EXAMEN DE ANÁLISIS DE VARIABLE REAL, GRUPOS D Y B.

SEGUNDO CUATRIMESTRE, CON TEORÍA. 4 DE JULIO DE 2005

1. Demostrar que si (f_n) es una sucesión de funciones derivables con derivadas continuas que convergen uniformemente a una función g en un intervalo I, y (f_n) converge puntualmente en I a una función f, entonces la función f es derivable, y $f' = g$. (Valor: tres puntos.)

2. Considérese la sucesión de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) = \int_0^x \frac{1}{n^4 + t^4} dt.$$

Se pide:

1. Hacer un dibujo genérico de la gráfica de f_n.
2. Estudiar si la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge o no uniformemente en el intervalo $[0, a]$, donde $a > 0$.

(Valor: dos puntos.)

3. Calcular el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = x \log(x)$, $g(x) = 3x^2 + 2x + 3$ y las rectas $x = 1$, $x = 7$. (Valor: un punto.)

4. Estudiar si la función definida por

$$f(x) = \left| \operatorname{sen}(\cos(x + |x - 2|)) + \frac{1}{1 + x^4} \right|$$

es uniformemente continua en $\mathbb{R}$. (Valor: dos puntos.)

5. Sean a, b dos números positivos. Construir una función $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, convexa y de clase C^2, tal que:

1. $f(x) = 0$ si y sólo si $x \leq 0$;
2. $f'(x) = b$ para todo $x \geq a$.

(Valor: dos puntos.)