gamma(t_0), \gamma(t_1), ..., \gamma(t_N)$, siendo $a = t_0 < t_1 < ... < t_N = b$ y $t_i - t_{i-1} \leq \delta_0$ para todo i.

Por otro lado, aplicando el teorema de Darboux a la integral $\int_\gamma Pdx + Qdy$, obtenemos $\delta_1 > 0$, que podemos suponer menor o igual que δ_0, tal que, si $a = t_0 < t_1 < ... < t_N = b$ es partición de $[a,b]$ y $|t_i - t_{i-1}| \leq \delta_1$ para todo $i = 1, ..., N$, entonces

$$\left| \int_\gamma Pdx + Qdy - \sum_{i=1}^{N} \langle F(\gamma(c_i)), \gamma'(c_i)\rangle (t_i - t_{i-1}) \right| \leq \varepsilon$$

cualesquiera que sean los $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$.

Además, fijada una de estas particiones $a = t_0 < t_1 < ... < t_N = b$ de $[a,b]$, como $\gamma = \gamma_1 * ... * \gamma_k$ es concatenación de caminos de clase C^1, podemos suponer (añadiendo puntos, si fuera necesario, a dicha partición) que γ es de clase C^1 en cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$; en particular γ es uniformemente diferenciable en cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ (ver el problema 7.29, y téngase en cuenta que γ podría no ser derivable en los extremos del intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, pero en todo caso sí tiene derivadas laterales en dichos extremos, y las derivadas son continuas), luego existe $\delta_2 > 0$, que podemos suponer menor o igual que δ_1, tal que si $t_{i-1} \leq s \leq t \leq t_i$ y $|t-s| \leq \delta_2$ entonces

$$\|\gamma(t) - \gamma(s) - \gamma_+'(s)(t-s)\| \leq \frac{\varepsilon}{M(b-a)}|t-s|.$$

Podemos entonces añadir todos los puntos necesarios a la partición de $[a,b]$ sobre la que venimos trabajando para que la nueva partición, que seguiremos denotando $a = t_0 < t_1 < ... < t_N = b$, satisfaga que $t_i - t_{i-1} \leq \delta_2 \leq \delta_1 \leq \delta_0$, y por tanto también que

$$\left| \int_\gamma P dx + Q dy - \sum_{i=1}^{N} \langle F(\gamma(t_{i-1})), \gamma'(t_{i-1}) \rangle (t_i - t_{i-1}) \right| \leq \varepsilon, \tag{2}$$

a la vez que

$$\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) - \gamma'_+(t_{i-1})(t_i - t_{i-1})\| \leq \frac{\varepsilon}{M(b-a)}(t_i - t_{i-1});$$

pero esta última desigualdad implica que

$$\left| \sum_{i=1}^{N} \langle F(\gamma(t_{i-1})), \gamma'_+(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) \rangle - \sum_{i=1}^{N} \langle F(\gamma(t_{i-1})), \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \rangle \right| \leq$$
$$M \frac{\varepsilon}{M(b-a)}(b-a) = \varepsilon,$$

lo que junto con (2) permite obtener

$$\left| \int_\gamma P dx + Q dy - \sum_{i=1}^{N} \langle F(\gamma(t_{i-1})), \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \rangle \right| \leq 2\varepsilon, \tag{3}$$

y que a su vez combinado con (1) nos da

$$\left| \int_{\mathcal{P}} P dx + Q dy - \int_C P dx + Q dy \right| \leq 3\varepsilon, \tag{4}$$

para toda curva cerrada simple poligonal $\mathcal{P}$ que una $\gamma(t_1), \gamma(t_2), ..., \gamma(t_{N-1})$, $\gamma(t_N) = \gamma(t_0)$, en este orden, y siempre y cuando $0 < t_i - t_{i-1} \leq \delta_2 \leq \delta_1$ para todo $i = 1, ..., N$.

Por otra parte, como $\partial D = C$ tiene contenido cero, existe una colección finita $Q_1, ..., Q_k$ de cubos abiertos que recubren C y cuyos volúmenes suman menos que ε/M. Definamos $U = \bigcup_{j=1}^{k} Q_j$. Como U es abierto y contiene al compacto C, tenemos que la distancia de C al complementario de U es positiva, es decir, $d(C, \mathbb{R}^2 \setminus U) > 0$. Pongamos ahora

$$\delta_3 = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2, \frac{d(C, \mathbb{R}^2 \setminus U)}{2(\text{Lip}(\gamma) + 1)}\};$$

entonces, añadiendo puntos si fuera necesario a la partición $a = t_0 < t_1 < ... < t_N$ de $[a, b]$ sobre la que venimos trabajando, podemos suponer que $t_i - t_{i-1} \leq \delta_3$ para todo $i = 1, ..., N$, lo cual implica que la poligonal $\mathcal{P}$ que une los puntos $\gamma(t_1), \gamma(t_2), ..., \gamma(t_N) = \gamma(t_0)$ queda dentro del abierto U (en efecto, para todo z del segmento $[\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)]$, se tiene

$$d(z, C) \leq \mathrm{Lip}(\gamma)(t_i - t_{i-1}) \leq \frac{\mathrm{Lip}(\gamma) d(C, \mathbb{R}^2 \setminus U)}{2(\mathrm{Lip}(\gamma) + 1)} < d(C, \mathbb{R}^2 \setminus U),$$

luego $z \in U$).

Definamos también $W = D \cup U$ y $V = D \setminus U$, que son conjuntos con área que cumplen que

$$a(D) - \frac{\varepsilon}{M} \leq a(D) - a(U) \leq a(V) \leq a(D) \leq a(W) \leq a(D) + a(U) \leq a(D) + \frac{\varepsilon}{M}.$$

Sean entonces $\mathcal{D}$ la región interior a la poligonal cerrada simple $\mathcal{P}$ que une los puntos $\gamma(t_1), \gamma(t_2), ..., \gamma(t_N) = \gamma(t_0)$ en este orden. Como $\mathcal{P} \subset U$, es claro que

$$V \subset \mathcal{D} \subset W,$$

y entonces

$$a(D) - \frac{\varepsilon}{M} \leq a(V) \leq a(\mathcal{D}) \leq a(W) \leq a(D) + \frac{\varepsilon}{M}.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy - \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \right| \leq \\
&\int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right| |1_{\mathcal{D}} - 1_D| \, dxdy \leq \int_{\mathbb{R}^2} M \, |1_{\mathcal{D}} - 1_D| \, dxdy \leq \\
&M \left(a(\mathcal{D} \setminus D) + a(D \setminus \mathcal{D}) \right) \leq M \left(\frac{\varepsilon}{M} + \frac{\varepsilon}{M} \right) = 2\varepsilon,
\end{aligned}$$

es decir

$$\left| \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy - \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \right| \leq 2\varepsilon. \qquad (5)$$

Finalmente, combinando (4) y (5) y usando que

$$\int_{\mathcal{P}} P dx + Q dy = \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

(es decir, la fórmula de Green demostrada ya en el paso 4 para recintos limitados por curvas cerradas simples poligonales), deducimos que

$$\left| \int_C Pdx + Qdy - \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \right| \leq 5\varepsilon,$$

y como esto sirve para todo $\varepsilon > 0$ se concluye que

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy,$$

es decir, la fórmula de Green es válida en el caso general de una curva cerrada simple regular a trozos. □

Una aplicación importante de la fórmula de Green para el área encerrada por una curva plana es la *desigualdad isoperimétrica*:

Teorema 11.7 *De todas las curvas cerradas simples en $\mathbb{R}^2$ con longitud fija ℓ, las que encierran mayos área son las circunferencias de radio $r = \ell/2\pi$.*

Es decir, si C es una curva cerrada simple de longitud ℓ, y A es el área de la región D encerrada por C, entonces

$$\ell^2 - 4\pi A \geq 0,$$

y la igualdad se da si y sólo si C es una circunferencia.

La demostración de este resultado puede consultarse, por ejemplo, en el libro de Do Carmo, *Geometría diferencial de curvas y superficies*, editado por Alianza Universidad (Madrid 1990), páginas 46-48.

