Interpolación real de espacios de Banach

Alba Segurado López

3 de diciembre de 2012

Índice

Introducción

Comencemos por un problema clásico: sea f una función compleja en $[0,1]$. Consideramos la sucesión de sus coeficientes de Fourier

$$\hat{f}(m) := \frac{1}{2\pi}\int_0^1 f(x)e^{-imx}\,dx, \qquad m \in \mathbb{Z}.$$

Introducción

Comencemos por un problema clásico: sea f una función compleja en $[0, 1]$. Consideramos la sucesión de sus coeficientes de Fourier

$$\hat{f}(m) := \frac{1}{2\pi} \int_0^1 f(x) e^{-imx} \, dx, \qquad m \in \mathbb{Z}.$$

Si $f \in L_p([0, 1])$, ¿para qué valores de q se tiene que $(\hat{f}(m)) \in \ell_q$?

Introducción

Comencemos por un problema clásico: sea f una función compleja en $[0,1]$. Consideramos la sucesión de sus coeficientes de Fourier

$$\hat{f}(m) := \frac{1}{2\pi} \int_0^1 f(x) e^{-imx}\, dx, \qquad m \in \mathbb{Z}.$$

Si $f \in L_p([0,1])$, ¿para qué valores de q se tiene que $(\hat{f}(m)) \in \ell_q$?

$\mathbf{p = 2}$

Introducción

Comencemos por un problema clásico: sea f una función compleja en $[0,1]$. Consideramos la sucesión de sus coeficientes de Fourier

$$\hat{f}(m) := \frac{1}{2\pi}\int_0^1 f(x)e^{-imx}\,dx, \qquad m \in \mathbb{Z}.$$

Si $f \in L_p([0,1])$, ¿para qué valores de q se tiene que $(\hat{f}(m)) \in \ell_q$?

$\mathbf{p = 2}$ Si $f \in L_2([0,1])$, entonces $(\hat{f}(m)) \in \ell_2$ y $\left\|(\hat{f}(m))\right\|_{\ell_2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_{L_2}$

Introducción

Comencemos por un problema clásico: sea f una función compleja en $[0,1]$. Consideramos la sucesión de sus coeficientes de Fourier

$$\hat{f}(m) := \frac{1}{2\pi}\int_0^1 f(x)e^{-imx}\,dx, \qquad m \in \mathbb{Z}.$$

Si $f \in L_p([0,1])$, ¿para qué valores de q se tiene que $(\hat{f}(m)) \in \ell_q$?

$\mathbf{p=2}$ Si $f \in L_2([0,1])$, entonces $(\hat{f}(m)) \in \ell_2$ y $\left\|(\hat{f}(m))\right\|_{\ell_2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_{L_2}$

$\mathbf{p=1}$

Introducción

Comencemos por un problema clásico: sea f una función compleja en $[0,1]$. Consideramos la sucesión de sus coeficientes de Fourier

$$\hat{f}(m) := \frac{1}{2\pi}\int_0^1 f(x)e^{-imx}\,dx, \qquad m \in \mathbb{Z}.$$

Si $f \in L_p([0,1])$, ¿para qué valores de q se tiene que $(\hat{f}(m)) \in \ell_q$?

$\mathbf{p = 2}$ Si $f \in L_2([0,1])$, entonces $(\hat{f}(m)) \in \ell_2$ y
$\left\|(\hat{f}(m))\right\|_{\ell_2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_{L_2}$

$\mathbf{p = 1}$ Si $f \in L_1([0,1])$, entonces $(\hat{f}(m)) \in \ell_\infty$ y
$\left\|(\hat{f}(m))\right\|_{\ell_\infty} \leqslant \frac{1}{2\pi}\|f\|_{L_1}$

Introducción

Comencemos por un problema clásico: sea f una función compleja en $[0,1]$. Consideramos la sucesión de sus coeficientes de Fourier

$$\hat{f}(m) := \frac{1}{2\pi}\int_0^1 f(x)e^{-imx}\,dx, \qquad m \in \mathbb{Z}.$$

Si $f \in L_p([0,1])$, ¿para qué valores de q se tiene que $(\hat{f}(m)) \in \ell_q$?

$\mathbf{p = 2}$ Si $f \in L_2([0,1])$, entonces $(\hat{f}(m)) \in \ell_2$ y $\left\|(\hat{f}(m))\right\|_{\ell_2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_{L_2} \implies \mathcal{F} : L_2 \to \ell_2$ y $\|\mathcal{F}\|_{2,2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

$\mathbf{p = 1}$ Si $f \in L_1([0,1])$, entonces $(\hat{f}(m)) \in \ell_\infty$ y $\left\|(\hat{f}(m))\right\|_{\ell_\infty} \leqslant \frac{1}{2\pi}\|f\|_{L_1}$

Introducción

Comencemos por un problema clásico: sea f una función compleja en $[0,1]$. Consideramos la sucesión de sus coeficientes de Fourier

$$\hat{f}(m) := \frac{1}{2\pi}\int_0^1 f(x)e^{-imx}\,dx, \qquad m \in \mathbb{Z}.$$

Si $f \in L_p([0,1])$, ¿para qué valores de q se tiene que $(\hat{f}(m)) \in \ell_q$?

$\mathbf{p = 2}$ Si $f \in L_2([0,1])$, entonces $(\hat{f}(m)) \in \ell_2$ y $\left\|(\hat{f}(m))\right\|_{\ell_2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_{L_2} \implies \mathcal{F} : L_2 \to \ell_2$ y $\|\mathcal{F}\|_{2,2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

$\mathbf{p = 1}$ Si $f \in L_1([0,1])$, entonces $(\hat{f}(m)) \in \ell_\infty$ y $\left\|(\hat{f}(m))\right\|_{\ell_\infty} \leqslant \frac{1}{2\pi}\|f\|_{L_1} \implies \mathcal{F} : L_1 \to \ell_\infty$ y $\|\mathcal{F}\|_{1,\infty} \leqslant \frac{1}{2\pi}$.

Teorema de Riesz-Thorin Sean $(\mathcal{U}, \mu), (\mathcal{V}, \nu)$ dos espacios de medida σ-finitos,

Teorema de Riesz-Thorin Sean $(\mathcal{U},\mu),(\mathcal{V},\nu)$ dos espacios de medida σ-finitos, sean $1\leqslant p_0,p_1,q_0,q_1\leqslant\infty$

Teorema de Riesz-Thorin Sean $(\mathcal{U},\mu),(\mathcal{V},\nu)$ dos espacios de medida σ-finitos, sean $1 \leqslant p_0, p_1, q_0, q_1 \leqslant \infty$ y sea T un operador lineal tal que

$$
\begin{aligned}
T &: L_{p_0}(\mathcal{U},\mu) \to L_{q_0}(\mathcal{V},\nu) \qquad \text{con norma } M_0, \text{ y} \\
T &: L_{p_1}(\mathcal{U},\mu) \to L_{q_1}(\mathcal{V},\nu) \qquad \text{con norma } M_1.
\end{aligned}
$$

Teorema de Riesz-Thorin Sean $(\mathcal{U},\mu),(\mathcal{V},\nu)$ dos espacios de medida σ-finitos, sean $1\leqslant p_0,p_1,q_0,q_1\leqslant\infty$ y sea T un operador lineal tal que

$$\begin{aligned} T &: L_{p_0}(\mathcal{U},\mu)\to L_{q_0}(\mathcal{V},\nu) \qquad \text{con norma } M_0\text{, y} \\ T &: L_{p_1}(\mathcal{U},\mu)\to L_{q_1}(\mathcal{V},\nu) \qquad \text{con norma } M_1. \end{aligned}$$

Tomemos $0<\theta<1$ y los valores

$$\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}, \qquad \frac{1}{q}=\frac{1-\theta}{q_0}+\frac{\theta}{q_1}.$$

Teorema de Riesz-Thorin Sean $(\mathcal{U},\mu),(\mathcal{V},\nu)$ dos espacios de medida σ-finitos, sean $1\leqslant p_0,p_1,q_0,q_1\leqslant\infty$ y sea T un operador lineal tal que

$$\begin{array}{lll} T & : & L_{p_0}(\mathcal{U},\mu)\to L_{q_0}(\mathcal{V},\nu) \qquad \text{con norma } M_0, \text{ y} \\ T & : & L_{p_1}(\mathcal{U},\mu)\to L_{q_1}(\mathcal{V},\nu) \qquad \text{con norma } M_1. \end{array}$$

Tomemos $0<\theta<1$ y los valores

$$\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}, \qquad \frac{1}{q}=\frac{1-\theta}{q_0}+\frac{\theta}{q_1}.$$

Entonces, la restricción de T a $L_p(\mathcal{U},\mu)$ da un operador acotado

$$T:L_p(\mathcal{U},\mu)\to L_q(\mathcal{V},\nu)$$

con norma $M\leqslant M_0^{1-\theta}M_1^{\theta}$.

