EXAMEN DE ANÁLISIS DE VARIABLE REAL, GRUPOS D Y B.

SEGUNDO CUATRIMESTRE, SÓLO PROBLEMAS. 12 DE SEPTIEMBRE DE 2005

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de Lipschitz. Probar que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0.$$

(Valor: dos puntos.)

2. Considérese la sucesión de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) = \int_0^{x^2} \frac{n}{n^6 + t^2} dt.$$

Se pide:

1. Hacer un dibujo genérico de la gráfica de f_n.
2. Estudiar si la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge o no uniformemente en el intervalo $[0, 100]$.

(Valor: tres puntos.)

3. Estudiar si la función definida por

$$f(x) = \left| \operatorname{sen}^2(\cos^5(x + 7|x - 2|)) + \frac{1}{1 + x^{300}} \right|$$

es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.
(Valor: dos puntos.)

4. Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $\varphi(x) > 0$ si $x \in (0, 1)$ y $\varphi(x) = 0$ si $x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$. Definamos las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \int_0^x \varphi(s) ds$$

y

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Demostrar que f es de clase C^1, que g es de clase C^2, y dibujar las gráficas de f y de g.
(Valor: tres puntos.)