

# EXAMEN DE ANÁLISIS DE VARIABLE REAL, GRUPOS D Y B.

SEGUNDO CUATRIMESTRE, CON TEORÍA. 12 DE SEPTIEMBRE DE 2005

1. Demostrar lo siguiente:

1. Si  $f$  tiene derivada positiva en  $[a, b]$  entonces  $f$  es creciente en  $[a, b]$ .
2. Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es integrable entonces  $F(x) = \int_a^x f$  es continua (de hecho de Lipschitz) en  $[a, b]$ .

(Valor: tres puntos.)

2. Considérese la sucesión de funciones de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  definida por

$$f_n(x) = \int_0^{x^2} \frac{n}{n^6 + t^2} dt.$$

Se pide:

1. Hacer un dibujo genérico de la gráfica de  $f_n$ .
2. Estudiar si la serie de funciones  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  converge o no uniformemente en el intervalo  $[0, 100]$ .

(Valor: tres puntos.)

3. Estudiar si la función definida por

$$f(x) = \left| \sin^2(\cos^5(x + 7|x - 2|)) + \frac{1}{1 + x^{300}} \right|$$

es uniformemente continua en  $\mathbb{R}$ .

(Valor: un punto.)

4. Sea  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua tal que  $\varphi(x) > 0$  si  $x \in (0, 1)$  y  $\varphi(x) = 0$  si  $x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$ . Definamos las funciones  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$f(x) = \int_0^x \varphi(s) ds$$

y

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Demostrar que  $f$  es de clase  $C^1$ , que  $g$  es de clase  $C^2$ , y dibujar las gráficas de  $f$  y de  $g$ .

(Valor: tres puntos.)