De este teorema se deduce lo siguiente:

Teorema de Hausdorff-Young para los coeficientes de Fourier
Si $1 \leqslant p \leqslant 2$ y $f \in L_p([0,1])$, entonces $(\hat{f}(m)) \in \ell_{p'}$ y

$$\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(m)\right|^{p'}\right)^{1/p'} \leqslant \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^1 |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}.$$

De este teorema se deduce lo siguiente:

Teorema de Hausdorff-Young para los coeficientes de Fourier
Si $1 \leqslant p \leqslant 2$ y $f \in L_p([0,1])$, entonces $(\hat{f}(m)) \in \ell_{p'}$ y

$$\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| \hat{f}(m) \right|^{p'} \right)^{1/p'} \leqslant \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^1 |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Si $p > 2$, $L_p([0,1]) \hookrightarrow L_2([0,1])$ y, por lo anterior, $(\hat{f}(m)) \in \ell_2$.
En general, esta es la máxima información que podemos dar para este caso.

Definiciones

Se dice que un par de espacios de Banach (A_0, A_1) es un *par compatible* si ambos espacios están continuamente inyectados en un espacio vectorial topológico Hausdorff $\mathcal{A}$.

Definiciones

Se dice que un par de espacios de Banach (A_0, A_1) es un *par compatible* si ambos espacios están continuamente inyectados en un espacio vectorial topológico Hausdorff $\mathcal{A}$.

Dado un par compatible (A_0, A_1), podemos considerar los espacios

$$A_0 + A_1 = \{a \in \mathcal{A} : a = a_0 + a_1, a_0 \in A_0, a_1 \in A_1\}, \text{ con la norma}$$

$$\|a\|_{A_0+A_1} = \text{ínf}\left\{\|a_0\|_{A_0} + \|a_1\|_{A_1} : a = a_0 + a_1,\ a_j \in A_j\right\}, \text{ y}$$

$$A_0 \cap A_1 = \{a \in \mathcal{A} : a \in A_0, a \in A_1\} \text{ con la norma}$$

$$\|a\|_{A_0 \cap A_1} = \text{máx}\left\{\|a\|_{A_0}, \|a\|_{A_1}\right\}.$$

Para $a \in A_0 + A_1$ y $t > 0$ definimos el **K-funcional** como

$$K\left(t, a; A_0, A_1\right) = \operatorname{ínf}\left\{\left\|a_0\right\|_{A_0} + t\left\|a_1\right\|_{A_1} : a = a_0 + a_1,\ a_j \in A_j\right\}.$$

Para $a \in A_0 + A_1$ y $t > 0$ definimos el **K-funcional** como

$$K\left(t, a; A_0, A_1\right) = \text{ínf}\left\{\left\|a_0\right\|_{A_0} + t\left\|a_1\right\|_{A_1} : a = a_0 + a_1,\ a_j \in A_j\right\}.$$

Para $0 < \theta < 1$ y $1 \leqslant q \leqslant \infty$ definimos el **K-espacio** $\overline{A}_{\theta,q;K} = \left(A_0, A_1\right)_{\theta,q;K}$ como el conjunto de los vectores $a \in A_0 + A_1$ para los que la siguiente norma es finita:

$$\|a\|_{\theta,q;K} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta} K(t,a)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} & \text{si } 1 \leqslant q < \infty, \\ \sup_{t>0} t^{-\theta} K(t,a) & \text{si } q = \infty. \end{cases}$$

Para $a \in A_0 + A_1$ y $t > 0$ definimos el **K-funcional** como

$$K(t, a; A_0, A_1) = \operatorname{ínf} \left\{ \|a_0\|_{A_0} + t \|a_1\|_{A_1} : a = a_0 + a_1,\ a_j \in A_j \right\}.$$

Para $0 < \theta < 1$ y $1 \leqslant q \leqslant \infty$ definimos el **K-espacio** $\overline{A}_{\theta,q;K} = (A_0, A_1)_{\theta,q;K}$ como el conjunto de los vectores $a \in A_0 + A_1$ para los que la siguiente norma es finita:

$$\|a\|_{\theta,q;K} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta} K(t,a)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} & \text{si } 1 \leqslant q < \infty, \\ \sup_{t>0} t^{-\theta} K(t,a) & \text{si } q = \infty. \end{cases}$$

Los K-espacios son espacios intermedios.

Para $a \in A_0 \cap A_1$ y $t > 0$ definimos el **J-funcional** como

$$J\left(t, a; A_0, A_1\right) = \max\left\{\|a\|_{A_0}, t\,\|a\|_{A_1}\right\}.$$

Para $a \in A_0 \cap A_1$ y $t > 0$ definimos el **J-funcional** como

$$J(t, a; A_0, A_1) = \text{máx}\left\{\|a\|_{A_0}, t\,\|a\|_{A_1}\right\}.$$

Para $0 < \theta < 1$ y $1 \leqslant q \leqslant \infty$ definimos el **J-espacio** $\overline{A}_{\theta,q;J} = (A_0, A_1)_{\theta,q;J}$ como el conjunto de los vectores $a \in A_0 + A_1$ que pueden ser representados como

$$a = \int_0^\infty u(t)\frac{dt}{t} \qquad \text{convergencia en } A_0 + A_1, \tag{1}$$

Para $a \in A_0 \cap A_1$ y $t > 0$ definimos el **J-funcional** como

$$J(t, a; A_0, A_1) = \text{máx}\left\{\|a\|_{A_0}, t\,\|a\|_{A_1}\right\}.$$

Para $0 < \theta < 1$ y $1 \leqslant q \leqslant \infty$ definimos el **J-espacio** $\overline{A}_{\theta,q;J} = (A_0, A_1)_{\theta,q;J}$ como el conjunto de los vectores $a \in A_0 + A_1$ que pueden ser representados como

$$a = \int_0^\infty u(t)\frac{dt}{t} \qquad \text{convergencia en } A_0 + A_1, \tag{1}$$

donde $u(t)$ es una función medible con valores en $A_0 \cap A_1$ tal que

$$\left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta} J(t, u(t))\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} < \infty \qquad \text{si } q < \infty, \text{ ó} \tag{2}$$

$$\sup_{0<t<\infty} \left(t^{-\theta} J(t, u(t))\right) < \infty \qquad \text{si } q = \infty. \tag{3}$$

Para $a \in A_0 \cap A_1$ y $t > 0$ definimos el **J-funcional** como

$$J(t, a; A_0, A_1) = \text{máx}\left\{\|a\|_{A_0}, t\,\|a\|_{A_1}\right\}.$$

Para $0 < \theta < 1$ y $1 \leqslant q \leqslant \infty$ definimos el **J-espacio** $\overline{A}_{\theta,q;J} = (A_0, A_1)_{\theta,q;J}$ como el conjunto de los vectores $a \in A_0 + A_1$ que pueden ser representados como

$$a = \int_0^\infty u(t)\frac{dt}{t} \qquad \text{convergencia en } A_0 + A_1, \tag{1}$$

donde $u(t)$ es una función medible con valores en $A_0 \cap A_1$ tal que

$$\left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta} J(t, u(t))\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} < \infty \qquad \text{si } q < \infty, \text{ ó} \tag{2}$$

$$\sup_{0<t<\infty} \left(t^{-\theta} J(t, u(t))\right) < \infty \qquad \text{si } q = \infty. \tag{3}$$

Definimos la J-norma $\|a\|_{\theta,q;J}$ como el ínfimo sobre todas las posibles representaciones de la forma 1 de las cantidades 2 ó 3.

