Teoría de Calderón-Zygmund con medidas generales

José Manuel Conde Alonso
Seminario de Doctorandos UCM

Consejo Superior de Investigaciones Científicas - Universidad Autónoma de Madrid

15 de octubre de 2012

1. Operadores en L^p. Operadores de Calderón-Zygmund

1. Operadores en L^p. Operadores de Calderón-Zygmund
2. Acotación de operadores de Calderón-Zygmund en $L^p(\mathbb{R}^n, dx)$

1. Operadores en L^p. Operadores de Calderón-Zygmund
2. Acotación de operadores de Calderón-Zygmund en $L^p(\mathbb{R}^n, dx)$
3. Acotación de operadores de Calderón-Zygmund en contextos generales

Espacios de Lebesgue

$$L^p(\mathcal{X}, \mu) = \left\{ f \text{ medible} : \|f\|_p := \left(\int_{\mathcal{X}} |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

Espacios de Lebesgue

$$L^p(\mathcal{X},\mu)=\left\{f \text{ medible} : \|f\|_p := \left(\int_{\mathcal{X}} |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\right\}.$$

- L^p es un espacio de Banach, $1 \leq p < \infty$.

Espacios de Lebesgue

$$L^p(\mathcal{X},\mu) = \left\{ f \text{ medible} : \|f\|_p := \left(\int_{\mathcal{X}} |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

- L^p es un espacio de Banach, $1 \leq p < \infty$.
- L^p es quasi-Banach, $0 < p < 1$.

Espacios de Lebesgue

$$L^p(\mathcal{X},\mu) = \left\{ f \text{ medible} : \|f\|_p := \left(\int_{\mathcal{X}} |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

- L^p es un espacio de Banach, $1 \leq p < \infty$.
- L^p es quasi-Banach, $0 < p < 1$.
- También tiene sentido definir L^∞:

$$L^\infty(\mathcal{X},\mu) = \left\{ f \text{ medible} : \|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathcal{X}} |f(x)| < \infty \right\}.$$

Operadores en L^p. Operadores acotados

Sean $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ espacios normados de funciones. Un operador T es una función $T : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ lineal.

Operadores en L^p. Operadores acotados

Sean $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ espacios normados de funciones. Un operador T es una función $T : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ lineal.
Un operador T se llama acotado si verifica

$$\|Tf\|_{\mathcal{F}_2} \leq C\|f\|_{\mathcal{F}_1}.$$

En ese caso, llamamos $\|T\| := \sup_{\|f\|_{\mathcal{F}_1}=1} \|Tf\|_{\mathcal{F}_2}$.

Operadores en L^p. Operadores acotados

Sean $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ espacios normados de funciones. Un operador T es una función $T : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ lineal.
Un operador T se llama acotado si verifica

$$\|Tf\|_{\mathcal{F}_2} \leq C\|f\|_{\mathcal{F}_1}.$$

En ese caso, llamamos $\|T\| := \sup_{\|f\|_{\mathcal{F}_1}=1} \|Tf\|_{\mathcal{F}_2}$.

Lema

Un operador lineal T es acotado si y solo si es continuo.

Operadores de Calderón-Zygmund

Sea T un operador lineal. T es un operador de Calderón-Zygmund si satisface las siguientes condiciones:

1. Operador de integral singular

$$Tf(x) \sim \int K(x,y) f(y) d\mu(y)$$

2. Condición de tamaño

$$K(x,y) \lesssim \frac{1}{|x-y|^n}$$

3. Condición de Hörmander (cancelación)

$$\int_{|x_1 - y| > 2|x_1 - x_2|} |K(x_1, y) - K(x_2, y)| d\mu(y) \lesssim 1$$

Ejemplos

Transformada de Hilbert

$$\mathcal{H}f(x) = p.v. \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x-y} dy.$$

Ejemplos

Transformada de Hilbert

$$\mathcal{H}f(x) = p.v. \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x-y} dy.$$

