TEORÍA DE LA MEDIDA. EXAMEN FINAL, 20 DE DICIEMBRE DE 2024.

PROBLEMAS

1. [3,5 puntos.] Sean X un espacio métrico y μ una medida de Borel en X tal que X es unión numerable de conjuntos abiertos de medida finita.

a) Demostrar que para cada $f : X \to \mathbb{R}$ medible existe una sucesión $(f_k) \subset C(X)$ tal que para casi todo $x \in X$ existe $k_x \in \mathbb{N}$ tal que $f_k(x) = f(x)$ para todo $k \geq k_x$. En particular $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ para casi todo $x \in X$.[1]

b) Si además suponemos que X es separable y localmente compacto, usar lo anterior para demostrar lo siguiente: dada $f \in L^1_{loc}(\mu)$, si $\int_X f\varphi d\mu = 0$ para toda $\varphi \in C_c(X)$, entonces $f = 0$ en casi todo punto.

2. [2 puntos.] Probar que si $f, f_k \in L^1(\mu)$, $\lim_{k\to\infty} \int_X |f_k| d\mu = \int_X |f| d\mu$, y $\lim_{k\to\infty} f_k = f$ en casi todo punto, entonces

$$\lim_{k\to\infty} \int |f_k - f| d\mu = 0.$$[2]

3. [1 punto] Si $E \subset \mathbb{R}^n$ es medible, demostrar que existe $A \subset E$ medible tal que $|A| = \frac{1}{\pi}|E|$.

4. [1 punto.] Sean $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua, y $D = \{x \in [0,1] : \exists f'(x) \in \mathbb{R}\}$.

a) Demostrar que si $|E| = 0$ entonces $|f(E \cap D)| = 0$.

b) Suponiendo que $f_{|D}$ es además inyectiva, deducir que existe $g : [0,1] \to [0,\infty)$ integrable tal que $|f(A \cap D)| = \int_A g(x)dx$ para todo $A \subset \mathbb{R}$ medible Lebesgue.

---

[1] Para probar esto se sugiere combinar el teorema de Lusin y el lema de Borel-Cantelli. En este ejercicio $C(X)$ denota el espacio de funciones continuas en X con valores en $\mathbb{R}$, y $C_c(X)$ el subconjunto de $C(X)$ formado por las funciones que tienen soporte compacto.

[2] Se sugiere considerar $|f_n| + |f| - |f_n - f|$.