Para $a \in A_0 \cap A_1$ y $t > 0$ definimos el **J-funcional** como

$$J(t, a; A_0, A_1) = \text{máx}\left\{\|a\|_{A_0}, t\,\|a\|_{A_1}\right\}.$$

Para $0 < \theta < 1$ y $1 \leqslant q \leqslant \infty$ definimos el **J-espacio** $\overline{A}_{\theta,q;J} = (A_0, A_1)_{\theta,q;J}$ como el conjunto de los vectores $a \in A_0 + A_1$ que pueden ser representados como

$$a = \int_0^\infty u(t)\frac{dt}{t} \qquad \text{convergencia en } A_0 + A_1, \tag{1}$$

donde $u(t)$ es una función medible con valores en $A_0 \cap A_1$ tal que

$$\left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta} J(t, u(t))\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} < \infty \qquad \text{si } q < \infty, \text{ ó} \tag{2}$$

$$\sup_{0<t<\infty} \left(t^{-\theta} J(t, u(t))\right) < \infty \qquad \text{si } q = \infty. \tag{3}$$

Definimos la J-norma $\|a\|_{\theta,q;J}$ como el ínfimo sobre todas las posibles representaciones de la forma 1 de las cantidades 2 ó 3.

Teorema de equivalencia $\bar{A}_{\theta,q;K} = \bar{A}_{\theta,q;J}$.

Espacios de Lorentz

Para $1 < p < \infty$ y $1 \leqslant q \leqslant \infty$, el *espacio de Lorentz* $L_{p,q}$ es el conjunto de funciones para las que la siguiente cuasi-norma es finita:

$$\|f\|_{p,q} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p} f^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} & \text{si } 1 \leqslant q < \infty, \\ \sup_{0<t<\infty} t^{1/p} f^*(t) & \text{si } q = \infty, \end{cases}$$

donde f^* es la reordenada no-creciente de f.

Espacios de Lorentz

Para $1 < p < \infty$ y $1 \leqslant q \leqslant \infty$, el *espacio de Lorentz* $L_{p,q}$ es el conjunto de funciones para las que la siguiente cuasi-norma es finita:

$$\|f\|_{p,q} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p} f^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} & \text{si } 1 \leqslant q < \infty, \\ \sup_{0<t<\infty} t^{1/p} f^*(t) & \text{si } q = \infty, \end{cases}$$

donde f^* es la reordenada no-creciente de f.

El espacio $L_{p,\infty}$ se conoce como el espacio L_p-débil, y si $q = p(< \infty)$, el espacio $L_{p,p}$ coincide con L_p.

Espacios de Lorentz

Para $1 < p < \infty$ y $1 \leqslant q \leqslant \infty$, el *espacio de Lorentz* $L_{p,q}$ es el conjunto de funciones para las que la siguiente cuasi-norma es finita:

$$\|f\|_{p,q} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p} f^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} & \text{si } 1 \leqslant q < \infty, \\ \sup_{0<t<\infty} t^{1/p} f^*(t) & \text{si } q = \infty, \end{cases}$$

donde f^* es la reordenada no-creciente de f.

El espacio $L_{p,\infty}$ se conoce como el espacio L_p-débil, y si $q = p(< \infty)$, el espacio $L_{p,p}$ coincide con L_p.

Además, si $q \leqslant r$, entonces $L_{p,q} \hookrightarrow L_{p,r}$, y si el espacio es de medida finita, para $p < r$ y para cualesquiera q, s, $L_{r,s} \hookrightarrow L_{p,q}$.

Espacios de Lorentz

Para $1 < p < \infty$ y $1 \leqslant q \leqslant \infty$, el *espacio de Lorentz* $L_{p,q}$ es el conjunto de funciones para las que la siguiente cuasi-norma es finita:

$$\|f\|_{p,q} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p} f^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} & \text{si } 1 \leqslant q < \infty, \\ \sup_{0<t<\infty} t^{1/p} f^*(t) & \text{si } q = \infty, \end{cases}$$

donde f^* es la reordenada no-creciente de f.

El espacio $L_{p,\infty}$ se conoce como el espacio L_p-débil, y si $q = p(< \infty)$, el espacio $L_{p,p}$ coincide con L_p.

Además, si $q \leqslant r$, entonces $L_{p,q} \hookrightarrow L_{p,r}$, y si el espacio es de medida finita, para $p < r$ y para cualesquiera q, s, $L_{r,s} \hookrightarrow L_{p,q}$. Así, en espacios de medida finita tenemos el siguiente diagrama:

Espacios de Lorentz

Para $1 < p < \infty$ y $1 \leqslant q \leqslant \infty$, el *espacio de Lorentz* $L_{p,q}$ es el conjunto de funciones para las que la siguiente cuasi-norma es finita:

$$\|f\|_{p,q} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p} f^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} & \text{si } 1 \leqslant q < \infty, \\ \sup_{0<t<\infty} t^{1/p} f^*(t) & \text{si } q = \infty, \end{cases}$$

donde f^* es la reordenada no-creciente de f.

El espacio $L_{p,\infty}$ se conoce como el espacio L_p-débil, y si $q = p (< \infty)$, el espacio $L_{p,p}$ coincide con L_p.

Además, si $q \leqslant r$, entonces $L_{p,q} \hookrightarrow L_{p,r}$, y si el espacio es de medida finita, para $p < r$ y para cualesquiera q, s, $L_{r,s} \hookrightarrow L_{p,q}$. Así, en espacios de medida finita tenemos el siguiente diagrama:

Espacios de Lorentz

Para $1 < p < \infty$ y $1 \leqslant q \leqslant \infty$, el *espacio de Lorentz* $L_{p,q}$ es el conjunto de funciones para las que la siguiente cuasi-norma es finita:

$$\|f\|_{p,q} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p} f^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} & \text{si } 1 \leqslant q < \infty, \\ \sup_{0<t<\infty} t^{1/p} f^*(t) & \text{si } q = \infty, \end{cases}$$

donde f^* es la reordenada no-creciente de f.

El espacio $L_{p,\infty}$ se conoce como el espacio L_p-débil, y si $q = p(< \infty)$, el espacio $L_{p,p}$ coincide con L_p.

Además, si $q \leqslant r$, entonces $L_{p,q} \hookrightarrow L_{p,r}$, y si el espacio es de medida finita, para $p < r$ y para cualesquiera q, s, $L_{r,s} \hookrightarrow L_{p,q}$. Así, en espacios de medida finita tenemos el siguiente diagrama:

Un ejemplo

Sea $(\mathcal{U}, \mu)$ un espacio de medida σ-finito. Consideramos el par $\bar{A} = \left(L_{p_0}\left(\mathcal{U}, \mu\right), L_{p_1}\left(\mathcal{U}, \mu\right)\right)$, con $1 \leqslant p_0, p_1 \leqslant \infty$.

Un ejemplo

Sea $(\mathcal{U}, \mu)$ un espacio de medida σ-finito. Consideramos el par $\bar{A} = \left(L_{p_0}\left(\mathcal{U}, \mu\right), L_{p_1}\left(\mathcal{U}, \mu\right)\right)$, con $1 \leqslant p_0, p_1 \leqslant \infty$.

$\mathcal{A}$: funciones finitas en μ-ctp con la convergencia en medida sobre los conjuntos de medida finita

Un ejemplo

Sea $(\mathcal{U}, \mu)$ un espacio de medida σ-finito. Consideramos el par $\bar{A} = \left(L_{p_0}\left(\mathcal{U}, \mu\right), L_{p_1}\left(\mathcal{U}, \mu\right)\right)$, con $1 \leqslant p_0, p_1 \leqslant \infty$.

$\mathcal{A}$: funciones finitas en μ-ctp con la convergencia en medida sobre los conjuntos de medida finita, es decir, $(f_n) \xrightarrow{medida} f$ si para todo $\varepsilon > 0$ es

$$\mu\left(\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}\right) \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

para todo conjunto medible E tal que $\mu(E) < \infty$.La topología inducida es Hausdorff.

Un ejemplo

Sea $(\mathcal{U}, \mu)$ un espacio de medida σ-finito. Consideramos el par $\bar{A} = (L_{p_0}(\mathcal{U}, \mu), L_{p_1}(\mathcal{U}, \mu))$, con $1 \leqslant p_0, p_1 \leqslant \infty$.

$\mathcal{A}$: funciones finitas en μ-ctp con la convergencia en medida sobre los conjuntos de medida finita, es decir, $(f_n) \xrightarrow{medida} f$ si para todo $\varepsilon > 0$ es

$$\mu(\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

para todo conjunto medible E tal que $\mu(E) < \infty$.La topología inducida es Hausdorff.