Transformadas de Riesz

$$\mathcal{R}_j f(x) = p.v. \int_{R^n} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} f(y) dy, \; 1 \leq j \leq n.$$

Transformada de Cauchy

$$\mathcal{C}f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{1-\bar{\zeta}z} d\zeta.$$

Transformada de Cauchy

$$\mathcal{C}f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{1-\bar{\zeta}z}\,d\zeta.$$

Transformada de Beurling

$$\mathcal{B}f(z) = \int_{\mathbb{C}} \frac{f(w)}{(z-w)^2}\,dw.$$

$L^{1,\infty}$. La desigualdad de Chebychev

- Objetivo: acotar operadores de Calderón-Zygmund en L^p.

$L^{1,\infty}$. La desigualdad de Chebychev

- Objetivo: acotar operadores de Calderón-Zygmund en L^p.
- Primer paso: acotación con $\mathcal{F}_1 = L^1$.

$L^{1,\infty}$. La desigualdad de Chebychev

- Objetivo: acotar operadores de Calderón-Zygmund en L^p.
- Primer paso: acotación con $\mathcal{F}_1 = L^1$.
- El espacio de llegada es $\mathcal{F}_2 = L^{1,\infty}$:

$$L^{1,\infty} = \left\{ f : \; \forall \lambda, \; \mu \{ x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda \} \leq \frac{C}{\lambda} \right\}.$$

$L^{1,\infty}$. La desigualdad de Chebychev

- Objetivo: acotar operadores de Calderón-Zygmund en L^p.
- Primer paso: acotación con $\mathcal{F}_1 = L^1$.
- El espacio de llegada es $\mathcal{F}_2 = L^{1,\infty}$:

$$L^{1,\infty} = \left\{ f : \forall \lambda,\ \mu \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\} \leq \frac{C}{\lambda} \right\}.$$

- $L^{1,\infty}$ coincide con el espacio de funciones que satisfacen la desigualdad de Chebychev.

Teorema

Sea T un operador de Calderón-Zygmund . Supongamos que T está acotado en $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$. Entonces T es de tipo débil $(1,1)$, es decir,

$$\|Tf\|_{L^{1,\infty}} \leq C\|f\|_{L^1}, \ \forall f \in L^1.$$

Teorema

Sea T un operador de Calderón-Zygmund . Supongamos que T está acotado en $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$. Entonces T es de tipo débil $(1,1)$, es decir,

$$\|Tf\|_{L^{1,\infty}} \leq C\|f\|_{L^1}, \ \forall f \in L^1.$$

Intervalos diádicos

- Fijamos el cubo $Q_{00} = [0, 1)^n$.

Intervalos diádicos

- Fijamos el cubo $Q_{00} = [0,1)^n$.
- Para cada $k \in \mathbb{Z}$, definimos

$$\mathcal{D}_k := \{Q_{jk}\}_j = \left\{2^{-k}(j + Q_{00}) : j \in \mathbb{Z}^n\right\}.$$

Intervalos diádicos

- Fijamos el cubo $Q_{00} = [0,1)^n$.
- Para cada $k \in \mathbb{Z}$, definimos

$$\mathcal{D}_k := \{Q_{jk}\}_j = \left\{2^{-k}(j + Q_{00}) : j \in \mathbb{Z}^n\right\}.$$

- La unión de los $\mathcal{D}_k$ es el sistema diádico usual:

$$\mathcal{D} := \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_k.$$

Función maximal diádica

$$M_d f(x) = \sup_{x \in Q \in \mathcal{D}} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy.$$

Función maximal diádica

$$M_d f(x) = \sup_{x \in Q \in \mathcal{D}} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy.$$

Idea: $M_d f$ permite estudiar los conjuntos de nivel de f de manera sencilla.

Función maximal diádica

$$M_d f(x) = \sup_{x \in Q \in \mathcal{D}} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy.$$

Idea: $M_d f$ permite estudiar los conjuntos de nivel de f de manera sencilla. Propiedades importantes:

- $M_d : L^1 \to L^{1,\infty}$
- $f \leq M_d f$ c.t.p.