Problemas

11.8 Utilizar el teorema de Green para calcular $\int_C (y^2 + x^3)dx + x^4 dy$, donde

1. C es la frontera de $[0,1] \times [0,1]$, orientado positivamente.

2. C es la frontera del cuadrado de vértices (a,b) con $|a| = |b| = 2$, orientado negativamente.

11.9 Calcular $\int_C Pdx+Qdy$, donde $P(x,y)=xe^{-y^2}$, $Q(x,y)=-x^2ye^{-y^2}+1/(x^2+y^2+1)$, y C es la frontera del cuadrado de lado $2a$ determinado por las desigualdades $|x|\le a$ e $|y|\le a$, orientado positivamente.

11.10 Usar la expresión para el área encerrada por una curva que proporciona el teorema de Green para dar otra demostración de la fórmula del área del recinto delimitado por una curva en coordenadas polares.

11.11 Calcular el área del trébol de cuatro hojas $\rho = 3\sin 2\theta$.

11.12 Sea D una región para la cual se sabe que es cierto el teorema de Green. Usar el teorema del cambio de variables para demostrar que el teorema de Green es entonces válido para toda región A que sea difeomorfa a D (es decir, existe un difeomorfismo $g: U \longrightarrow V$ de clase C^2 entre dos abiertos U, V de $\mathbb{R}^2$ que contienen a A y D respectivamente, tal que $g(A)=D$).

11.13 En las mismas hipótesis del teorema de Green, si $F=(P,Q)$ y definimos

$$\mathrm{div}F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y},$$

comprobar que el teorema de Green se expresa diciendo que

$$\int_{\partial D} F\cdot N ds = \int_D \mathrm{div}F dxdy,$$

donde $F\cdot N$ denota el campo escalar obtenido del producto escalar del campo F con el vector normal unitario N exterior a C. A esta forma del teorema de Green también se le llama *teorema de la divergencia* en el plano.

11.14 Sea $A\subset\mathbb{R}^2$ abierto, sea C una curva cerrada simple regular a trozos, sea D la parte interior de C, y supongamos que $D\cup C\subset A$. Sean $u,v\in C^2(A)$. Denotamos:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = div(\nabla u)$$
$$\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}).$$

sea N la normal unitaria exterior en C. Denotamos $\frac{\partial u}{\partial N} = \nabla u\cdot N$ (producto escalar), la *derivada normal* de u según C (esto no es más que la derivada direccional de u en la dirección de N).

(a) Demostrar las identidades de Green:

$$\int_D v\Delta u + \int_D \nabla u \cdot \nabla v = \int_C v\frac{\partial u}{\partial N} \tag{11.3}$$

$$\int_D (v\Delta u - u\Delta v) = \int_C (v\frac{\partial u}{\partial N} - u\frac{\partial v}{\partial N}). \tag{11.4}$$

(b) Supongamos ahora que u es armónica en D, es decir, $\Delta u = 0$ en D. Demostrar que si u se anula en C entonces u es idénticamente nula en D. Deducir también de (a) que si tanto u como v son armónicas en D entonces

$$\int_C v\frac{\partial u}{\partial N} = \int_C u\frac{\partial v}{\partial N}.$$

11.15 Sea D un recinto como este:

solo que con n agujeros delimitados por curvas cerradas simples regulares a trozos, en lugar de solamente tres. Probar la siguiente generalización del teorema de Green: para todo campo $F = (P, Q)$ de clase C^1 en D se tiene que

$$\int_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \int_C (Pdx + Qdy) - \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} (Pdx + Qdy).$$

Indicación: descomponer el conjunto D en unión de recintos simplemente conexos a los que se puede aplicar el teorema de Green; usar inducción sobre n.

11.16 *Invariancia de una integral de línea al deformar el camino.* Sea $F = (P, Q)$ un campo vectorial C^1 en un conjunto abierto y conexo A del plano $\mathbb{R}^2$. Supongamos que $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ en todo A. Sean C_1 y C_2 dos curvas cerradas simples regulares a trozos dentro de A y que satisfagan las siguientes condiciones:

1. C_2 está en la región interior a C_1.

2. Los puntos interiores a C_1 que son exteriores a C_2 pertenecen a A.

Probar que entonces se tiene que

$$\int_{C_1} Pdx + Qdy = \int_{C_2} Pdx + Qdy,$$

siempre que ambas curvas se recorran en el mismo sentido. Nótese que cuando A es simplemente conexo (no tiene agujeros) esto implica que $\int_\gamma F \cdot ds$ es independiente del camino.
Indicación: Usar el problema anterior ($n = 1$).

11.17 *El número de giros (the winding number).* Sea C una curva regular a trozos en $\mathbb{R}^2$, parametrizada por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $a \le t \le b$. Se define el número de giros de γ con respecto de un punto $p = (x_0, y_0)$ *no* situado sobre la curva γ como

$$W(C,p) = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{(x - x_0)dy - (y - y_0)dx}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Puede demostrarse que $W(C,p)$ es siempre un número entero. En el caso en que C sea una curva cerrada simple, probar que $W(C,p) = 0$ si p está en la región exterior a C, mientras que $W(C,p) = 1$ si p es interior a C y esta curva está orientada positivamente, y $W(C,p) = -1$ si p es interior a C y C está orientada negativamente. *Indicación:* usar el problema anterior, tomando una de las dos curvas como una circunferencia adecuada.

11.18 Para $(x, y) \neq (0, 0)$ consideramos $\varphi(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$ y $F = (\frac{\partial \varphi}{\partial y}, -\frac{\partial \varphi}{\partial x})$. Sea C una curva de Jordan regular a trozos, contenida en $\{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 < 25\}$. Hallar los posibles valores de la integral de F a lo largo de C.

11.19 ¿Existe alguna curva cerrada simple en el plano que tenga una longitud de 6 metros y que delimite un área de 3 metros cuadrados?

11.20 Sea C una curva cerrada simple en $\mathbb{R}^2$. Supongamos que C está parametrizada por $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ que es regular a trozos (es decir, γ puede escribirse como concatenación de caminos de clase C^1 con velocidad no nula en todos los puntos). Demostrar que existe $\delta > 0$ tal que si $a = t_0 < t_1 < ... < t_N = b$ es una partición de $[a, b]$ tal que $t_i - t_{i-1} \leq \delta$ para todo $i = 1, ..., N$, entonces la poligonal $\mathcal{P}$ que une los puntos $\gamma(t_1), \gamma(t_2), ..., \gamma(t_N) = \gamma(t_0)$ es también cerrada simple.

Capítulo 12

Integrales sobre superficies

En este capítulo estudiaremos la noción de área de superficies en $\mathbb{R}^3$, y las integrales de campos escalares y vectoriales definidos sobre éstas.

Una superficie es una variedad diferenciable de dimensión dos, que en este curso consideraremos siempre inmersa en el espacio $\mathbb{R}^3$. Recordemos que una variedad diferenciable S de dimensión dos en $\mathbb{R}^3$ puede describirse como un subconjunto S de $\mathbb{R}^3$ con la propiedad de que todo punto p de S tiene un entorno abierto V en $\mathbb{R}^3$ tal que $S \cap V$ coincide con el conjunto de ceros de una función $F : V \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $DF(q) \neq 0$ para todo $q \in V \cap S$.

En virtud del teorema de la función implícita, esto equivale a decir que todo punto p de S tiene un entorno abierto W en $\mathbb{R}^3$ tal que $S \cap W$ puede verse como la gráfica de una función de clase C^1, es decir, $S \cap W$ es igual, bien al conjunto de puntos (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tales que $z = f(x, y)$ para cierta f de clase C^1 en $W_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in W$ para algún $z\}$, o bien al conjunto de los (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tales que $y = g(x, z)$ para cierta g de clase C^1 en $W_2 = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in W$ para algún $y\}$, o bien al conjunto de los (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tales que $x = h(y, z)$ para cierta h de clase C^1 en $W_1 = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in W$ para algún $x\}$. El ejemplo de una esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ en $\mathbb{R}^3$ ilustra perfectamente las diversas situaciones.

Otra forma equivalente de definir una variedad diferenciable S de dimensión dos en $\mathbb{R}^3$ es decir que para cada punto p de S existen un entorno abierto V en $\mathbb{R}^3$ y una función inyectiva $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1 tal que $S \cap V = \Phi(D)$, y que si $\Psi : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es otra función con esta propiedad, entonces $\Psi^{-1} \circ \Phi : D \to A$ es un difeomorfismo de clase C^1.