$L_p \hookrightarrow \mathcal{A}$ para todo $1 \leqslant p \leqslant \infty$, luego cualquier par (L_{p_0}, L_{p_1}) es compatible.

Un ejemplo

Sea $(\mathcal{U}, \mu)$ un espacio de medida σ-finito. Consideramos el par $\bar{A} = \left(L_{p_0}\left(\mathcal{U}, \mu\right), L_{p_1}\left(\mathcal{U}, \mu\right)\right)$, con $1 \leqslant p_0, p_1 \leqslant \infty$.

$\mathcal{A}$: funciones finitas en μ-ctp con la convergencia en medida sobre los conjuntos de medida finita, es decir, $(f_n) \xrightarrow{medida} f$ si para todo $\varepsilon > 0$ es

$$\mu\left(\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}\right) \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

para todo conjunto medible E tal que $\mu(E) < \infty$.La topología inducida es Hausdorff.

$L_p \hookrightarrow \mathcal{A}$ para todo $1 \leqslant p \leqslant \infty$, luego cualquier par $\left(L_{p_0}, L_{p_1}\right)$ es compatible.

Teorema Sean $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $1 < p < \infty$ y $0 < \theta < 1$ con $1/p = 1 - \theta$. Entonces, $\left(L_1, L_\infty\right)_{\theta,q} = L_{p,q}$ con equivalencia de normas. En particular, $\left(L_1, L_\infty\right)_{\theta,p} = L_p$.

Dualidad

$$(L_1, L_\infty)^*_{\theta,p} = L^*_p = L_{p'} = (L_1, L_\infty)_{1-\theta,p'} = (L_\infty, L_1)_{\theta,p'} \rightsquigarrow (L^*_1, L^*_\infty)_{\theta,p'}$$

Dualidad

$$(L_1, L_\infty)^*_{\theta,p} = L^*_p = L_{p'} = (L_1, L_\infty)_{1-\theta,p'} = (L_\infty, L_1)_{\theta,p'} \rightsquigarrow (L^*_1, L^*_\infty)_{\theta,p'}$$

Nos preguntamos si la fórmula

$$(A_0, A_1)^*_{\theta,p} = (A^*_0, A^*_1)_{\theta,p'}$$

es válida y bajo qué condiciones.

Dualidad

$$(L_1, L_\infty)^*_{\theta,p} = L^*_p = L_{p'} = (L_1, L_\infty)_{1-\theta,p'} = (L_\infty, L_1)_{\theta,p'} \rightsquigarrow (L^*_1, L^*_\infty)_{\theta,p'}$$

Nos preguntamos si la fórmula

$$(A_0, A_1)^*_{\theta,p} = (A^*_0, A^*_1)_{\theta,p'}$$

es válida y bajo qué condiciones.
¿Es (A^*_0, A^*_1) un par compatible?

Dualidad

$$(L_1, L_\infty)^*_{\theta,p} = L_p^* = L_{p'} = (L_1, L_\infty)_{1-\theta,p'} = (L_\infty, L_1)_{\theta,p'} \rightsquigarrow (L_1^*, L_\infty^*)_{\theta,p'}$$

Nos preguntamos si la fórmula

$$(A_0, A_1)^*_{\theta,p} = (A_0^*, A_1^*)_{\theta,p'}$$

es válida y bajo qué condiciones.
¿Es (A_0^*, A_1^*) un par compatible? $A_0^*, A_1^* \subset (A_0 \cap A_1)^*$;

Dualidad

$$(L_1, L_\infty)^*_{\theta,p} = L_p^* = L_{p'} = (L_1, L_\infty)_{1-\theta,p'} = (L_\infty, L_1)_{\theta,p'} \rightsquigarrow (L_1^*, L_\infty^*)_{\theta,p'}$$

Nos preguntamos si la fórmula

$$(A_0, A_1)^*_{\theta,p} = (A_0^*, A_1^*)_{\theta,p'}$$

es válida y bajo qué condiciones.
¿Es (A_0^*, A_1^*) un par compatible? $A_0^*, A_1^* \subset (A_0 \cap A_1)^*$;

$$\begin{array}{rcl} \varphi : A_0^* & \longrightarrow & (A_0 \cap A_1)^* \\ f & \longmapsto & f|_{A_0 \cap A_1}. \end{array}$$

Dualidad

$$(L_1, L_\infty)^*_{\theta,p} = L^*_p = L_{p'} = (L_1, L_\infty)_{1-\theta,p'} = (L_\infty, L_1)_{\theta,p'} \rightsquigarrow (L^*_1, L^*_\infty)_{\theta,p'}$$

Nos preguntamos si la fórmula

$$(A_0, A_1)^*_{\theta,p} = (A^*_0, A^*_1)_{\theta,p'}$$

es válida y bajo qué condiciones.

¿Es (A^*_0, A^*_1) un par compatible? $A^*_0, A^*_1 \subset (A_0 \cap A_1)^*$;

$$\begin{aligned} \varphi : A^*_0 &\longrightarrow (A_0 \cap A_1)^* \\ f &\longmapsto f|_{A_0 \cap A_1}. \end{aligned}$$

Para que sea inyectiva, debe ocurrir

$$f|_{A_0 \cap A_1} = g|_{A_0 \cap A_1} \implies f = g \text{ en } A_0,$$

Dualidad

$$(L_1, L_\infty)^*_{\theta,p} = L_p^* = L_{p'} = (L_1, L_\infty)_{1-\theta,p'} = (L_\infty, L_1)_{\theta,p'} \rightsquigarrow (L_1^*, L_\infty^*)_{\theta,p'}$$

Nos preguntamos si la fórmula

$$(A_0, A_1)^*_{\theta,p} = (A_0^*, A_1^*)_{\theta,p'}$$

es válida y bajo qué condiciones.
¿Es (A_0^*, A_1^*) un par compatible? $A_0^*, A_1^* \subset (A_0 \cap A_1)^*$;

$$\begin{array}{rcl} \varphi : A_0^* & \longrightarrow & (A_0 \cap A_1)^* \\ f & \longmapsto & f|_{A_0 \cap A_1}. \end{array}$$

Para que sea inyectiva, debe ocurrir

$$f|_{A_0\cap A_1} = g|_{A_0\cap A_1} \implies f = g \text{ en } A_0,$$

es decir, que $A_0 \cap A_1$ sea denso en A_0. Lo mismo ocurre con A_1.

Definición Se dice que el par (A_0, A_1) es *regular* si $A_0 \cap A_1$ es denso en A_0 y en A_1.

Definición Se dice que el par (A_0, A_1) es *regular* si $A_0 \cap A_1$ es denso en A_0 y en A_1.

Sea (A_0, A_1) un par regular. Pongamos

$$\begin{aligned} A_0' &:= \{f|_{A_0 \cap A_1} : f \in A_0^*\}, \qquad \|f\|_{A_0'} = \|f\|_{A_0^*}, \\ A_1' &:= \{f|_{A_0 \cap A_1} : f \in A_1^*\}, \qquad \|f\|_{A_1'} = \|f\|_{A_1^*}. \end{aligned}$$

Definición Se dice que el par (A_0, A_1) es *regular* si $A_0 \cap A_1$ es denso en A_0 y en A_1.

Sea (A_0, A_1) un par regular. Pongamos

$$\begin{aligned} A_0' &:= \{f|_{A_0 \cap A_1} : f \in A_0^*\}, & \|f\|_{A_0'} &= \|f\|_{A_0^*}, \\ A_1' &:= \{f|_{A_0 \cap A_1} : f \in A_1^*\}, & \|f\|_{A_1'} &= \|f\|_{A_1^*}. \end{aligned}$$

Claramente, $A_0', A_1' \hookrightarrow (A_0 \cap A_1)^*$ y A_j' es isométrico a A_j^*.

Definición Se dice que el par (A_0, A_1) es *regular* si $A_0 \cap A_1$ es denso en A_0 y en A_1.

Sea (A_0, A_1) un par regular. Pongamos

$$
\begin{aligned}
A_0' &:= \{f|_{A_0 \cap A_1} : f \in A_0^*\}, \qquad \|f\|_{A_0'} = \|f\|_{A_0^*}, \\
A_1' &:= \{f|_{A_0 \cap A_1} : f \in A_1^*\}, \qquad \|f\|_{A_1'} = \|f\|_{A_1^*}.
\end{aligned}
$$

Claramente, $A_0', A_1' \hookrightarrow (A_0 \cap A_1)^*$ y A_j' es isométrico a A_j^*.

