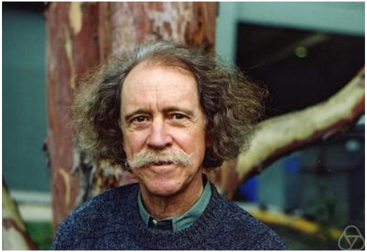
GIT para Analistas

David Fernández Álvarez

UCM, 18 de Febrero de 2013



En cualquier rama de las Matemáticas usualmente existen problemas guía que son tan difíciles que uno nunca espera resolverlos completamente aunque sirven de estímulo para una cantidad de trabajo y como estacas para medir el progreso en el campo. En Geometría Algebraica tal problema es el problema de clasificación. En su forma más fuerte, el problema consiste en clasificar todas las variedades algebraicas salvo isomorfismo.

Alguna idea?

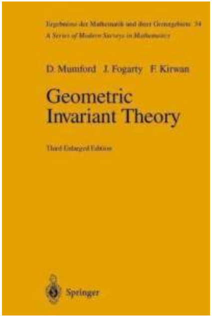
(i) Encontrar tantos invariantes discretos como sea posible.
(ii) Fijar los valores de todos los invariantes discretos e intentar construir un 'espacio de móduli',

Qué ingredientes necesitamos para construir un espacio de móduli?

(i) **Objetos:** Qué objetos geométricos nos gustaría describir o parametrizar?

(ii) **Equivalencias** Cuándo podemos decir que dos objetos son el mismo?

(iii) **Familias:** Cómo permitimos a nuestros objetos variar o modular?



[Su objetivo es] construir esquemas de móduli para varios tipos de objetos algebraicos y [que este problema] parece ser, en esencia, un caso especial y altamente no trivial del problema de construir espacios de órbitas para acciones de grupos algebraicos.

Empezamos a cocientar?

Si X es un espacio topológico con una acción de un grupo G, el espacio cociente X/G tiene una topología natural con respecto a la que la aplicación proyección $p : X \longrightarrow X/G$ es continua. Pero...

Ejemplo Malo: Sean $X = S^1 \subset \mathbb{C}^1$, $G = \mathbb{Z}$, α algún número irracional y G actúa sobre X por $\mu(n, x) = exp(2\pi i \alpha n)x$.

Si M es una variedad diferenciable sobre la que actúa un grupo de Lie G de manera suave y libre, entonces M/G puede ser dotado con una estructura de variedad diferenciable con respecto a la que la proyección natural es una submersión.

Y si X es una variedad algebraica separada?

Idea Consideramos la relación de equivalencia (natural) dada por

$$x \sim x' \iff \exists g \in G \text{ tal que } g \cdot x = x'$$

De esta forma obtendremos el **conjunto** de órbitas de G en X.

Filosofía

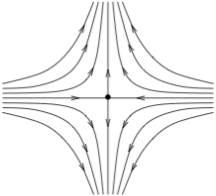
Buscamos

(i) Una variedad algebraica separada Y

(ii) Un morfismo sobreyectivo $\pi : X \longrightarrow Y$ tal que las fibras de π correspondan exactamente a las G-órbitas en X.

Pero...

Como $\overline{G \cdot x} \setminus G \cdot x$ es la unión de órbitas de dimensión estrictamente menor, cada una de sus clausuras contendrá la órbita más pequeña.



$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ (\lambda, (x, y)) & \longrightarrow & (\lambda x, \lambda^{-1} y) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} O((x,y)) & = & \{(x', y') \in \mathbb{C}^2 | x'y' = xy\}, \text{ si } xy \neq 0 \\ O((x,0)) & = & \{y = 0\} \setminus \{(0,0)\} \text{ si } x \neq 0 \\ O((0,y)) & = & \{x = 0\} \setminus \{(0,0)\} \text{ si } y \neq 0 \\ O((0,0)) & = & \{(0,0\} \end{array}$$

Aún más:

$$\begin{array}{rcl} \pi : \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x,y) & \longrightarrow & xy \end{array}$$

que es un morfismo sobreyectivo y constante sobre las órbitas. Su fibra sobre un punto $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es

$$\pi^{-1}(c) = \{(x,y) | xy = c\} = O((1,c))$$

mientras que la fibra en el cero consiste en tres órbitas

$$\pi^{-1}(0) = O((0,0)) \cup O((0,y)) \cup O((x,0))$$

Problema: Estamos parametrizando órbitas que no son cerradas y cuyas clausuras pueden intersecar dando cocientes que no son Hausdorff.