A su vez esto equivale a decir que para todo punto $p \in S$ existen un entorno abierto V en $\mathbb{R}^3$ y una aplicación inyectiva $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que su derivada $D\Phi(u,v)$ tiene rango 2 para todo $(u,v) \in D$, y $\Phi(D) = S \cap V$.

Recordemos también que el plano tangente TS_p a un punto p de una superficie S en $\mathbb{R}^3$ se puede definir como el conjunto de vectores velocidad, en el punto p, de todas las curvas de clase C^1 cuya traza está contenida en S y que pasan por p. Si S está definida en un entorno de p por una ecuación implícita $F(x,y,z) = 0$ entonces $TS_p = \text{Ker} DF(p)$, es decir, el vector gradiente de F en p es perpendicular a TS_p. Por otro lado, si S está descrita en un entorno de p como imagen de un abierto D de $\mathbb{R}^2$ por una aplicación inyectiva Φ de clase C^1 cuya diferencial tiene rango 2, entonces $TS_p = D\Phi(u_p, v_p)(\mathbb{R}^2)$, donde $\Phi(u_p, v_p) = p$.

Conviene subrayar que TS_p es un plano vectorial. Para obtener el plano afín que pasa por p y es tangente a S en p, hay que sumar el punto p a dicho plano vectorial.

En este curso nos limitaremos a considerar casi en exclusiva un caso especial de superficie en $\mathbb{R}^3$, llamado superficie paramétrica simple, que es el de una superficie S que puede describirse, en su totalidad, como $\Phi(D)$, donde $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una aplicación inyectiva de clase C^1 cuya diferencial tiene rango 2 en todos los puntos, y D es un abierto de $\mathbb{R}^2$ que puede describirse como la región interior a una curva cerrada simple regular a trozos (es decir, a la que se puede aplicar el Teorema de Green estudiado en el capítulo anterior).

Definición 12.1 (Superficie paramétrica simple) Se dice que una superficie S de $\mathbb{R}^3$ es una *superficie paramétrica simple* si existen un abierto acotado D de $\mathbb{R}^2$ cuya frontera es una curva cerrada simple regular a trozos, y una aplicación $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ inyectiva y de clase C^1 tal que su diferencial $D\Phi(u,v)$ tiene rango 2 para todo $(u,v) \in D$, y además $S = \Phi(D)$.

De Φ diremos que es una parametrización de S. Evidentemente una misma superficie paramétrica simple S puede tener varias parametrizaciones diferentes.

En el caso de que Φ pueda extenderse (con las mismas propiedades) a un abierto mayor A que contenga a la adherencia de D, llamaremos *borde de* S, y denotaremos por ∂S, a la curva cerrada en $\mathbb{R}^3$ definida por $\Phi(C)$, donde $C = \partial D$. Esta curva se supondrá siempre, salvo que se diga explícitamente lo contrario, orientada en el mismo sentido que resulte de componer Φ con una parametrización de C recorrida en sentido positivo. Del compacto $\overline{S} = \Phi(\overline{D})$ diremos que es una superficie paramétrica simple compacta y con borde.

Conviene señalar que, aunque empleemos la misma notación, el borde geométrico ∂S así definido de una tal superficie S *no coincide* con su frontera topológica (en efecto, ésta es toda $\overline{S}$ ya que S tiene interior vacío).

Ejemplo 12.2 Demostrar que el hemisferio norte de una esfera, es decir, $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0$, es una superficie paramétrica simple con borde $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z = 0$.

Definición 12.3 (Producto vectorial fundamental) Sea $\Phi : D \to S \subset \mathbb{R}^3$ una parametrización de una superficie paramétrica simple S. Denotemos

$$\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Llamaremos producto vectorial fundamental al producto vectorial de las derivadas parciales

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v},$$

es decir

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\mathbf{i} - \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}\mathbf{j} + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\mathbf{k},$$

donde $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ son los vectores $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$ de la base canónica de $\mathbb{R}^3$, y

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v},$$

es decir el determinante jacobiano de la aplicación $(u, v) \mapsto (f(u, v), g(u, v))$.

Observación 12.4 Recordemos que el producto vectorial de vectores en $\mathbb{R}^3$ tiene las siguientes propiedades (siendo a, b y c vectores de $\mathbb{R}^3$, y $\lambda \in \mathbb{R}$):

1. $a \times b = -b \times a$;
2. $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$;
3. $\lambda(a \times b) = (\lambda a) \times b$;
4. $\|a \times b\|^2 = \|a\|^2\|b\|^2 - (a \cdot b)^2$;
5. $a \times b = 0$ si y sólo si a y b son linealmente dependientes;
6. si a y b son linealmente independientes entonces $a \times b$ es un vector perpendicular al plano generado por a y b, de norma $\|a\|\|b\| \operatorname{sen} \theta$ (donde $\theta \in (0, \pi)$ es el ángulo que forman a y b, es decir $\|a \times b\|$ es el área del paralelogramo determinado por a y b), y el sentido de $a \times b$ es el de avance o retroceso de un sacacorchos que gire de a hasta b.

Observación 12.5 Puesto que $\frac{\partial\Phi}{\partial u} = D\Phi(u,v)(1,0)$ y $\frac{\partial\Phi}{\partial v} = D\Phi(u,v)(0,1)$ son vectores del plano tangente a S en $p = \Phi(u,v)$ y son linealmente independientes (por tener $D\Phi(u,v)$ rango 2), es inmediato, teniendo en cuenta la propiedad 6 de la Observación anterior, que el producto vectorial fundamental

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u} \times \frac{\partial\Phi}{\partial v}(u,v)$$

es un vector perpendicular a TS_p, donde $p = \Phi(u,v)$, es decir el producto vectorial fundamental define un campo vectorial perpendicular a la superficie S.

Ejemplo 12.6 Supongamos que S es la gráfica de una función de clase C^1 definida en un abierto D de $\mathbb{R}^2$, es decir, $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D,\ z = f(x,y)\}$, donde $f : D \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^1. Una parametrización natural de S es la proporcionada por $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$,

$$\Phi(u,v) = (u, v, f(u,v)).$$

En este caso el producto vectorial fundamental viene dado por

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u} \times \frac{\partial\Phi}{\partial v}(u,v) = -\mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) - \mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) + \mathbf{k}.$$

Definición 12.7 Se define el vector normal a una superficie paramétrica simple S parametrizada por $\Phi : D \to S$ en un punto p como

$$\mathbf{N}(p) = \frac{\partial\Phi}{\partial u} \times \frac{\partial\Phi}{\partial v}(u,v)$$

para cada $p = \Phi(u,v) \in S$, y el vector normal unitario a S como

$$\mathbf{n}(p) = \frac{1}{\|\mathbf{N}(p)\|}\mathbf{N}(p).$$

Pasemos ahora a estudiar el concepto de *área* de una superficie paramétrica simple. Para justificar la definición, consideremos una parametrización $\Phi : D \to S$ de una superficie paramétrica simple S. Consideremos también, en el plano $\mathbb{R}^2$, que contiene a D, una cuadrícula muy fina paralela a los ejes de coordenadas. Las porciones de rectas de esta cuadrícula que están contenidas en D se transforman mediante la aplicación inyectiva Φ en curvas que no se cortan y que forman una *cuadrícula curva* dentro de S. Los *rectángulos curvos* de esta cuadrícula en S se aproximan bien, si la cuadrícula es suficientemente fina, por paralelogramos T en $\mathbb{R}^3$ (en general ya no contenidos en S), que son imagen mediante la diferencial de Φ, en ciertos puntos $(u_Q, v_Q) \in D$ de la cuadrícula, de rectángulos Q de la cuadrícula original. Hágase un dibujo. El área de cada uno de los paralelogramos T viene dada por

$$\|\frac{\partial\Phi}{\partial u} \times \frac{\partial\Phi}{\partial v}(u_Q, v_Q)\| \, v(Q),$$

y la suma de todas estas áreas, que aproxima lo que intuitivamente debería ser el área de S, es

$$\sum_Q \|\frac{\partial\Phi}{\partial u} \times \frac{\partial\Phi}{\partial v}(u_Q, v_Q)\| \, v(Q),$$

que a su vez aproxima la integral

$$\int_D \|\frac{\partial\Phi}{\partial u} \times \frac{\partial\Phi}{\partial v}(u, v)\| dudv,$$

tanto mejor cuanto más fina sea la cuadrícula. Es entonces natural definir el área de S como dicha integral.