Lema Si $1 \leqslant q < \infty$ y $0 < \theta < 1$, entonces $A_0 \cap A_1$ es denso en $(A_0, A_1)_{\theta,q}$.

Definición Se dice que el par (A_0, A_1) es *regular* si $A_0 \cap A_1$ es denso en A_0 y en A_1.

Sea (A_0, A_1) un par regular. Pongamos

$$\begin{aligned} A_0' &:= \{f|_{A_0 \cap A_1} : f \in A_0^*\}, \qquad \|f\|_{A_0'} = \|f\|_{A_0^*}, \\ A_1' &:= \{f|_{A_0 \cap A_1} : f \in A_1^*\}, \qquad \|f\|_{A_1'} = \|f\|_{A_1^*}. \end{aligned}$$

Claramente, $A_0', A_1' \hookrightarrow (A_0 \cap A_1)^*$ y A_j' es isométrico a A_j^*.

Lema Si $1 \leqslant q < \infty$ y $0 < \theta < 1$, entonces $A_0 \cap A_1$ es denso en $(A_0, A_1)_{\theta,q}$.

Así, podemos identificar el dual de $(A_0, A_1)_{\theta,q}$ con un subespacio $(A_0, A_1)'_{\theta,q} \subset (A_0 \cap A_1)^*$ con el mismo procedimiento.

Definición Se dice que el par (A_0, A_1) es *regular* si $A_0 \cap A_1$ es denso en A_0 y en A_1.

Sea (A_0, A_1) un par regular. Pongamos

$$\begin{aligned} A'_0 &:= \{f|_{A_0 \cap A_1} : f \in A_0^*\}, \qquad \|f\|_{A'_0} = \|f\|_{A_0^*}, \\ A'_1 &:= \{f|_{A_0 \cap A_1} : f \in A_1^*\}, \qquad \|f\|_{A'_1} = \|f\|_{A_1^*}. \end{aligned}$$

Claramente, $A'_0, A'_1 \hookrightarrow (A_0 \cap A_1)^*$ y A'_j es isométrico a A_j^*.

Lema Si $1 \leqslant q < \infty$ y $0 < \theta < 1$, entonces $A_0 \cap A_1$ es denso en $(A_0, A_1)_{\theta,q}$.

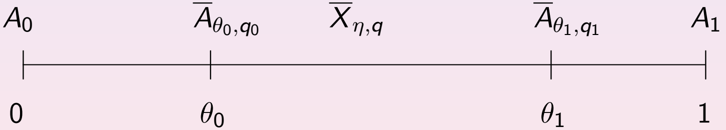
Así, podemos identificar el dual de $(A_0, A_1)_{\theta,q}$ con un subespacio $(A_0, A_1)'_{\theta,q} \subset (A_0 \cap A_1)^*$ con el mismo procedimiento.

Teorema de Dualidad Sea (A_0, A_1) un par regular de espacios de Banach, sean $0 < \theta < 1$ y $1 \leqslant q < \infty$. Sea q' tal que $1/q + 1/q' = 1$. Entonces, $(A_0, A_1)'_{\theta,q} = (A'_0, A'_1)_{\theta,q'}$ con equivalencia de normas.

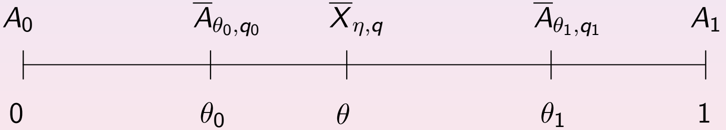
Reiteración

Reiteración

Reiteración



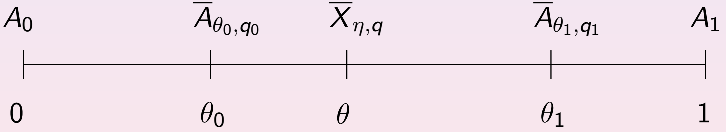
Reiteración



Reiteración

Teorema de Reiteración Sea (A_0, A_1) un par compatible de espacios de Banach, sean $0 < \theta_j < 1$, $1 \leqslant q_j \leqslant \infty$, $j = 0, 1$, con $\theta_0 \neq \theta_1$. Tomemos $0 < \eta < 1$ y $1 \leqslant q \leqslant \infty$, y pongamos $\theta = (1-\eta)\theta_0 + \eta\theta_1$. Entonces, se tiene, con equivalencia de normas, que

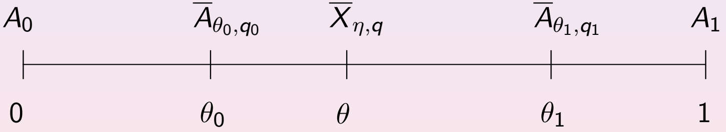
$$\left(\overline{A}_{\theta_0,q_0}, \overline{A}_{\theta_1,q_1}\right)_{\eta,q} = (A_0, A_1)_{\theta,q}.$$



Reiteración

Teorema de Reiteración Sea (A_0, A_1) un par compatible de espacios de Banach, sean $0 < \theta_j < 1$, $1 \leqslant q_j \leqslant \infty$, $j = 0, 1$, con $\theta_0 \neq \theta_1$. Tomemos $0 < \eta < 1$ y $1 \leqslant q \leqslant \infty$, y pongamos $\theta = (1-\eta)\theta_0 + \eta\theta_1$. Entonces, se tiene, con equivalencia de normas, que

$$\left(\overline{A}_{\theta_0,q_0}, \overline{A}_{\theta_1,q_1}\right)_{\eta,q} = (A_0, A_1)_{\theta,q}.$$



Corolario Sean $1 < p_0, p_1 < \infty$, $p_0 \neq p_1$, $1 \leqslant q_0, q_1 \leqslant \infty$ y $0 < \eta < 1$. Pongamos $\frac{1}{p} = \frac{1-\eta}{p_0} + \frac{\eta}{p_1}$. Entonces, se tiene con equivalencia de normas que $\left(L_{p_0,q_0}, L_{p_1,q_1}\right)_{\eta,q} = L_{p,q}$. En particular, $\left(L_{p_0}, L_{p_1}\right)_{\eta,p} = L_p$.

Teorema de Interpolación

Notación Sean $\bar{A} = (A_0, A_1)$ y $\bar{B} = (B_0, B_1)$ dos pares compatibles.

Teorema de Interpolación

Notación Sean $\bar{A} = (A_0, A_1)$ y $\bar{B} = (B_0, B_1)$ dos pares compatibles. $T \in \mathcal{L}\left(\bar{A}, \bar{B}\right)$ significa que T es un operador lineal y acotado de $A_0 + A_1$ en $B_0 + B_1$ tal que sus restricciones

$$T : A_0 \to B_0 \qquad \text{y} \qquad T : A_1 \to B_1$$

son continuas.

Teorema de Interpolación

Notación Sean $\bar{A} = (A_0, A_1)$ y $\bar{B} = (B_0, B_1)$ dos pares compatibles. $T \in \mathcal{L}\left(\bar{A}, \bar{B}\right)$ significa que T es un operador lineal y acotado de $A_0 + A_1$ en $B_0 + B_1$ tal que sus restricciones

$$T : A_0 \to B_0 \qquad \text{y} \qquad T : A_1 \to B_1$$

son continuas. Ponemos $M_j := \|T\|_{A_j, B_j}$.

Teorema de Interpolación

Notación Sean $\bar{A} = (A_0, A_1)$ y $\bar{B} = (B_0, B_1)$ dos pares compatibles. $T \in \mathcal{L}\left(\bar{A}, \bar{B}\right)$ significa que T es un operador lineal y acotado de $A_0 + A_1$ en $B_0 + B_1$ tal que sus restricciones

$$T : A_0 \to B_0 \qquad \text{y} \qquad T : A_1 \to B_1$$

son continuas. Ponemos $M_j := \|T\|_{A_j, B_j}$.

Teorema de interpolación Sean $\bar{A} = (A_0, A_1)$ y $\bar{B} = (B_0, B_1)$ dos pares compatibles y sea $T \in \mathcal{L}\left(\bar{A}, \bar{B}\right)$.