Descomposición de Calderón-Zygmund

Supongamos que $f \geq 0$. Queremos probar que para todo λ

$$|x : |Tf(x)| > \lambda| \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_{L^1}.$$

Descomposición de Calderón-Zygmund

Supongamos que $f \geq 0$. Queremos probar que para todo λ

$$|x : |Tf(x)| > \lambda| \leq \frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^1}.$$

Fijamos $\lambda > 0$. Llamamos $E_\lambda = |x : M_d f(x) > \lambda|$. Tenemos

$$|x : f(x) > \lambda| \subset E_\lambda.$$

Descomponemos

$$f = g + b,$$

$$g(x) = f(x)\chi_{(E_\lambda)^c}(x) + \sum_{Q\subset E_\lambda, Q\in\mathcal{D}} \chi_Q(x)\frac{1}{|Q|}\int_Q f(y)dy.$$

$$b(x) == \sum_{Q\subset E_\lambda, Q\in\mathcal{D}} b_Q(x) = \sum_{Q\subset E_\lambda, Q\in\mathcal{D}} \chi_Q(x)\left(f(x) - \frac{1}{|Q|}\int_Q f(y)dy\right).$$

Propiedades de g y b

- $g \leq C\lambda$.
- $\|g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}$.
- $\int_Q b_Q = 0$.
- $\|b\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}$.

TIPO DÉBIL $(1,1)$

Queremos usar la descomposición de Calderón-Zygmund para estimar $|\{|Tf| > \lambda\}|$.

$$\{|Tf| > \lambda\} \subset 2E_\lambda \cup [(2E_\lambda)^c \cap (\{|Tg| > \lambda/2\} \cup \{|Tb| > \lambda/2\})]$$

$$=: \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}.$$

Tipo débil (1, 1)

Queremos usar la descomposición de Calderón-Zygmund para estimar $|\{|Tf| > \lambda\}|$.

$$\{|Tf| > \lambda\} \subset 2E_\lambda \cup [(2E_\lambda)^c \cap (\{|Tg| > \lambda/2\} \cup \{|Tb| > \lambda/2\})]$$

$$=: \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}.$$

Como $|2Q| = 2^n|Q|$,

$$|\mathcal{A}| \leq 2^n\,|E_\lambda| \leq \frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^1}.$$

$$|\mathcal{B}| \leq \frac{C}{\lambda^2} \int |Tg|^2 \leq \frac{C}{\lambda^2} \int |g|^2 \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_{L^1}.$$

$$|\mathcal{B}| \leq \frac{C}{\lambda^2} \int |Tg|^2 \leq \frac{C}{\lambda^2} \int |g|^2 \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_{L^1}.$$

Por último, $\mathcal{C}$ se estima utilizando la media 0 y la condición de Hörmander.

Otros resultados de acotación en L^p

- Por interpolación y dualidad, si T está acotado en L^2 y de L^1 en $L^{1,\infty}$, entonces T está acotado en L^p, $1 < p < \infty$

Otros resultados de acotación en L^p

- Por interpolación y dualidad, si T está acotado en L^2 y de L^1 en $L^{1,\infty}$, entonces T está acotado en L^p, $1 < p < \infty$
- T no está acotado en L^∞. Se tiene $T : L^\infty \to \mathrm{BMO}$.

Otros resultados de acotación en L^p

- Por interpolación y dualidad, si T está acotado en L^2 y de L^1 en $L^{1,\infty}$, entonces T está acotado en L^p, $1 < p < \infty$
- T no está acotado en L^∞. Se tiene $T : L^\infty \to \mathrm{BMO}$.
- T no está acotado en L^p, $0 < p < 1$.

