TEORÍA DE LA MEDIDA. EXAMEN FINAL DEL 20 DE DICIEMBRE DE 2024.

TEST TEÓRICO-PRÁCTICO

Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas o, dado el caso, escribir los números pedidos.

1. La medida de Hausdorff $\mathcal{H}^s$ es σ-finita en $\mathbb{R}^n$ si $0 < s < n$.

2. Si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo entre dos espacios métricos entonces f lleva borelianos en borelianos.

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es medible si y sólo si $f^{-1}(\{t\})$ es medible para todo $t \in \mathbb{R}$.

4. Si todo subconjunto de $A \subset \mathbb{R}^n$ es medible, entonces $|A| = 0$.

5. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es medible Lebesgue entonces existe $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ medible Borel tal que $f = g$ en casi todo punto.

6. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es medible entonces su gráfica tiene medida cero en $\mathbb{R}^{n+1}$.

7. Si una sucesión de funciones (f_n) converge a f en $L^1(\mu)$ entonces alguna subsucesión de (f_n) converge en casi todo punto a f.

8. Si $M \subset \mathbb{R}^n$ es una subvariedad diferenciable compacta de dimensión $k < n$ y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es integrable entonces $A \mapsto \nu(A) = \int_A f(x)dx + \mathcal{H}^k(M \cap A)$ define una medida con signo de Borel y tal que $\lim_{r\to 0} \frac{\nu(B(x,r))}{|B(x,r)|} = f(x)$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$.

9. Toda función $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y creciente es diferenciable en casi todo punto y cumple que $\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$.

10. Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es de Lipschitz entonces $\int_{f^{-1}([a,b])} |\nabla f(x)|dx = \int_a^b \mathcal{H}^{n-1}\left(f^{-1}(\{t\})\right) dt$.

Este test supone 2,5 puntos de la nota del examen. Cada pregunta acertada suma 0,25 puntos, y cada pregunta fallada resta 0,15. Las preguntas no respondidas ni suman ni restan puntos. No hay que justificar ninguna respuesta.