Teorema de Interpolación

Notación Sean $\bar{A} = (A_0, A_1)$ y $\bar{B} = (B_0, B_1)$ dos pares compatibles. $T \in \mathcal{L}\left(\bar{A}, \bar{B}\right)$ significa que T es un operador lineal y acotado de $A_0 + A_1$ en $B_0 + B_1$ tal que sus restricciones

$$T : A_0 \to B_0 \qquad \text{y} \qquad T : A_1 \to B_1$$

son continuas. Ponemos $M_j := \|T\|_{A_j, B_j}$.

Teorema de interpolación Sean $\bar{A} = (A_0, A_1)$ y $\bar{B} = (B_0, B_1)$ dos pares compatibles y sea $T \in \mathcal{L}\left(\bar{A}, \bar{B}\right)$. Entonces, para todo $0 < \theta < 1$ y $1 \leqslant q \leqslant \infty$, la restricción de T a $\bar{A}_{\theta,q}$ da un operador acotado

$$T : \bar{A}_{\theta,q} \to \bar{B}_{\theta,q}$$

de norma $M \leqslant M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$.

Una mejora del teorema de Hausdorff-Young

Consideramos el espacio $\ell_{p,q} = L_{p,q}(\mathbb{Z}, \#)$.

Una mejora del teorema de Hausdorff-Young

Consideramos el espacio $\ell_{p,q} = L_{p,q}(\mathbb{Z}, \#)$.

$$\ell_{p,q} = \left\{ \xi = (\xi_m)_{m\in\mathbb{Z}} \in c_0 : \|\xi\|_{p,q} := \left(\sum_{m=1}^{\infty} \left(m^{1/p} \left|\xi_m^*\right| \right)^q m^{-1} \right)^{1/q} < \infty \right\},$$

Una mejora del teorema de Hausdorff-Young

Consideramos el espacio $\ell_{p,q} = L_{p,q}(\mathbb{Z}, \#)$.

$$\ell_{p,q} = \left\{ \xi = (\xi_m)_{m\in\mathbb{Z}} \in c_0 : \|\xi\|_{p,q} := \left(\sum_{m=1}^{\infty} \left(m^{1/p} \left| \xi_m^* \right| \right)^q m^{-1} \right)^{1/q} < \infty \right\},$$

donde (ξ_m^*) es la reordenada no-creciente de la sucesión (ξ_m).

Una mejora del teorema de Hausdorff-Young

Consideramos el espacio $\ell_{p,q} = L_{p,q}(\mathbb{Z}, \#)$.

$$\ell_{p,q} = \left\{ \xi = (\xi_m)_{m\in\mathbb{Z}} \in c_0 : \|\xi\|_{p,q} := \left(\sum_{m=1}^{\infty} \left(m^{1/p} |\xi_m^*| \right)^q m^{-1} \right)^{1/q} < \infty \right\},$$

donde (ξ_m^*) es la reordenada no-creciente de la sucesión (ξ_m).

Como este espacio es un caso particular de los espacios de Lorentz, $\ell_{p,q_0} \hookrightarrow \ell_{p,q_1}$ si $q_0 < q_1$.

Una mejora del teorema de Hausdorff-Young

Consideramos el espacio $\ell_{p,q} = L_{p,q}(\mathbb{Z}, \#)$.

$$\ell_{p,q} = \left\{ \xi = (\xi_m)_{m\in\mathbb{Z}} \in c_0 : \|\xi\|_{p,q} := \left(\sum_{m=1}^{\infty} \left(m^{1/p} |\xi_m^*| \right)^q m^{-1} \right)^{1/q} < \infty \right\},$$

donde (ξ_m^*) es la reordenada no-creciente de la sucesión (ξ_m).

Como este espacio es un caso particular de los espacios de Lorentz, $\ell_{p,q_0} \hookrightarrow \ell_{p,q_1}$ si $q_0 < q_1$. Además, se puede probar que $\ell_{p,q} \hookrightarrow \ell_{r,s}$ si $p < r$ y para todos $1 \leqslant q, s \leqslant \infty$ distintos, y que todas estas inclusiones son estrictas.

Una mejora del teorema de Hausdorff-Young

Consideramos el espacio $\ell_{p,q} = L_{p,q}(\mathbb{Z}, \#)$.

$$\ell_{p,q} = \left\{ \xi = (\xi_m)_{m\in\mathbb{Z}} \in c_0 : \|\xi\|_{p,q} := \left(\sum_{m=1}^{\infty} \left(m^{1/p} |\xi_m^*| \right)^q m^{-1} \right)^{1/q} < \infty \right\},$$

donde (ξ_m^*) es la reordenada no-creciente de la sucesión (ξ_m).

Como este espacio es un caso particular de los espacios de Lorentz, $\ell_{p,q_0} \hookrightarrow \ell_{p,q_1}$ si $q_0 < q_1$. Además, se puede probar que $\ell_{p,q} \hookrightarrow \ell_{r,s}$ si $p < r$ y para todos $1 \leqslant q, s \leqslant \infty$ distintos, y que todas estas inclusiones son estrictas.

$1 < p < 2$

Una mejora del teorema de Hausdorff-Young

Consideramos el espacio $\ell_{p,q} = L_{p,q}(\mathbb{Z}, \#)$.

$$\ell_{p,q} = \left\{ \xi = (\xi_m)_{m\in\mathbb{Z}} \in c_0 : \|\xi\|_{p,q} := \left(\sum_{m=1}^{\infty} \left(m^{1/p} \left| \xi_m^* \right| \right)^q m^{-1} \right)^{1/q} < \infty \right\},$$

donde (ξ_m^*) es la reordenada no-creciente de la sucesión (ξ_m).

Como este espacio es un caso particular de los espacios de Lorentz, $\ell_{p,q_0} \hookrightarrow \ell_{p,q_1}$ si $q_0 < q_1$. Además, se puede probar que $\ell_{p,q} \hookrightarrow \ell_{r,s}$ si $p < r$ y para todos $1 \leqslant q, s \leqslant \infty$ distintos, y que todas estas inclusiones son estrictas.

$1 < p < 2 \Longrightarrow\ 2 < p' < \infty$

Una mejora del teorema de Hausdorff-Young

Consideramos el espacio $\ell_{p,q} = L_{p,q}(\mathbb{Z}, \#)$.

$$\ell_{p,q} = \left\{ \xi = (\xi_m)_{m\in\mathbb{Z}} \in c_0 : \|\xi\|_{p,q} := \left(\sum_{m=1}^{\infty} \left(m^{1/p} |\xi_m^*| \right)^q m^{-1} \right)^{1/q} < \infty \right\},$$

donde (ξ_m^*) es la reordenada no-creciente de la sucesión (ξ_m).

Como este espacio es un caso particular de los espacios de Lorentz, $\ell_{p,q_0} \hookrightarrow \ell_{p,q_1}$ si $q_0 < q_1$. Además, se puede probar que $\ell_{p,q} \hookrightarrow \ell_{r,s}$ si $p < r$ y para todos $1 \leqslant q, s \leqslant \infty$ distintos, y que todas estas inclusiones son estrictas.

$1 < p < 2 \Longrightarrow 2 < p' < \infty \Longrightarrow \ell_{p',p} \hookrightarrow \ell_{p'}$, y la inclusión es estricta.

Una mejora del teorema de Hausdorff-Young

Consideramos el espacio $\ell_{p,q} = L_{p,q}(\mathbb{Z}, \#)$.

$$\ell_{p,q} = \left\{ \xi = (\xi_m)_{m\in\mathbb{Z}} \in c_0 : \|\xi\|_{p,q} := \left(\sum_{m=1}^{\infty} \left(m^{1/p} |\xi_m^*| \right)^q m^{-1} \right)^{1/q} < \infty \right\},$$

donde (ξ_m^*) es la reordenada no-creciente de la sucesión (ξ_m).

Como este espacio es un caso particular de los espacios de Lorentz, $\ell_{p,q_0} \hookrightarrow \ell_{p,q_1}$ si $q_0 < q_1$. Además, se puede probar que $\ell_{p,q} \hookrightarrow \ell_{r,s}$ si $p < r$ y para todos $1 \leqslant q, s \leqslant \infty$ distintos, y que todas estas inclusiones son estrictas.

$1 < p < 2 \implies 2 < p' < \infty \implies \ell_{p',p} \hookrightarrow \ell_{p'}$, y la inclusión es estricta.