Otros resultados de acotación en L^p

- Por interpolación y dualidad, si T está acotado en L^2 y de L^1 en $L^{1,\infty}$, entonces T está acotado en L^p, $1 < p < \infty$
- T no está acotado en L^∞. Se tiene $T : L^\infty \to \mathrm{BMO}$.
- T no está acotado en L^p, $0 < p < 1$.
- T está acotado en L^2 si y solo si $T1 \in \mathrm{BMO}$, $T^*1 \in \mathrm{BMO}$ y T satisface una propiedad de acotación muy débil.

Nuevos contextos. Espacios métricos y medidas no doblantes

Un espacio métrico $(\mathcal{X}, d)$ puede tener también una medida μ cualquiera.

Nuevos contextos. Espacios métricos y medidas no doblantes

Un espacio métrico $(\mathcal{X}, d)$ puede tener también una medida μ cualquiera.

- Ejemplos de espacios: Espacios discretos, variedades Riemannianas, subconjuntos complicados de $\mathbb{R}^n$...

Nuevos contextos. Espacios métricos y medidas no doblantes

Un espacio métrico $(\mathcal{X}, d)$ puede tener también una medida μ cualquiera.

- Ejemplos de espacios: Espacios discretos, variedades Riemannianas, subconjuntos complicados de $\mathbb{R}^n$...
- Ejemplos de medidas: Medida de contar, medida de Hausdorff asociada a un subconjunto de $\mathbb{R}^n$...

Nuevos contextos. Espacios métricos y medidas no doblantes

Un espacio métrico $(\mathcal{X}, d)$ puede tener también una medida μ cualquiera.

- Ejemplos de espacios: Espacios discretos, variedades Riemannianas, subconjuntos complicados de $\mathbb{R}^n$...
- Ejemplos de medidas: Medida de contar, medida de Hausdorff asociada a un subconjunto de $\mathbb{R}^n$...

Pregunta: ¿Podemos extender la teoría de acotación de operadores de Calderón-Zygmund a este tipo de espacios?

μ es *doblante* si

$$\mu(2Q) \leq C_\mu \mu(Q), \ \forall Q.$$

μ es *doblante* si

$$\mu(2Q) \leq C_\mu \mu(Q), \ \forall Q.$$

- Si μ es doblante, respuesta afirmativa (muy fácil).

μ es *doblante* si

$$\mu(2Q) \leq C_\mu \mu(Q), \ \forall Q.$$

- Si μ es doblante, respuesta afirmativa (muy fácil).
- Si μ es general, problema abierto.

μ es *doblante* si

$$\mu(2Q) \leq C_\mu \mu(Q), \ \forall Q.$$

- Si μ es doblante, respuesta afirmativa (muy fácil).
- Si μ es general, problema abierto.
- Avances para medidas de crecimiento polinomial:

$$\mu(B(x,R)) \leq C_0 R^k, \ 0 < k < n.$$

Problemas de la descomposición clásica

Problemas de la descomposición clásica

1. Si μ es no doblante, $|f(x)| \not\lesssim M_d|f(x)|$.

Problemas de la descomposición clásica

1. Si μ es no doblante, $|f(x)| \not\lesssim M_d|f(x)|$. Razón: 'rigidez' del sistema diádico.

Problemas de la descomposición clásica

1. Si μ es no doblante, $|f(x)| \not\lesssim M_d|f(x)|$. Razón: 'rigidez' del sistema diádico.
2. $\mu(2E_\lambda) \not\leq C\mu(E_\lambda)$.

Problemas de la descomposición clásica

1. Si μ es no doblante, $|f(x)| \not\lesssim M_d|f(x)|$. Razón: 'rigidez' del sistema diádico.
2. $\mu(2E_\lambda) \not\lesssim C\mu(E_\lambda)$.
3. Si $f = g + b$, $g \not\lesssim C\lambda$.