Definición 12.8 Sea S una superficie paramétrica simple parametrizada por $\Phi : D \to S \subset \mathbb{R}^3$. Definimos el área de S como la integral en D de la norma del producto vectorial fundamental asociado a Φ, es decir

$$a(S) = \int_D \|\frac{\partial\Phi}{\partial u} \times \frac{\partial\Phi}{\partial v}(u, v)\| dudv.$$

Ejemplo 12.9 En el caso de que S sea la gráfica de una función $f : D \to \mathbb{R}$, la fórmula del ejemplo 12.6 para el producto vectorial fundamental asociado a su parametrización natural nos proporciona la siguiente fórmula para el área:

$$a(S) = \int_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dxdy.$$

Ejercicio 12.10 Usar esta fórmula para hallar el área del hemisferio norte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Es legítimo preguntarse si, dadas dos parametrizaciones diferentes $\Phi : D_\Phi \to S$ y $\Psi : D_\Psi \to S$ de una misma superficie S se cumple que

$$\int_{D_\Phi} \|\frac{\partial\Phi}{\partial u} \times \frac{\partial\Phi}{\partial v}(u, v)\| dudv = \int_{D_\Psi} \|\frac{\partial\Psi}{\partial s} \times \frac{\partial\Psi}{\partial t}(s, t)\| dsdt,$$

es decir si el área de una superficie está bien definida independientemente de su parametrización. La respuesta, como cabe esperar, es afirmativa, aunque aplazaremos la demostración de esta propiedad hasta después de las definiciones de integrales de campos escalares y vectoriales sobre superficies, ya que el hecho es que estas integrales tampoco dependen de la parametrización escogida (únicamente, en el caso de campos vectoriales, del sentido en que apunte la normal a la superficie).

Definición 12.11 Sea S una superficie paramétrica simple, parametrizada por $\Phi : D \to S$, y sea $f : S \to \mathbb{R}$ un campo escalar continuo definido sobre S. Definimos la integral de f sobre S como

$$\int_S f\, dS = \int_D f(\Phi(u,v)) \|\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u,v)\| du dv.$$

Por otra parte, si $F : S \to \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial continuo definido sobre S, definimos la integral de F sobre S por

$$\int_S F \cdot \mathbf{N} = \int_D F(\Phi(u,v)) \cdot \mathbf{N}(\Phi(u,v))\, du dv,$$

es decir, la integral del producto escalar de la normal a S con F, compuesto con Φ. Obsérvese que, puesto que

$$\mathbf{N}(\Phi(u,v)) = \mathbf{n}(\Phi(u,v)) \|\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}\|,$$

la integral del campo vectorial F sobre S puede verse como la integral del campo escalar $F \cdot \mathbf{n}$ sobre S, es decir, podemos denotar también

$$\int_S F \cdot \mathbf{N} = \int_S F \cdot \mathbf{n}\, dS.$$

Las interpretaciones físicas de estas integrales son variadas. Por ejemplo, un campo escalar $f : S \to \mathbb{R}$ puede representar la densidad de masa por unidad de superficie de un material de grosor despreciable que está distribuido sobre una superficie S, y entonces $\int_S f dS$ sería la masa total de dicho material.

Por su parte, la integral de un campo vectorial sobre una superficie S suele interpretarse como el flujo de un fluido que pasa a través de S. Puede imaginarse que S es una membrana porosa y que el vector $F(x,y,z) = \rho(x,y,z)V(x,y,z)$, donde $V(x,y,z)$ es el vector velocidad del fluido y el número $\rho(x,y,z)$ es su densidad de masa, es un vector que nos dice cuánta masa de fluido circula por el punto (x, y, z) en la dirección en que se mueve el fluido en ese punto, por unidad de área y de tiempo. Entonces el producto escalar $F \cdot \mathbf{n}$ representa el componente del vector densidad de flujo en la dirección de $\mathbf{n}$, y la masa de fluido que pasa a través de toda S vendrá determinada por $\int_S F \cdot \mathbf{n} dS = \int_S F \cdot \mathbf{N}$.

Retomemos ahora la cuestión de la invariancia de estas integrales respecto de la parametrización escogida de S. Necesitaremos el siguiente lema.

Lema 12.12 *Sean $\Psi : D_\Psi \to S$ y $\Phi : D_\Phi \to S$ dos parametrizaciones de una misma superficie paramétrica simple S, y sea $\varphi : D_\Psi \to D_\Phi$ el difeomorfismo de clase C^1 definido por $\varphi = \Phi^{-1} \circ \Psi$. Denotemos $(u, v) = \varphi(s, t)$. Entonces*

$$\frac{\partial \Psi}{\partial s} \times \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)},$$

donde $\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}$ denota el jacobiano de φ.

Demostración: Por la regla de la cadena tenemos

$$\frac{\partial \Psi}{\partial s} = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial s},$$

y también

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Multiplicando vectorialmente los miembros de la derecha de ambas igualdades, utilizando las propiedades del producto vectorial consignadas en la Observación 12.4, y en particular usando que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial u} = 0 = \frac{\partial \Phi}{\partial v} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v},$$

se obtiene la igualdad de enunciado. $\Box$

Teorema 12.13 *Sean $\Psi : D_\Psi \to S$ y $\Phi : D_\Phi \to S$ dos parametrizaciones de una misma superficie paramétrica simple S, y sea $f : S \to \mathbb{R}$ un campo escalar continuo. Entonces*

$$\int_{D_\Phi} f(\Phi(u, v)) \| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v) \| du dv = \int_{D_\Psi} f(\Psi(s, t)) \| \frac{\partial \Psi}{\partial s} \times \frac{\partial \Psi}{\partial t}(u, v) \| ds dt.$$

Es decir, la integral $\int_S f dS$ definida en 12.11 no depende de la parametrización escogida. En particular, si tomamos $f \equiv 1$, obtenemos que el área de S no depende de la parametrización escogida.

Demostración: Denotemos $(u,v)=\varphi(s,t)$, donde $\varphi=\Phi^{-1}\circ\Psi$ como en el lema anterior. Se tiene que $\Psi=\Phi\circ\varphi$, y aplicando el teorema del cambio de variables junto con el lema anterior obtenemos

$$\int_{D_\Phi} f(\Phi(u,v))\|\frac{\partial\Phi}{\partial u}\times\frac{\partial\Phi}{\partial v}(u,v)\|dudv=$$
$$\int_{D_\Psi} f(\Phi(\varphi(s,t)))\|\frac{\partial\Phi}{\partial u}\times\frac{\partial\Phi}{\partial v}(u(s,t),v(s,t))\|\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}\right|dsdt=$$
$$\int_{D_\Psi} f(\Psi(s,t))\|\frac{\partial\Psi}{\partial s}\times\frac{\partial\Psi}{\partial t}(u,v)\|dsdt.\ \Box$$

El resultado análogo para campos vectoriales depende del sentido en que apunte la normal unitaria a S correspondiente a la parametrización en cuestión, como vemos a continuación.

Teorema 12.14 *Sean $\Psi: D_\Psi\to S$ y $\Phi: D_\Phi\to S$ dos parametrizaciones de una misma superficie paramétrica simple S, denotemos*

$$\mathbf{N}_\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial u}\times\frac{\partial\Phi}{\partial v},\ \text{y}\ \mathbf{N}_\Psi=\frac{\partial\Psi}{\partial s}\times\frac{\partial\Psi}{\partial t},$$

y sean

$$\mathbf{n}_\Phi=\frac{1}{\|\mathbf{N}_\Phi\|}\mathbf{N}_\Phi,\ \text{y}\ \mathbf{n}_\Psi=\frac{1}{\|\mathbf{N}_\Psi\|}\mathbf{N}_\Psi.$$

Entonces, o bien $\mathbf{n}_\Phi(p)=\mathbf{n}_\Psi(p)$ para todo $p\in S$, o bien $\mathbf{n}_\Phi(p)=-\mathbf{n}_\Psi(p)$ para todo $p\in S$. En el primer caso diremos que las parametrizaciones Φ y Ψ inducen la misma orientación en S, y en el segundo caso diremos que inducen orientaciones opuestas.