Hausdorff-Young: $\mathcal{F} : L_p([0, 2\pi]) \to \ell_{p'}$ para $1 < p < 2$

Una mejora del teorema de Hausdorff-Young

Consideramos el espacio $\ell_{p,q} = L_{p,q}(\mathbb{Z}, \#)$.

$$\ell_{p,q} = \left\{ \xi = (\xi_m)_{m\in\mathbb{Z}} \in c_0 : \|\xi\|_{p,q} := \left(\sum_{m=1}^{\infty} \left(m^{1/p} \left| \xi_m^* \right| \right)^q m^{-1} \right)^{1/q} < \infty \right\},$$

donde (ξ_m^*) es la reordenada no-creciente de la sucesión (ξ_m).

Como este espacio es un caso particular de los espacios de Lorentz, $\ell_{p,q_0} \hookrightarrow \ell_{p,q_1}$ si $q_0 < q_1$. Además, se puede probar que $\ell_{p,q} \hookrightarrow \ell_{r,s}$ si $p < r$ y para todos $1 \leqslant q, s \leqslant \infty$ distintos, y que todas estas inclusiones son estrictas.

$1 < p < 2 \Longrightarrow 2 < p' < \infty \Longrightarrow \ell_{p',p} \hookrightarrow \ell_{p'}$, y la inclusión es estricta.

Hausdorff-Young: $\mathcal{F} : L_p([0, 2\pi]) \to \ell_{p'}$ para $1 < p < 2 \Longrightarrow$ si mostramos que de hecho $\mathcal{F} : L_p([0, 2\pi]) \to \ell_{p',p}$ para $1 < p < 2$, habremos mejorado el resultado.

Tenemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{F} : L_2([0,2\pi]) &\rightarrow \ell_2, \\ \mathcal{F} : L_1([0,2\pi]) &\rightarrow \ell_\infty.\end{aligned}$$

Tenemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{F} : L_2\left([0,2\pi]\right) &\rightarrow \ell_2,\\ \mathcal{F} : L_1\left([0,2\pi]\right) &\rightarrow \ell_\infty.\end{aligned}$$

Por el Teorema de Interpolación, $\mathcal{F} : (L_2, L_1)_{\theta,p} \rightarrow (\ell_2, \ell_\infty)_{\theta,p}$.

Tenemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{F} : L_2([0, 2\pi]) &\rightarrow \ell_2, \\ \mathcal{F} : L_1([0, 2\pi]) &\rightarrow \ell_\infty.\end{aligned}$$

Por el Teorema de Interpolación, $\mathcal{F} : (L_2, L_1)_{\theta,p} \rightarrow (\ell_2, \ell_\infty)_{\theta,p}$.

Hacemos la elección $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{1}$ para que el primer espacio sea L_p.

Tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : L_2\left([0,2\pi]\right) &\rightarrow \ell_2, \\ \mathcal{F} : L_1\left([0,2\pi]\right) &\rightarrow \ell_\infty. \end{aligned}$$

Por el Teorema de Interpolación, $\mathcal{F} : (L_2, L_1)_{\theta,p} \rightarrow (\ell_2, \ell_\infty)_{\theta,p}$.

Hacemos la elección $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{1}$ para que el primer espacio sea L_p. Además, $1 < p < 2$,

Tenemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{F} : L_2([0,2\pi]) &\to \ell_2,\\ \mathcal{F} : L_1([0,2\pi]) &\to \ell_\infty.\end{aligned}$$

Por el Teorema de Interpolación, $\mathcal{F} : (L_2, L_1)_{\theta,p} \to (\ell_2, \ell_\infty)_{\theta,p}$.

Hacemos la elección $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{1}$ para que el primer espacio sea L_p. Además, $1 < p < 2$, y $\frac{1}{p'} = \frac{1-\theta}{2}$

Tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : L_2\left([0,2\pi]\right) &\rightarrow \ell_2, \\ \mathcal{F} : L_1\left([0,2\pi]\right) &\rightarrow \ell_\infty. \end{aligned}$$

Por el Teorema de Interpolación, $\mathcal{F} : (L_2, L_1)_{\theta,p} \rightarrow (\ell_2, \ell_\infty)_{\theta,p}$.

Hacemos la elección $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{1}$ para que el primer espacio sea L_p. Además, $1 < p < 2$, y $\frac{1}{p'} = \frac{1-\theta}{2} = \frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{\infty}$,

Tenemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{F} : L_2\left([0, 2\pi]\right) &\rightarrow \ell_2,\\ \mathcal{F} : L_1\left([0, 2\pi]\right) &\rightarrow \ell_\infty.\end{aligned}$$

Por el Teorema de Interpolación, $\mathcal{F} : (L_2, L_1)_{\theta,p} \rightarrow (\ell_2, \ell_\infty)_{\theta,p}$.

Hacemos la elección $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{1}$ para que el primer espacio sea L_p. Además, $1 < p < 2$, y $\frac{1}{p'} = \frac{1-\theta}{2} = \frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{\infty}$, luego $(\ell_2, \ell_\infty)_{\theta,p} = \ell_{p',p}$.

Tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : L_2([0,2\pi]) &\rightarrow \ell_2, \\ \mathcal{F} : L_1([0,2\pi]) &\rightarrow \ell_\infty. \end{aligned}$$

Por el Teorema de Interpolación, $\mathcal{F} : (L_2, L_1)_{\theta,p} \to (\ell_2, \ell_\infty)_{\theta,p}$.

Hacemos la elección $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{1}$ para que el primer espacio sea L_p. Además, $1 < p < 2$, y $\frac{1}{p'} = \frac{1-\theta}{2} = \frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{\infty}$, luego $(\ell_2, \ell_\infty)_{\theta,p} = \ell_{p',p}$.

Teorema de Paley Sea $1 < p < 2$ y sea $f \in L_p([0,2\pi])$. Entonces, sus coeficientes de Fourier $(\hat{f}(m))_{m\in\mathbb{Z}}$ pertenecen a $\ell_{p',p}$ y

$$\left\|(\hat{f}(m))\right\|_{p',p} \leqslant C_p \|f\|_p,$$

donde la constante C_p sólo depende de p.

Métodos límites

¿Qué ocurre cuando $\theta = 0$ y cuando $\theta = 1$?

Métodos límites

¿Qué ocurre cuando $\theta = 0$ y cuando $\theta = 1$? La definición de K-espacio para $\theta = 0, 1$ sólo tiene sentido cuando $q = \infty$, y la de J-espacio sólo lo tiene cuando $q = 1$.

Métodos límites

¿Qué ocurre cuando $\theta = 0$ y cuando $\theta = 1$? La definición de K-espacio para $\theta = 0, 1$ sólo tiene sentido cuando $q = \infty$, y la de J-espacio sólo lo tiene cuando $q = 1$.

F. Cobos, L. M. Fernández-Cabrera, T. Kühn, T. Ullrich estudiaron el caso $A_0 \hookrightarrow A_1$, que es suficiente para aplicaciones, pero a nivel teórico es sólo una restricción.

¿Qué ocurre cuando $\theta = 0$ y cuando $\theta = 1$? La definición de K-espacio para $\theta = 0, 1$ sólo tiene sentido cuando $q = \infty$, y la de J-espacio sólo lo tiene cuando $q = 1$.

F. Cobos, L. M. Fernández-Cabrera, T. Kühn, T. Ullrich estudiaron el caso $A_0 \hookrightarrow A_1$, que es suficiente para aplicaciones, pero a nivel teórico es sólo una restricción.

Una definición que concuerda con la dada por F. Cobos, L. M. Fernández-Cabrera, T. Kühn, T. Ullrich cuando $A_0 \hookrightarrow A_1$ es la siguiente:

Métodos límites

¿Qué ocurre cuando $\theta = 0$ y cuando $\theta = 1$? La definición de K-espacio para $\theta = 0, 1$ sólo tiene sentido cuando $q = \infty$, y la de J-espacio sólo lo tiene cuando $q = 1$.

F. Cobos, L. M. Fernández-Cabrera, T. Kühn, T. Ullrich estudiaron el caso $A_0 \hookrightarrow A_1$, que es suficiente para aplicaciones, pero a nivel teórico es sólo una restricción.