Entonces, Qué objeto buscamos?

Cociente Geométrico

Dado un grupo algebraico G, un cociente geométrico de X por G consiste en un morfismo $\pi : X \to Y$ satisfaciendo las siguientes propiedades:

(i) Un subconjunto $U \subset Y$ es abierto si y sólo si $\pi^{-1}(U)$ es abierto.

(ii) π es sobreyectiva y sus órbitas son exactamente las G-órbitas (cerradas) en X.

(iii) $\mathcal{O}_Y = \pi_* \mathcal{O}_X^G$, esto significa que para todo abierto $U \subset Y$, tenemos la igualdad de haces $\mathcal{O}_Y(U) = (\pi_* \mathcal{O}_X(\pi^{-1}(U))^G$.

Desde un punto de vista clásico, la Geometría Algebraica se puede considerar como el estudio de las soluciones de sistemas de ecuaciones polinomiales en un n-espacio afín o proyectivo sobre un cuerpo k. (Para nosotros $k = \mathbb{C}$).

Una variedad afín es un conjunto algebraico afín cerrado-Zariski irreducible.

Por el Teorema de los ceros de Hilbert:

$$\begin{aligned} \{\text{Variedad Afín}\} &\longleftrightarrow \{\text{Anillo sin div de cero f.g.}\} \\ V(I) = \{P \in \mathbb{C}^n | f_i(P) = 0, \forall f_i \in I\} &\longleftrightarrow A \simeq \frac{\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]}{I} \end{aligned}$$

Problema: Depende de las coordenadas elegidas.

Los puntos x en X están en correspondencia 1-1 con los ideales maximales $\mathfrak{m}_x \subset A$ de funciones que se anulan en x.

$\Longrightarrow$ A cualquier anillo **f.g.** sin divisores de cero A le asociaremos una variedad afín *Specm* A cuyos puntos son los ideales maximales en A. Por tanto, la versión que no depende de las coordenadas es:

$$A \longleftrightarrow \mathit{Specm}\ A$$

Por ejemplo, $\mathbb{C}^n = \mathit{Specm}\ \mathbb{C}[x_0, ..., x_n]$.

Análogamente para variedades proyectivas (añadiendo el adjetivo 'homogéneo'). Luego:

$$A \longleftrightarrow Proj\ A$$

Qué funciones pertenecerán al anillo de coordenadas de la variedad cociente?

Definición

Diremos que una función $f \in A$ es invariante bajo la acción de G (o G-invariante) si $g \cdot f = f$ para todo $g \in G$ y escribiremos

$$A^G := \{f \in A | f = g \cdot f, \forall g \in G\}$$

Obs: Una función es G-invariante si y sólo si es constante sobre las órbitas.

Además, en vista del punto (*iii*) de la Definición de cociente geométrico, el espacio de órbitas $X//G$ no será más que

$$X//G := Spm(A^G), \quad \text{donde } X = Spm(A)$$

Problema 1: Tiene sentido definir A^G?

Problema 2: Es A^G finitamente generado?

Podemos extender la acción de G a X a su anillo de coordenadas?

$$
\begin{array}{rcl}
G \times A & \to & A \\
(g, f) & \to & (g \cdot f)(x) = f(g^{-1} \cdot x)
\end{array}
$$

Es A^G finitamente generado?

14 Problema de Hilbert

Sea G un subgrupo de $GL(n, k)$. Si $GL(n, k)$ actúa linealmente sobre las variables $x_1, ..., x_n$ entonces G actúa sobre $k[x_1, ..., x_n]$ como un grupo de automorfismos de k-álgebra. Entonces, Es el anillo de elementos G-invariantes de $k[x_1, ..., x_n]$ finitamente generado?

Contraejemplo de Nagata

No

Definición

Un grupo sobre $\mathbb{C}$ es reductivo si es la complexificación de un subgrupo maximal compacto K.

Ejemplos: $GL_n(\mathbb{C}), SL_n(C)$

Teorema

Si G es un grupo algebraico reductivo entonces A^G es finitamente generada.

GIT para variedades afines

(i) $\mathbb{C}[X]^G \subset \mathbb{C}[X]$ es finitamente generada.