Si Φ y Ψ inducen la misma orientación entonces, para todo campo vectorial continuo $F:S\to\mathbb{R}^3$ se tendrá que

$$\int_S F\cdot\mathbf{N}_\Phi=\int_S F\cdot\mathbf{N}_\Psi,$$

mientras que si Φ y Ψ inducen orientaciones opuestas en S entonces será

$$\int_S F\cdot\mathbf{N}_\Phi=-\int_S F\cdot\mathbf{N}_\Psi.$$

Demostración: Como $\mathbf{n}_\Phi(p)$ y $\mathbf{n}_\Psi(p)$ son vectores perpendiculares a TS_p para cada $p\in S$, definen una misma recta; como además ambos tienen norma uno, se tiene que $\mathbf{n}_\Phi(p)\cdot\mathbf{n}_\Phi(p)=1$ o bien $\mathbf{n}_\Phi(p)\cdot\mathbf{n}_\Phi(p)=-1$ para cada $p\in S$. Pero, como las funciones $\mathbf{n}_\Phi,\mathbf{n}_\Psi:S\to\mathbb{R}^3$ son continuas y S es conexa, debe tenerse $\mathbf{n}_\Phi \cdot \mathbf{n}_\Phi \equiv 1$ en toda S o bien $\mathbf{n}_\Phi \cdot \mathbf{n}_\Phi \equiv -1$ en toda S. En el primer caso se tiene que $\mathbf{n}_\Phi(p) = \mathbf{n}_\Psi(p)$ para todo $p \in S$, y en el segundo caso que $\mathbf{n}_\Phi(p) = -\mathbf{n}_\Psi(p)$ para todo $p \in S$.

Por otra parte, si recordamos que

$$\int_S F \cdot \mathbf{N} = \int_S F \cdot \mathbf{n}\, dS,$$

el enunciado sobre las integrales es consecuencia inmediata de esta propiedad y del Teorema 12.13. □

Una vez definidos los conceptos de área y de integral sobre una superficie paramétrica simple podemos extenderlos a muchas otras superficies que, sin ser paramétricas simples, pueden descomponerse como unión finita de superficies paramétricas simples que son disjuntas entre sí salvo quizás en curvas de clase C^1 a trozos (que tienen área nula por definición). Por ejemplo, una esfera no es una superficie paramétrica simple, pero puede descomponerse como su hemisferio norte más el hemisferio sur, que sí que son superficies paramétricas simples y disjuntas salvo en el ecuador, que es una curva de clase C^1. El área de la esfera puede definirse entonces como el área del hemisferio norte más la del hemisferio sur. Lo mismo puede hacerse con el cilindro $x^2 + y^2 = 1,\ 0 \leq z \leq 1$. Por su parte un toro puede verse como unión de dos cilindros curvos pegados por las circunferencias de sus bordes, y por tanto puede expresarse como unión de cuatro superficies paramétricas simples disjuntas dos a dos salvo en curvas de clase C^1.

De hecho, puede demostrarse (aunque no lo haremos aquí) que toda superficie compacta S en $\mathbb{R}$ puede descomponerse en una cantidad finita $S_1, ..., S_N$ de superficies paramétricas simples que sólo se cortan una a otra a lo sumo en curvas de clase C^1 a trozos. Entonces podemos definir el área de S como la suma de las áreas de las S_i, $i = 1, ..., N$. Por supuesto habría que probar que si $S_1', ..., S_M'$ es otra descomposición de S en superficies paramétricas simples que sólo se cortan en curvas C^1 a trozos, entonces la suma de las áreas de $S_1', ..., S_M'$ es igual a la suma de las áreas de $S_1, ..., S_N$, lo cual no es difícil y se deja como ejercicio para el lector.

De manera análoga pueden extenderse los conceptos de integral de funciones escalares y de campos vectoriales a toda superficie compacta en $\mathbb{R}^3$.

Estas observaciones muestran que el habernos limitado a estudiar el área de las superficies paramétricas simple y las integrales sobre éstas no supone en la práctica apenas ninguna restricción.

Problemas

12.15 Calcular el área de las superficies siguientes:

(a) La parte de la esfera unitaria dentro del cono $x^2 + y^2 = z^2$, $z \geq 0$.

(b) La parte de la esfera $x^2+y^2+z^2 = R^2$ interior al cilindro $x^2+y^2 = Ry$.

(c) La parte del cono $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ limitada por el paraboloide $z = x^2 + y^2$.

12.16 Sean $0 < b < a$. Calcular el área del toro obtenido al girar la circunferencia del plano xz con centro en $(a, 0, 0)$ y radio b en el plano xz alrededor del eje z. Las ecuaciones paramétricas del toro son:

$$\begin{aligned} x &= (a + b\cos v)\cos u \\ y &= (a + b\cos v)\sin u \\ z &= b\sin v, \end{aligned}$$

con $0 \leq u \leq 2\pi$ y $0 \leq v \leq 2\pi$. Hallar también la mormal exterior unitaria a la superficie del toro. En el dibujo, $a = 5$, y $b = 1$.

12.17 En los siguientes casos, calcular la integral de f sobre la superficie S:

(a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2$; $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$.

(b) $f(x, y, z) = xyz$; S es el triángulo de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0$, $(0, 1, 1)$.

(c) $f(x, y, z) = z$; $S = \{(x, y, z) : z = x^2 + y^2 \leq 1\}$.

12.18 Determinar la masa de una lámina circular de radio R, si su densidad en cada punto es proporcional a la distancia del punto al centro, y vale 1 en el borde.

12.19 En los siguientes casos, calcular la integral del campo F sobre la superficie S.

(a) $F(x, y, z) = (x, y, -y)$; $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1; 0 \leq z \leq 1\}$ orientada con la normal exterior.

(b) $F(x,y,z) = (yz, xz, xy)$; S es la superficie del tetraedro limitado por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$, orientada con la normal exterior.

(c) $F(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$; $S = \{(x,y,z) : z^2 = x^2 + y^2, 1 \leq z \leq 2\}$, orientada con la normal exterior.

(d) $F(x,y,z) = (x,y,z)$; $S = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1, z \geq 0\}$, orientada con la normal exterior.

12.20 Demostrar que el área de la superficie de revolución en $\mathbb{R}^3$ obtenida al girar la gráfica de $z = f(x)$, $a \leq x \leq b$ (en el plano xz) alrededor del eje z es

$$2\pi \int_a^b u\sqrt{1 + f'(u)^2}du.$$

Capítulo 13

Los teoremas de Stokes y Gauss

En este último capítulo estudiaremos el teorema de Stokes, que es una generalización del teorema de Green en cuanto que relaciona la integral de un campo vectorial sobre una curva cerrada que es borde de una superficie paramétrica simple con la integral de su rotacional en dicha superficie; y también el teorema de Gauss de la divergencia, que puede verse como una versión tridimensional del teorema de Green, al relacionar la integral de un campo vectorial en una superficie cerrada que es borde de un sólido tridimensional con la integral de su divergencia en el interior de dicho sólido. En realidad estos tres teoremas pueden verse como generalizaciones del segundo teorema fundamental del cálculo a funciones de varias variables, y a su vez son casos particulares de una versión general del teorema de Stokes para variedades diferenciables de dimensión arbitraria que se estudia en cursos superiores (para enunciar y demostrar este teorema más general se requiere el desarrollo de una teoría de formas diferenciales y el uso de particiones diferenciables de la unidad, lo que no haremos en este curso por falta de tiempo; el lector interesado puede consultar el libro de Michael Spivak *Cálculo en variedades*, editorial Reverté, 1988).

Para enunciar el teorema de Stokes para superficies en $\mathbb{R}^3$ necesitamos definir lo que es el rotacional de un campo vectorial. Si $F : A \to \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial de clase C^1 definido en un abierto A de $\mathbb{R}^3$, se define el rotacional del campo $F = (P, Q, R)$, y se denota por $\mathrm{r}otF$, como

$$\mathrm{r}otF = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

Teorema 13.1 (de Stokes) *Sea S una superficie paramétrica simple con borde ∂S, parametrizada por $\Phi : \overline{D} \to \overline{S}$, donde D es la región interior a una curva cerrada simple C regular a trozos en $\mathbb{R}^2$ orientada positivamente, y $\partial S = \Phi(C)$ se supone orientada en el sentido que resulte de componer C con Φ. Sea F un campo vectorial de clase C^1 definido en un entorno abierto de S en $\mathbb{R}^3$, y con valores en $\mathbb{R}^3$. Entonces se tiene que*

$$\int_S rotF \cdot \mathbf{N} = \int_{\partial S} F.$$

Otra forma de escribir la igualdad de estas integrales es la siguiente:

$$\int_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$
$$= \int_{\partial S} Pdx + Qdy + Rdz, \quad (*)$$

donde $dy \wedge dz$, $dz \wedge dx$, $dx \wedge dy$ denotan, respectivamente,

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \ \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \ \text{ y } \ \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}.$$

Así, por ejemplo,

$$\int_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz$$

equivale a escribir

$$\int_D \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} dudv.$$

Es interesante observar que cuando S es una región del plano xy encerrada por una curva cerrada simple regular a trozos y $\mathbf{n} = \mathbf{k}$ el teorema de Stokes se reduce a la fórmula de Green

$$\int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\partial S} Pdx + Qdy.$$

Aún más instructivo resulta constatar que la demostración del teorema de Stokes consiste esencialmente (aparte de cálculos) en aplicar tres veces el la fórmula de Green, como vemos a continuación.