Las buenas noticias

1. El maximal diádico es de tipo débil $(1, 1)$.

Las buenas noticias

1. El maximal diádico es de tipo débil $(1, 1)$.
2. Funciona el Teorema de Diferenciación de Lebesgue.

Las buenas noticias

1. El maximal diádico es de tipo débil $(1,1)$.
2. Funciona el Teorema de Diferenciación de Lebesgue.
3. Existen cubos doblantes grandes: para casi todo x y toda C, existe un cubo doblante Q centrado en x y de lado mayor que C.

Las buenas noticias

1. El maximal diádico es de tipo débil $(1,1)$.
2. Funciona el Teorema de Diferenciación de Lebesgue.
3. Existen cubos doblantes grandes: para casi todo x y toda C, existe un cubo doblante Q centrado en x y de lado mayor que C.
4. Existen cubos doblantes pequeños: para casi todo x, existe una sucesión de cubos doblantes $\{Q_j\}_j$ que converge a x.

Las buenas noticias

1. El maximal diádico es de tipo débil $(1,1)$.
2. Funciona el Teorema de Diferenciación de Lebesgue.
3. Existen cubos doblantes grandes: para casi todo x y toda C, existe un cubo doblante Q centrado en x y de lado mayor que C.
4. Existen cubos doblantes pequeños: para casi todo x, existe una sucesión de cubos doblantes $\{Q_j\}_j$ que converge a x.

Idea: eliminar la rigidez del sistema diádico $\mathcal{D}$ utilizando más de un sistema diádico. Construimos en $\mathbb{R}^n$ $n+1$ familias de cubos diádicos.

Más sistemas diádicos

Definición (sistemas diádicos)

(i) Sistema diádico usual:

$$\mathcal{D}^0 = \mathcal{D}.$$

(ii) Sistemas diádicos desplazados: Fijemos $1 \leq m \leq n$, y sea $v = (1, \cdots, 1)$. Definimos

$$\mathcal{D}^m = \left\{ {}_mQ_k^j,\ k \in \mathbb{Z},\ j \in \mathbb{Z}^n \right\},$$

donde los cubos ${}_mQ_k^j$ se definen mediante el siguiente proceso:

- El cubo inicial del sistema es ${}_mQ_0^0 = Q_0 + \frac{m}{p_n} v$. Esto define la generación 0-ésima y todas las generaciones k-ésimas, $k > 0$.

- El cubo padre de ${}_mQ_0^0$, ${}_mQ_{-1}^0$, se define como el único padre diádico posible tal que la distancia diagonal entre ${}_mQ_{-1}^0$ y ${}_0Q_{-1}^0$ es un múltiplo entero de $2\frac{1}{p_n}$. Esto define la generación (-1)-ésima. El padre está bien definido y es único.

- Inductivamente, el padre de ${}_mQ_k^0$, ${}_mQ_{k-1}^0$, se define como el único padre diádico posible tal que la distancia diagonal entre ${}_mQ_{k-1}^0$ y ${}_0Q_{k-1}^0$ es un múltiplo entero de $2^{-k+1}\frac{1}{p_n}$. Esto define todas las generaciones k-ésimas, $k < -1$.

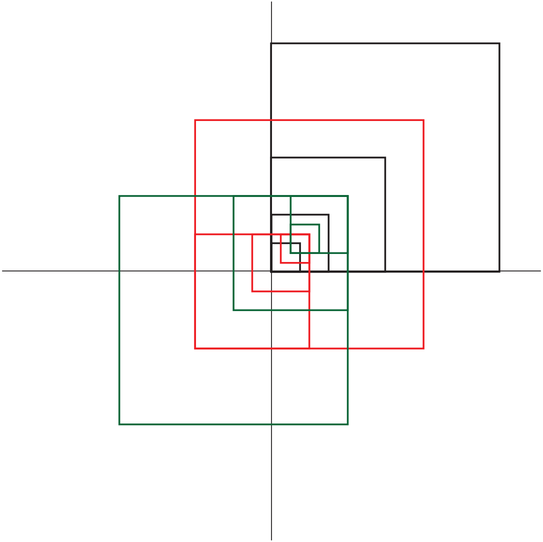

Figura : Cubo inicial y tres antecesores de cada sistema diádico en dimensión 2.