(ii) Sean $f_1, ..., f_n$ generadores del álgebra $\mathbb{C}[X]^G$. Entonces la imagen del morfismo

$$\varphi : X \to \mathbb{C}^n : \quad x \to (f_1(x), ..., f_n(x))$$

es cerrada e independiente de la elección de $f_1, ..., f_n$.

(iii) Denotamos por

$$\pi = \pi_X : X \to X//G$$

el morfismo sobreyectivo definido por (ii). Entonces todo morfismo G-invariante $f : X \to Y$, donde Y es una variedad afín, factoriza por un único morfismo $\varphi : X//G \to Y$.

(iv) Cada fibra de π_X contiene una única G-órbita cerrada.

(iv) Si W es un subconjunto cerrado invariante de X, entonces $\phi(W)$ es cerrado.

Qué ocurre en los problemas de clasificación?

Cómo podemos estudiar las variedades en Geometría (Diferencial)?

Definición

Diremos que un $\mathcal{S}$-morfismo

$$f : (M, \mathcal{S}_M) \to (N, \mathcal{S}_N)$$

de dos $\mathcal{S}$-variedades es un $\mathcal{S}$-embedding si f es un $\mathcal{S}$-isomorfismo sobre una $\mathcal{S}$-subvariedad de $(N, \mathcal{S}_N)$.

Teorema (Whitney)

Sea M una n-variedad diferenciable. Entonces existe un embedding diferenciable f de M en $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Teorema (Grauert & Morrey)

Toda variedad real analítica se puede embeber por un embedding real analítico en $\mathbb{R}^N$ para algún N.

Qué ocurre en variedades complejas?

Teorema

Sea X una variedad compleja compacta y conexa y sea $f \in \mathcal{O}(X)$. Entonces f es constante. Es decir, las funciones holomorfas globales son necesariamente constantes.

Corolario

No existen subvariedades complejas compactas de $\mathbb{C}^n$ de dimensión positiva.

Definición

Una variedad compleja compacta X que admite un embedding en $\mathbb{CP}^n$ (para algún n) se llama una variedad algebraica proyectiva.

Obs: Toda subvariedad compleja V de $\mathbb{CP}^n$ es una subvariedad algebraica.

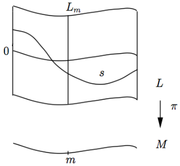
Podemos caracterizar aquellas variedades complejas compactas que son variedades proyectivas algebraicas?

Definición

Un $\mathbb{C}$-fibrado de línea sobre una variedad diferenciable M es una variedad L y una aplicación sobreyectiva suave $\pi : L \to M$ tal que

(i) Cada fibra $\pi^{-1}(m) = L_m$ es un $\mathbb{C}$-e.v. unidimensional.

(ii) Cada $m \in M$ tiene un entorno abierto $U \subset M$ para el que existe un difeomorfismo $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}$ tal que $\varphi(L_m) \subset \{m\} \times \mathbb{C}$ para cada m y que además la aplicación $\varphi|_{L_m} : L_m \to \{m\} \times \mathbb{C}$ es un isomorfismo lineal.



Obs: El conjunto de las secciones es un e.v que denotaremos por $H^0(X, L)$.

Fact: Si $f \in H^0(X, \mathcal{O}_X)$ entonces $f : X \to \mathbb{C}$ define una función holomorfa.

En general: Si $f_1, ..., f_k \in H^0(X, \mathcal{O}_X)$ entonces $f : X \to \mathbb{C}^k$ define una función holomorfa.

Problema: Normalmente, existen pocas (o ninguna) funciones holomorfas **no** constantes.

Idea: Reemplazar funciones holomorfas por secciones holomorfas $s_1, ..., s_N \in H^0(X, L)$.

Definición

Un fibrado de línea L sobre una variedad compleja se llama amplio si para algún $k > 0$ y algún sistema lineal en $H^0(X, L^k)$, la aplicación asociada φ es un embedding.

Teorema de Kodaira

Una variedad compleja compacta es una variedad proyectiva algebraica si y sólo si admite un fibrado de línea amplio $L \to X$.

$\Rightarrow$ A partir de ahora consideraremos fibrados de línea L amplios sobre variedades complejas compactas X.