Demostración del teorema de Stokes: Bastará probar las tres igualdades siguientes:

$$\int_{\partial S} Pdx = \int_S \left(-\frac{\partial P}{\partial y} dx \wedge dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \wedge dx\right),$$

$$\int_{\partial S} Qdy = \int_S \left(-\frac{\partial Q}{\partial z} dy \wedge dz + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy \right),$$

$$\int_{\partial S} Rdz = \int_S \left(-\frac{\partial R}{\partial x} dz \wedge dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy \wedge dz \right),$$

ya que sumándolas obtenemos $(*)$. Puesto que la demostración de las tres fórmulas es totalmente análoga, nos contentaremos con probar la primera de ellas. Hay que demostrar pues que

$$\int_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} \right) dudv = \int_{\partial S} Pdx \tag{1}$$

Denotemos $f(u,v) = P(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$. Ahora utilizaremos la fórmula

$$\left(-\frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(f \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(f \frac{\partial x}{\partial u} \right), \tag{2}$$

que no es difícil comprobar (véase el ejercicio 13.3). Utilizando esta igualdad y el teorema de Green en el primer miembro de (1) obtenemos

$$\int_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} \right) dudv =$$

$$\int_D \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(f \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(f \frac{\partial x}{\partial u} \right) \right] dudv = \int_C f \frac{\partial x}{\partial u} du + f \frac{\partial x}{\partial v} dv. \tag{3}$$

Sea $\gamma = (u(t), v(t))$, $t \in [a,b]$, una parametrización de $C \subset \mathbb{R}^2$ recorrida en sentido positivo, entonces $\Phi \circ \gamma(t) = (x(u(t),v(t)), y(u(t),v(t)), z(u(t),v(t)))$, $t \in [a,b]$, es una parametrización admisible de ∂S, y

$$\int_{\partial S} Pdx =$$

$$\int_a^b P(x(u(t),v(t)), y(u(t),v(t)), z(u(t),v(t)) \frac{d}{dt} \left(x(u(t),v(t)) \right) dt =$$

$$\int_a^b P(x(u(t),v(t)), y(u(t),v(t)), z(u(t),v(t)) \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) dt =$$

$$\int_C f \frac{\partial x}{\partial u} du + f \frac{\partial x}{\partial v} dv,$$

es decir

$$\int_{\partial S} Pdx = \int_C f \frac{\partial x}{\partial u} du + f \frac{\partial x}{\partial v} dv,$$

lo que combinado con (3) nos da (1). $\square$

El teorema de Stokes puede aplicarse a muchas más superficies que las paramétricas simples que figuran en su enunciado. Por ejemplo, se puede aplicar a un cilindro K del tipo $x^2 + y^2 = 0$, $a \leq z \leq b$. En efecto, al cortar el cilindro K por el plano $x = 0$ obtenemos una descomposición de K en dos superficies paramétricas simples K_1 y K_2 que podemos orientar de modo que sus bordes, en los segmentos por donde se pegan (que llamaremos costuras) tengan orientaciones opuestas. Esto equivale a decir que la normal exterior unitaria en K_1 y K_2 apunta siempre hacia afuera del cilindro K. Hágase un dibujo. Sea F un campo vectorial de clase C^1 en K. Al aplicar el teorema de Stokes a F en K_1 y en K_2 y sumar las igualdades así obtenidas, como ∂K_1 y ∂K_2 tienen orientaciones opuestas en las costuras, vemos que las integrales de F sobre las costuras se cancelan unas con otras (porque cada costura se recorre exactamente dos veces, una vez en el sentido contrario de la otra) y por tanto dicha suma es igual a la suma de las integrales de F sobre C_1 y C_2, que es el borde de K. Es decir, vemos que

$$\int_K \mathrm{rot} F \cdot dS = \int_{K_1} \mathrm{rot} F \cdot dS + \int_{K_2} \mathrm{rot} F \cdot dS = ... = \int_{C_1} F + \int_{C_2} F = \int_{\partial K} F$$

y el teorema de Stokes vale para K.

Consideremos ahora el caso de una esfera S en $\mathbb{R}^3$, que tampoco es una superficie paramétrica simple, pero que puede descomponerse en dos que sí lo son: el hemisferio norte S^+ y el hemisferio sur S^-, pegadas por el ecuador C. Cada hemisferio puede orientarse de modo que la curva C del ecuador se recorre en sentido inverso según se la considere com perteneciente a uno u otro hemisferio. Esto lo podemos resumir con la notación $C\partial S^+ = C = -\partial S^-$. Aplicando el teorema de Stokes tenemos entonces

$$\int_S \mathrm{rot} F \cdot dS = \int_{S^+} \mathrm{rot} F \cdot dS + \int_{S^-} \mathrm{rot} F \cdot dS = \int_C F \cdot ds - \int_C F \cdot ds = 0,$$

es decir, el teorema de Stokes se cumple para la esfera S entendiéndose que, como no tiene borde, la integral de F sobre dicho borde inexistente se define como cero.

Lo mismo vale para un toro (ver el ejercicio 13.6), y de hecho puede probarse que para cualquier superficie compacta y sin borde M de $\mathbb{R}^3$ se tiene que

$$\int_M \mathrm{rot} F \cdot dS = 0.$$

En realidad la única propiedad que debe cumplir una superficie S de $\mathbb{R}^3$ (quizás con borde) para poderle aplicar el teorema de Stokes es que S pueda descomponerse en una cantidad finita de superficies paramétricas simples con borde orientadas y pegadas unas con otras de tal manera que cada trozo de borde que pertenezca a la vez a dos de estas superficies se recorra en sentido inverso según pertenezca a una o a otra de estas superficies. Es claro que, para una superficie S fabricada de esta manera, el tipo de argumento usado para el cilindro, la esfera o el toro, permite establecer la validez del teorema de Stokes.

Esta propiedad equivale a pedir que se pueda definir sobre S un campo vectorial continuo de vectores normales a S que no se anula en ningún punto (o lo que es lo mismo, que exista una aplicación continua $\mathbf{n} : S \to \mathbb{R}^3$ tal que $\|n(p)\| = 1$ y $n(p) \perp TS_p$ para todo $p \in S$). A las superficies con esta propiedad se les llama *orientables*.

Sin embargo existen superficies que no son orientables y a las que no se les puede aplicar el teorema de Stokes. El ejemplo típico en $\mathbb{R}^3$ es la *banda de Moebius*, superficie que se puede fabricar tomando una banda plana y pegando un extremo con otro después de dar media vuelta a uno de ellos. La superficie así construida, aunque localmente pueda parecer lo contrario, tiene una sola cara y un sólo borde, que forma una curva cerrada simple. Si fabricamos con papel y pegamento un modelo B de la banda de Moebius vemos que, dado cualquier punto de la banda, se puede dibujar un camino continuo dentro de la banda que empieza en ese punto por una cara determinada y acaba en el mismo punto pero por la otra cara, y sin tocar en ningún momento el borde de la banda. Si ahora intentamos transportar continuamente a lo largo de este camino un vector de norma uno $\mathbf{n}$ perpendicular a la superficie, vemos que al volver al punto inicial el vector apunta en sentido opuesto. Esto hace ver que es imposible definir un campo de vectores de norma uno y perpendiculares a B que sea continuo en todos los puntos, es decir, B no es orientable.