Sea $\mathcal{F} = \cup_{m=0}^{n} \mathcal{D}^m$.

Lema de cubrimiento

Sea Q un cubo de $\mathbb{R}^n$. Entonces existe un entero a, que depende solamente de $l(Q)$, tal que para algún $0 \leq m \leq n$,

$$Q \subset Q_1 \subset C_1 Q, \text{ con } Q_1 =_m Q_a^j \in \mathcal{Q}_m, \ (0 \leq m \leq n),$$

y donde $C_1 = C_1(n)$ es una constante que depende solamente de la dimensión del espacio n.

Un nuevo operador maximal

$$M_{\mathcal{F},\mu}f(x) = \sup_{x \in Q \in \mathcal{F}} \frac{1}{\mu(2Q)} \int_Q |f(y)| d\mu(y).$$

Un nuevo operador maximal

$$M_{\mathcal{F},\mu}f(x) = \sup_{x\in Q\in\mathcal{F}} \frac{1}{\mu(2Q)} \int_Q |f(y)|d\mu(y).$$

Lema

1. $M_{\mathcal{F},\mu}$ es de tipo débil $(1,1)$.

Un nuevo operador maximal

$$M_{\mathcal{F},\mu}f(x) = \sup_{x\in Q\in\mathcal{F}} \frac{1}{\mu(2Q)} \int_Q |f(y)|d\mu(y).$$

Lema

1. $M_{\mathcal{F},\mu}$ es de tipo débil $(1,1)$.
2. $\{|f(x)| > \lambda\} \subset \{M_{\mathcal{F},\mu}|f(x)| > \lambda'\}$.

Descomposición de Calderón-Zygmund

Teorema (I)

Sea $f \in L^1$, $f \geq 0$. Sea $\tilde{E}_\lambda = \{M_{\mathcal{F},\mu} f > \lambda\}$. Escribimos

$$f = g + b,$$

$$g(x) = f(x)\chi_{\tilde{E}_\lambda^c}(x) + \sum_{Q \in \mathcal{F}, Q \subset \tilde{E}_\lambda} \varphi_Q(x),$$

$$b(x) = \sum_{Q \in \mathcal{F}, Q \subset \tilde{E}_\lambda} b_Q(x) = \sum_{Q \in \mathcal{F}, Q \subset \tilde{E}_\lambda} (\chi_Q(x) f(x) - \varphi_Q(x)).$$

Teorema (II)

Además, la definición de las φ_Q nos los siguientes resultados para g y b:

- $g \leq C\lambda$.
- $\|g\|_{L^1} \leq C\|f\|_{L^1}$.
- Para cada Q, existe un cubo R_Q tal que $\int_{R_Q} b_Q d\mu = 0$.
- $\|b\|_{L^1} \leq C\|f\|_{L^1}$.

Tipo débil (1,1)

Tipo débil (1,1)

1. Descomponemos el conjunto $\{|Tf| > \lambda\} \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$.

Tipo débil (1,1)

1. Descomponemos el conjunto $\{|Tf| > \lambda\} \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$.
2. La estimación para $\mathcal{A}$ sigue de la definición de $M_{\mathcal{F},\mu}$.

Tipo débil (1,1)

1. Descomponemos el conjunto $\{|Tf| > \lambda\} \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$.
2. La estimación para $\mathcal{A}$ sigue de la definición de $M_{\mathcal{F},\mu}$.
3. Las estimaciones para $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son como en el caso clásico.

Bibliografía

[1] J.M. Conde, *A note on dyadic coverings and nondoubling Calderón-Zygmund theory*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **397** (2013), pp. 785-790.

[2] J. Duoandikoetxea, *Fourier Analysis*, Graduate Studies in Mathematics 29 (2001).

¡MUCHAS GRACIAS!