Por Geometría Algebraica sabemos que

$$\mathbb{C}[X] = \bigoplus_{r\geq 0} H^0(X, L^r)$$

Luego, por el Teorema de los Ceros de Hilbert:

$$X \longleftrightarrow \mathbb{C}[X] = \bigoplus_{r\geq 0} H^0(X, L^r)$$

Por el mismo argumento

$$X//G \longleftrightarrow A^G = \bigoplus_{r\geq 0} H^0(X, L^r)^G$$

Pero, como antes:

Problema 1: Podemos extender la acción de G a $H^0(X, L)$?

Problema 2: Es A^G finitamente generado?

Podemos extender la acción de G en X a L?

Definición

Una G-linealización de L es una acción de G en L tal que

(i) Para todo $y \in L$, $g \in G$,

$$p(g \cdot y) = g \cdot p(y)$$

(ii) Para todo $x \in X$, $g \in G$, la aplicación

$$L_x \to L_{g \cdot x} : y \to g \cdot y$$

es lineal

Bajo qué condiciones existen tales linealizaciones?

Corolario

Si G es un grupo algebraico afín y conexo actuando sobre una variedad normal, entonces para todo fibrado de línea L sobre X existe un número n tal que L^n admite una G-linealización.

Podemos extender la acción de G en X

$$(g \cdot s)(x) = g \cdot s(g^{-1} \cdot x)$$

Proposición

$\bigoplus_{r \geq 0} H^0(X, L^r)^G$ es finitamente generado.

Podemos describir más explícitamente el cociente $X//G$?

Siguiendo la idea del Teorema GIT afín, consideramos el embedding de Kodaira:

$$\begin{array}{rcl} \varphi_L : X & \to & \mathbb{P}^N(= \mathbb{P}((H^0(X, L^r)^G)^*) \\ x & \to & [s_0(x) : \cdots : s_n(x)] \end{array}$$

donde $\{s_0, ..., s_n\}$ es una base de $H^0(X, L^r)^G$.

Qué puntos ven las funciones G-invariantes?

Definición

Un punto x en X se llama semiestable (con respecto a L) si existe $m > 0$ y $s \in H^0(X, L^m)^G$ tal que $X_s = \{y \in X | s(y) \neq 0\}$ es afín y contiene a x.

Problema: Puede contraer más que G-órbitas.

Definición

Un punto $x \in X$ es estable (con respecto a L) si es semiestable y, además, su grupo de isotropía G_x es finito (es decir, $dim\ O(x) = dim\ G$) y todas las órbitas de G en X_s son cerradas.

GIT para variedades algebraicas abstractas (Mumford)

Sea X una variedad algebraica sobre la que actúa un grupo G reductivo y dotada con un fibrado de línea amplio. Entonces

(i) Existe un cociente categórico $\pi : X^{ss} \to X//G$

(ii) $\pi(X^s) \subset X//G$ es abierto y $\pi|_{X^s} : X^s \to \pi(X^s)$ es un cociente geométrico.

(iii) El espacio topológico subyacente $X//G$ es $X^{ss}/\sim$ donde la relación de equivalencia viene dada por

$$x_0 \sim x_1 \iff \overline{Gx_0} \cap \overline{Gx_1} \cap X^{ss} \neq \emptyset$$

(iv) $X//G$ es isomorfo a la variedad proyectiva con anillo de coordenadas $R(X)^G$.

Existe alguna manera operativa para determinar los puntos (semi)estables?

Ahora supongamos que $G = k^*$ actúa linealmente sobre una variedad proyectiva Xen $\mathbb{P}^n$. Entonces la acción lineal inducida sobre k^{n+1} se puede diagonalizar. En otras palabras, existe una base $\{e_0, ..., e_n\}$ de k^{n+1} tal que

$$t.e_i = t^{r_i} e_i$$

y definimos

$$\mu(x) = \text{máx}\{-r_i | x_i \neq 0\}$$

Definición

Un subgrupo uniparamétrico (1-PS) de G es un isomorfismo no trivial de grupos algebraicos $\lambda : k^* \to G$.

Criterio de Hilbert-Mumford

(i) x es semiestable $\Longleftrightarrow \mu(x, \lambda) \geq 0$ para cada 1-PS λ de G.

(ii) x es estable $\Longleftrightarrow \mu(x, \lambda) > 0$ para cada 1-PS λ de G.

Muchas gracias!