Por otra parte, no es difícil ver que el teorema de Stokes falla en B. En efecto, podemos dividir B en dos superficies paramétricas simples B_1 y B_2 obtenidos al cortar B transversalmente por dos sitios diferentes. Pero resulta imposible orientar B_1 y B_2 de modo que, en los segmentos donde se pegan, las orientaciones del borde de B_1 y del borde de B_2 sean opuestas. Esto supone que si aplicamos el teorema de Stokes a B_1 y B_2 y sumamos las igualdades obtenidas vamos a deducir que

$$\int_B \mathrm{rot} F \cdot dS = \int_{B_1} \mathrm{rot} F \cdot dS + \int_{B_2} \mathrm{rot} F \cdot dS = \sum_{j=1}^{4} \int_{C_j} F \cdot ds + 2 \int_L F \cdot ds,$$

donde L es uno de esos dos segmentos donde se pegan B_1 y B_2, y $C_1, ..., C_4$

son los cuatro trozos de ∂B generados al cortar B en B_1 más B_2; esto sucede porque las orientaciones de B_1 y B_2 son opuestas en uno de los segmentos donde estas piezas se pegan (a lo largo de este segmento las integrales de línea se cancelan una con otra), y la misma en el otro (al que llamamos L, y sobre el cual las integrales se suman en vez de cancelarse). Es fácil ver que existen campos vectoriales F de clase C^1 tales que $F = 0$ en ∂B pero $\int_L F \cdot ds \neq 0$. Para estos campos se tiene, por lo anterior, que

$$\int_B \mathrm{rot} F \cdot dS = 2 \int_L F \cdot ds,$$

y también

$$\int_{\partial B} F \cdot ds = 0.$$

Por tanto, si el teorema de Stokes fuera cierto en B para uno de estos campos F llegaríamos a que $\int_L F \cdot ds = 0$, una contradicción.

A propósito de la banda de Moebius, es interesante señalar que si por su borde, que es homeomorfo a una circunferencia, pegamos un círculo entonces, obtenemos una superficie que es homeomorfa al plano proyectivo (y que a su vez es el prototipo de superficie compacta sin borde y no orientable). Esta operación no puede realizarse en $\mathbb{R}^3$ sin incurrir en intersecciones de la nueva superficie consigo misma; se necesitan cuatro dimensiones por lo menos para poder llevarla a cabo. Dicho de otro modo, el plano proyectivo cabe en $\mathbb{R}^4$, pero no en $\mathbb{R}^3$. Sin embargo podemos dar una *demostración visual* de que el plano proyectivo menos un círculo es igual a una banda de Moebius. En efecto, el plano proyectivo se define como la clase de equivalencia de todas las rectas vectoriales de $\mathbb{R}^3$, o lo que es lo mismo, como el conjunto cociente de una esfera por la relación de equivalencia que consiste en identificar cada punto de la esfera con su antipodal (más llanamente, el plano proyectivo es un mundo en el que un señor es el mismo señor que se encuentra en sus antípodas). Si a esta esfera con los puntos antipodales identificados le quitamos un casquete polar del hemisferio norte, y por tanto también el mismo casquete polar del hemisferio sur, que son identificables a un círculo en el plano proyectivo, obtenemos una banda cerrada B en la que los puntos antipodales siguen estando identificados. Puesto que cada punto de B entre el meridiano de Greenwich y el de longitud 180 está identificado con su antipodal situado en un meridiano mayor o igual que 180 y menor o igual que 360, podemos prescindir de todos los puntos de longitud mayor que 180, quedándonos con un sólo representante de cada clase de equivalencia para los puntos de longitud en el intervalo $(0, 180)$, teniendo en cuenta que los puntos de B que están en el meridiano 0 se siguen identificando con sus antipodales del meridiano 180. Es decir, B es una banda en la que sus lados extremos se han pegado dando media vuelta previa a uno de ellos, o sea la banda de Moebius.

Pasamos ahora a estudiar el último teorema del curso, el de Gauss de la divergencia. Llamaremos *sólido simple* a todo conjunto compacto V de $\mathbb{R}^3$ homeomorfo a una bola y cuya frontera ∂V es una superficie orientable (que puede descomponerse en una cantidad finita de superficies paramétricas simples con bordes, orientadas de tal manera que en los trozos de curva donde dos de estas superficies se peguen, las orientaciones sean opuestas). Supondremos que dicha frontera está orientada con la normal unitaria $\mathbf{n}$ apuntando hacia el exterior de V. Recordemos que la divergencia de un campo vectorial $F = (P, Q, R)$ en $\mathbb{R}^3$ se define por

$$\mathrm{div}F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Teorema 13.2 (de Gauss de la divergencia) *Sea V un sólido simple de $\mathbb{R}^3$ y $S = \partial V$ su borde, orientado con la normal unitaria exterior $\mathbf{n}$. Sea $F : V \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1. Entonces*

$$\int_V \mathrm{div}F = \int_S F \cdot \mathbf{n}\, dS.$$

Demostración: Haremos la demostración suponiendo que V es un sólido proyectable xy, proyectable yz, y proyectable xz. Que V sea proyectable xy significa que que V puede escribirse las manera siguiente:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\},$$

donde D es una región del plano xy limitada por una curva cerrada simple regular a trozos, y $\varphi, \psi : D \to \mathbb{R}$ son funciones de clase C^1 en D; es decir, V puede verse como lo que queda entre las gráficas de dos funciones de clase C^1 definidas en la proyección de V sobre el plano xy. Análogamente se define el ser proyectable xz o proyectable yz.

Sea $F = (P, Q, R)$. Como V es proyectable xy podemos escribir

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\},$$

donde D, φ, ψ cumplen las condiciones explicitadas anteriormente, y tenemos, aplicando el teorema de Fubini, que

$$\int_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \int_D R(x, y, \psi(x, y)) - R(x, y, \varphi(x, y)) dxdy. \tag{4}$$

Calculemos por otra parte la integral

$$\int_S (0,0,R)\cdot \mathbf{n}\, dS.$$

Podemos descomponer S en tres piezas, $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, donde $S_1 = \{(x,y,\varphi(x,y)) : (x,y) \in D\}$, $S_2 = \{(x,y,\psi(x,y)) : (x,y) \in D\}$, y $S_3 = \{(x,y,z) : (x,y) \in \partial D, \varphi(x,y) \leq z \leq \psi(x,y)\}$. En S_3 el vector normal exterior unitario $\mathbf{n}$ es perpendicular al eje z y por tanto también al campo $(0,0,R)$, de modo que

$$\int_{S_3} (0,0,R)\cdot \mathbf{n}\, dS \,=\, 0.$$

Por otro lado la normal $\mathbf{n}$ apunta hacia arriba en S_2 y hacia abajo en S_1, de modo que, al calcular las integrales $\int_{S_i}(0,0,R)\cdot \mathbf{n} dS$ obtenemos

$$\int_{S_2} (0,0,R)\cdot \mathbf{n} dS = \int_D (0,0,R(x,y,\psi(x,y)))\cdot(-\frac{\partial\psi}{\partial x}, -\frac{\partial\psi}{\partial y}, 1) dxdy = \int_D R(x,y,\psi(x,y)) dxdy,$$

mientras que

$$\int_{S_1} (0,0,R)\cdot \mathbf{n} dS = \int_D (0,0,R(x,y,\varphi(x,y)))\cdot(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, -1) dxdy = -\int_D R(x,y,\varphi(x,y)) dxdy.$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
&\int_S (0,0,R)\cdot \mathbf{n}\, dS = \\
&\int_{S_2} (0,0,R)\cdot \mathbf{n}\, dS + \int_{S_1} (0,0,R)\cdot \mathbf{n}\, dS + \int_{S_3} (0,0,R)\cdot \mathbf{n}\, dS = \\
&\int_D R(x,y,\psi(x,y)) dxdy - \int_D R(x,y,\varphi(x,y)) dxdy + 0 = \\
&\int_D \left(R(x,y,\psi(x,y)) - R(x,y,\varphi(x,y))\right) dxdy,
\end{aligned}$$

lo que combinado con (4) nos da

$$\int_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \int_S (0,0,R)\cdot \mathbf{n}\, dS. \tag{5}$$

Análogamente, usando que V es proyectable xz y proyectable yz, se comprueba que

$$\int_V \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \int_S (0, Q, 0) \cdot \mathbf{n}\, dS, \tag{6}$$

y que

$$\int_V \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \int_S (P, 0, 0) \cdot \mathbf{n}\, dS. \tag{7}$$

Finalmente, sumando (5), (6) y (7) obtenemos que

$$\int_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \int_S (P, Q, R) \cdot \mathbf{n}\, dS,$$

es decir el enunciado del teorema para sólidos proyectables en cualquiera de las tres direcciones de los ejes. La clase de dichos sólidos incluye las bolas y en general todos los sólidos convexos de $\mathbb{R}^3$.