Una definición que concuerda con la dada por F. Cobos, L. M. Fernández-Cabrera, T. Kühn, T. Ullrich cuando $A_0 \hookrightarrow A_1$ es la siguiente:

Para $0 < \theta < 1$ y $1 \leqslant q \leqslant \infty$ definíamos el **K-espacio** $\overline{A}_{\theta,q;K} = (A_0, A_1)_{\theta,q;K}$ como el conjunto de los vectores $a \in A_0 + A_1$ para los que la siguiente norma es finita:

$$\|a\|_{\theta,q;K} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta} K(t,a)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} & \text{si } 1 \leqslant q < \infty, \\ \sup_{t>0} t^{-\theta} K(t,a) & \text{si } q = \infty. \end{cases}$$

Métodos límites

¿Qué ocurre cuando $\theta = 0$ y cuando $\theta = 1$? La definición de K-espacio para $\theta = 0, 1$ sólo tiene sentido cuando $q = \infty$, y la de J-espacio sólo lo tiene cuando $q = 1$.

F. Cobos, L. M. Fernández-Cabrera, T. Kühn, T. Ullrich estudiaron el caso $A_0 \hookrightarrow A_1$, que es suficiente para aplicaciones, pero a nivel teórico es sólo una restricción.

Una definición que concuerda con la dada por F. Cobos, L. M. Fernández-Cabrera, T. Kühn, T. Ullrich cuando $A_0 \hookrightarrow A_1$ es la siguiente:

Para $1 \leqslant q \leqslant \infty$ definimos el **K-espacio** $\overline{A}_{q;K} = (A_0, A_1)_{q;K}$ como el conjunto de los vectores $a \in A_0 + A_1$ para los que la siguiente norma es finita:

$$\|a\|_{q;K} = \begin{cases} \left(\int_0^1 (K(t,a))^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} + \left(\int_1^\infty \left(t^{-1}K(t,a)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} & q < \infty, \\ \sup_{0<t\leqslant 1} K(t,a) + sup_{t>1} t^{-1} K(t,a) & q = \infty. \end{cases}$$

Para $0 < \theta < 1$ y $1 \leqslant q \leqslant \infty$ definíamos el **J-espacio** $\overline{A}_{\theta,q;J} = (A_0, A_1)_{\theta,q;J}$ como el conjunto de los vectores $a \in A_0 + A_1$ que pueden ser representados como

$$a = \int_0^\infty u(t)\frac{dt}{t} \qquad \text{convergencia en } A_0 + A_1, \tag{4}$$

donde $u(t)$ es una función medible con valores en $A_0 \cap A_1$ tal que

$$\left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta} J\left(t, u(t)\right)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} < \infty \qquad \text{si } q < \infty, \text{ ó} \tag{5}$$

$$\sup_{0<t<\infty} \left(t^{-\theta} J\left(t, u(t)\right)\right) < \infty \qquad \text{si } q = \infty. \tag{6}$$

Definíamos la J-norma $\|a\|_{\theta,q;J}$ como el ínfimo sobre todas las posibles representaciones de la forma 4 de las cantidades 5 ó 6.

Para $1 \leqslant q \leqslant \infty$ definimos el **J-espacio** $\overline{A}_{q;J} = (A_0, A_1)_{q;J}$ como el conjunto de los vectores $a \in A_0 + A_1$ que pueden ser representados como

$$a = \int_0^\infty u(t)\frac{dt}{t} \qquad \text{convergencia en } A_0 + A_1, \tag{7}$$

donde $u(t)$ es una función medible con valores en $A_0 \cap A_1$ tal que

$$\left(\int_0^1 \left(t^{-1}J\left(t, u(t)\right)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} + \left(\int_1^\infty \left(J\left(t, u(t)\right)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} < \infty \qquad q < \infty, \tag{8}$$

$$\sup_{0<t\leqslant 1} \left(t^{-1}J\left(t, u(t)\right)\right) + \sup_{1<t<\infty} \left(J\left(t, u(t)\right)\right) < \infty \qquad q = \infty. \tag{9}$$

Definimos la J-norma $\|a\|_{q;J}$ como el ínfimo sobre todas las posibles representaciones de la forma 7 de las cantidades 8 ó 9.

Para $1 \leqslant q \leqslant \infty$ definimos el **J-espacio** $\overline{A}_{q;J} = (A_0, A_1)_{q;J}$ como el conjunto de los vectores $a \in A_0 + A_1$ que pueden ser representados como

$$a = \int_0^\infty u(t) \frac{dt}{t} \qquad \text{convergencia en } A_0 + A_1, \tag{7}$$

donde $u(t)$ es una función medible con valores en $A_0 \cap A_1$ tal que

$$\left(\int_0^1 \left(t^{-1} J\left(t, u(t)\right) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} + \left(\int_1^\infty \left(J\left(t, u(t)\right) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty \qquad q < \infty, \tag{8}$$

$$\sup_{0 < t \leqslant 1} \left(t^{-1} J\left(t, u(t)\right) \right) + \sup_{1 < t < \infty} \left(J\left(t, u(t)\right) \right) < \infty \qquad q = \infty. \tag{9}$$

Definimos la J-norma $\|a\|_{q;J}$ como el ínfimo sobre todas las posibles representaciones de la forma 7 de las cantidades 8 ó 9. **En este caso no son equivalentes**

Para $1 \leqslant q \leqslant \infty$ definimos el **J-espacio** $\overline{A}_{q;J} = (A_0, A_1)_{q;J}$ como el conjunto de los vectores $a \in A_0 + A_1$ que pueden ser representados como

$$a = \int_0^\infty u(t) \frac{dt}{t} \qquad \text{convergencia en } A_0 + A_1, \tag{7}$$

donde $u(t)$ es una función medible con valores en $A_0 \cap A_1$ tal que

$$\left(\int_0^1 \left(t^{-1} J\left(t, u(t)\right)\right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} + \left(\int_1^\infty \left(J\left(t, u(t)\right)\right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty \qquad q < \infty, \tag{8}$$

$$\sup_{0<t\leqslant 1} \left(t^{-1} J\left(t, u(t)\right)\right) + \sup_{1<t<\infty} \left(J\left(t, u(t)\right)\right) < \infty \qquad q = \infty. \tag{9}$$

Definimos la J-norma $\|a\|_{q;J}$ como el ínfimo sobre todas las posibles representaciones de la forma 7 de las cantidades 8 ó 9. **En este caso no son equivalentes** $\forall 1 \leqslant \quad q \quad \leqslant \infty$, $\forall 0 < \theta < 1$,

$$A_0 \cap A_1 \hookrightarrow \qquad (A_0, A_1)_{\theta,q} \hookrightarrow \qquad A_0 + A_1$$

Para $1 \leqslant q \leqslant \infty$ definimos el **J-espacio** $\overline{A}_{q;J} = (A_0, A_1)_{q;J}$ como el conjunto de los vectores $a \in A_0 + A_1$ que pueden ser representados como

$$a = \int_0^\infty u(t) \frac{dt}{t} \qquad \text{convergencia en } A_0 + A_1, \tag{7}$$

donde $u(t)$ es una función medible con valores en $A_0 \cap A_1$ tal que

$$\left(\int_0^1 \left(t^{-1} J\left(t, u(t)\right) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} + \left(\int_1^\infty \left(J\left(t, u(t)\right) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty \qquad q < \infty, \tag{8}$$

$$\sup_{0 < t \leqslant 1} \left(t^{-1} J\left(t, u(t)\right) \right) + \sup_{1 < t < \infty} \left(J\left(t, u(t)\right) \right) < \infty \qquad q = \infty. \tag{9}$$

Definimos la J-norma $\|a\|_{q;J}$ como el ínfimo sobre todas las posibles representaciones de la forma 7 de las cantidades 8 ó 9. **En este caso no son equivalentes** $\forall 1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty$, $\forall 0 < \theta < 1$,

$$A_0 \cap A_1 \hookrightarrow (A_0, A_1)_{p;J} \hookrightarrow (A_0, A_1)_{\theta,q} \hookrightarrow (A_0, A_1)_{r;K} \hookrightarrow A_0 + A_1$$

Bibliografía

C. Bennett, R. Sharpley, *Interpolation of Operators*. Academic Press, London, 1988.

J. Bergh, J. Löfström, *Interpolation Spaces. An introduction*. Springer-Verlag, Beijing, 2003.

F. Cobos, L. M. Fernández-Cabrera, T. Kühn, T. Ullrich, *On an extreme class of real interpolation spaces*. J. Functional Analysis, (256): 2321-2366, 2009.

H. Triebel, *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*. Johann Ambrosius Barth, Leipzig, 1995.