Una vez demostrado el teorema de Gauss para sólidos convexos, podría extenderse a sólidos V que sean C^2-difeomorfos a la bola unidad, usando el teorema del cambio de variable de manera análoga a la del problema 11.12, aunque los cálculos son en este caso mucho más complicados.

También podría extenderse a los sólidos más generales del enunciado siguiendo un procedimiento análogo a la parte final de la demostración del teorema de Green: se aproximaría la superficie S por una superficie S' formada por caras de triángulos orientados (y pegados unos con otros de modo que los lados que sean comunes a dos triángulos tengan orientaciones opuestas según se vean como pertenecientes a uno u otro triángulo), y esta nueva superficie S' sería la frontera de un sólido V' que podría descomponerse en unión de poliedros convexos orientados de modo que dos caras contiguas tengan normales unitarias que apuntan en sentido opuesto. El teorema de la divergencia es válido para V' y S', es decir

$$\int_{V'} \mathrm{div} F = \int_{S'} F \cdot dS,$$

y como

$$\int_{V'} \mathrm{div} F \approx \int_V \mathrm{div} F \pm \varepsilon$$

y

$$\int_{S'} F \cdot dS \approx \int_S F \cdot dS \pm \varepsilon$$

haciendo tender ε a cero se obtendría en resultado general.

Resultaría muy engorroso, sin embargo, detallar con cuidado este esquema de demostración. Llegados a este punto, y una vez que el lector haya desarrollado su intuición sobre los teoremas de Green, Stokes y Gauss, y se haya ejercitado con ellos, lo más recomendable sería pasar a estudiar las herramientas (a saber, formas diferenciales y particiones de la unidad) que permiten enunciar y demostrar la versión general de estos teoremas para variedades diferenciables en $\mathbb{R}^n$. Remitimos al lector interesado al libro de Spivak citado al comienzo de este capítulo. □

Igual que ocurría con el teorema de Stokes, el teorema de Gauss es válido para muchos más sólidos que los del enunciado. Por ejemplo, es fácil ver que el teorema de la divergencia es válido para cualquier sólido homeomorfo a una bola agujereada del tipo $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 2\}$ cuya frontera se componga de dos superficies orientadas con la normal exterior (sin embargo, en la frontera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ del agujero, exterior en este caso significa que $\mathbf{n}$ apunta para adentro del agujero).

También es fácil ver que el teorema de Gauss es válido para cualquier toro en $\mathbb{R}^3$, o incluso una suma conexa de una cantidad finita de toros en $\mathbb{R}^3$. Lo importante en todos estos casos es que el sólido V considerado pueda descomponerse en una cantidad finita de sólidos simples orientados de tal modo que en las superficies donde dos de estos sólidos se pegan, las normales apunten en sentido contrario.

De hecho puede demostrarse, aunque no lo haremos aquí, que toda superficie S compacta sin borde en $\mathbb{R}^3$ es orientable, y el teorema de Gauss es válido para el sólido V limitado por S.

Problemas

13.3 En este ejercicio se comprobará la fórmula (2) usada en la demostración del teorema de Stokes. Lo más sencillo es comprobarla en dos pasos:

1. Usar la fórmula de derivación de un producto para ver que
$$\frac{\partial}{\partial u}\left(f\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(f\frac{\partial x}{\partial u}\right) = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}.$$

2. Pongamos ahora $f(u, v) = P(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. Calcular $\partial f/\partial u$ y $\partial f/\partial v$ mediante la regla de la cadena, y después aplicar el apartado anterior para deducir que
$$\frac{\partial}{\partial u}\left(f\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(f\frac{\partial x}{\partial u}\right) = -\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}.$$

13.4 Repetir el problema 12.19, usando los teoremas de Stokes o Gauss en los casos en que resulte más conveniente.

13.5 Consideramos las superficies $S_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$, $S_2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1, z \geq 1\}$ y $S = S_1 \cup S_2$. Sea el campo $F(x, y, z) = (zx + z^2 y + x, z^3 xy + y, z^2 x^2)$. Calcular

$$\int_S rot F.$$

13.6 Demostrar que si S es una superficie sin borde (por ejemplo, una esfera, o un toro en $\mathbb{R}^3$) entonces

$$\int_S \mathrm{rot} F \cdot dS = 0$$

para todo campo vectorial F de clase C^1 en S.

13.7 Utilizar el teorema de la divergencia para calcular $\int_S F$, donde $F(x, y, z) = (xy^2, x^2 y, y)$, y S consta de:

$$\{x^2 + y^2 = 1, -1 < z < 1\} \cup \{x^2 + y^2 \leq 1, z = 1\} \cup \{x^2 + y^2 \leq 1, z = -1\}.$$

13.8 Consideramos $f(x, y, z) = x^2 + 2xy + z^2 - 3x + 1$, $F(x, y, z) = (e^{-xy} + z, z \sin y, x^2 - z^2 + y^2)$, y sea $V = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 3 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 + z^2 \geq 4z - 3\}$. Calcular

$$\int_{\partial V} \nabla f + rot F.$$

13.9 Sean $V = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2, x \geq 0, y \geq 0\}$, $S = \{(x, y, z) : z = 1 - x^2 - y^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, y sea C el borde de S.

(a) Calcular el área de S.

(b) Calcular el volumen de V.

(c) Calcular $\int_C F$, donde $F(x, y, z) = (1 - 2z, 0, 2y)$.

13.10 Sea $B(t)$ una bola euclídea de radio $t > 0$ con centro en un punto $a \in \mathbb{R}^3$, y sea $S(t)$ la esfera correspondiente. Sea $F : B(1) \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1, y sea $\mathbf{n} = \mathbf{n}_t$ la normal unitaria exterior a $S(t)$. Probar que

$$\mathrm{div} F(a) = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{\mathrm{vol}(B(t))} \int_{S(t)} F \cdot \mathbf{n} dS.$$

13.11 En los siguientes ejercicios, $\partial f/\partial n$ denota la derivada direccional de un campo escalar f en la dirección de la normal unitaria exterior $\mathbf{n}$ a una superficie orientable S que limita un sólido V al que se puede aplicar el teorema de la divergencia. Es decir,

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \nabla f \cdot \mathbf{n}.$$

En cada uno de los ejercicios demostrar la igualdad indicada, suponiendo la continuidad de todas las derivadas que intervienen:

1. $$\int_S \frac{\partial f}{\partial n} dS = \int_V \nabla^2 f dxdydz.$$

2. $$\int_S \frac{\partial f}{\partial n} dS = 0$$

   siempre que f sea armónica en V (se dice que f es armónica si $\triangle f := \nabla^2 f := \mathrm{div}\nabla f = 0$).

3. $$\int_S f\frac{\partial g}{\partial n} dS = \int_V f\nabla^2 g dxdydz + \int_V \nabla f \cdot \nabla g dxdydz.$$

4. $$\int_S \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n} \right) dS = \int_V \left(f\nabla^2 g - g\nabla^2 f \right) dxdydz.dxdydz$$

5. $$\int_S f\frac{\partial g}{\partial n} dS = \int_S g\frac{\partial f}{\partial n} dS$$

   si f y g son ambas armónicas en V.

6. $$\int_S f\frac{\partial f}{\partial n} dS = \int_V |\nabla f|^2 dxdydz$$

   si f es armónica en V.

13.12 Sea V un sólido convexo de $\mathbb{R}^3$ cuya frontera es una superficie cerrada S y sea $\mathbf{n}$ la normal unitaria exterior a S. Sean F y G dos campos vectoriales de clase C^1 tales que

$$\mathrm{rot}F = \mathrm{rot}G, \quad \text{y} \quad \mathrm{div}F = \mathrm{div}G$$

en V, y que cumplen

$$F \cdot \mathbf{n} = G \cdot \mathbf{n}$$

en S. Demostrar que $F = G$ en V.
Indicación: Sea $H = F - G$; encontrar una función de potencial f para H y usar una de las igualdades del ejercicio anterior para ver que

$$\int_V \|\nabla f\|^2 dx dy dz = 0.$$