Vectores Minimales y Subespacios Invariantes

Daniel Rodríguez Luis

Bajo la supervisión de Eva A. Gallardo Gutiérrez.

1 de octubre de 2012

Universidad Zaragoza

Índice

Introducción

Introducción

Existen numerosos resultados y problemas abiertos dentro del análisis funcional que involucran la existencia de subespacios invariantes para un operador lineal y continuo.

Introducción

Existen numerosos resultados y problemas abiertos dentro del análisis funcional que involucran la existencia de subespacios invariantes para un operador lineal y continuo.

Dado $\mathcal{X}$ es un espacio de Banach de dimensión finita, T un operador lineal y $\mathcal{M}$ un subespacio T invariante no trivial, entonces T se expresa como

$$P^{-1}TP = \begin{pmatrix} T^{(1)} & T^{(12)} \\ 0 & T^{(2)} \end{pmatrix} \Leftrightarrow T \sim \begin{pmatrix} T^{(1)} & T^{(12)} \\ 0 & T^{(2)} \end{pmatrix},$$

con P la matriz de cambio de base y $T^{(1)} = T_{|\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$.

Introducción

Existen numerosos resultados y problemas abiertos dentro del análisis funcional que involucran la existencia de subespacios invariantes para un operador lineal y continuo.

Dado $\mathcal{X}$ es un espacio de Banach de dimensión finita, T un operador lineal y $\mathcal{M}$ un subespacio T invariante no trivial, entonces T se expresa como

$$P^{-1}TP = \begin{pmatrix} T^{(1)} & T^{(12)} \\ 0 & T^{(2)} \end{pmatrix} \Leftrightarrow T \sim \begin{pmatrix} T^{(1)} & T^{(12)} \\ 0 & T^{(2)} \end{pmatrix},$$

con P la matriz de cambio de base y $T^{(1)} = T_{|\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$.

Dado un espacio de Banach $\mathcal{X}$ con $\dim \mathcal{X} \geq 2$ y $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ ¿existe $\mathcal{M}$ un subespacio cerrado no trivial verificando que $T\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$?

Introducción

En dimensión finita:

Introducción

En dimensión finita:

- Si $\mathcal{X}$ es un esp. de Banach complejo

Introducción

En dimensión finita:

- Si $\mathcal{X}$ es un esp. de Banach complejo $\xrightarrow{\text{Sí}}$ $\mathrm{Ker}(T - \lambda I)$.

Introducción

En dimensión finita:

- Si $\mathcal{X}$ es un esp. de Banach complejo $\xrightarrow{\text{Sí}}$ $\text{Ker}(T - \lambda I)$.
- Si $\mathcal{X}$ es un esp. de Banach real

Introducción

En dimensión finita:

- Si $\mathcal{X}$ es un esp. de Banach complejo $\xrightarrow{\text{Sí}}$ $\text{Ker}(T - \lambda I)$.
- Si $\mathcal{X}$ es un esp. de Banach real $\xrightarrow{\text{No}}$ $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Introducción

En dimensión finita:

- Si $\mathcal{X}$ es un esp. de Banach complejo $\xrightarrow{\text{Sí}}$ $\mathrm{Ker}(T-\lambda I)$.
- Si $\mathcal{X}$ es un esp. de Banach real $\xrightarrow{\text{No}}$ $T=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

  Sin embargo, si $\dim\mathcal{X}\geq 3$ entonces es posible conseguir subespacios cerrados e invariantes de dimensión 1 ó 2.

Introducción

En dimensión finita:

- Si $\mathcal{X}$ es un esp. de Banach complejo $\xrightarrow{\text{Sí}}$ $\mathrm{Ker}(T - \lambda I)$.
- Si $\mathcal{X}$ es un esp. de Banach real $\xrightarrow{\text{No}}$ $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

  Sin embargo, si $\dim \mathcal{X} \geq 3$ entonces es posible conseguir subespacios cerrados e invariantes de dimensión 1 ó 2.

¿Qué ocurre cuando el espacio de Banach no es de dimensión finita?

Introducción

En dimensión finita:

- Si $\mathcal{X}$ es un esp. de Banach complejo $\xrightarrow{\text{Sí}}$ $\operatorname{Ker}(T - \lambda I)$.
- Si $\mathcal{X}$ es un esp. de Banach real $\xrightarrow{\text{No}}$ $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

  Sin embargo, si $\dim \mathcal{X} \geq 3$ entonces es posible conseguir subespacios cerrados e invariantes de dimensión 1 ó 2.

¿Qué ocurre cuando el espacio de Banach no es de dimensión finita?

- Si $\mathcal{X}$ es **no separable**

Introducción

En dimensión finita:

- Si $\mathcal{X}$ es un esp. de Banach complejo $\xrightarrow{\text{Sí}}$ $\text{Ker}(T-\lambda I)$.
- Si $\mathcal{X}$ es un esp. de Banach real $\xrightarrow{\text{No}}$ $T=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

  Sin embargo, si $\dim \mathcal{X} \geq 3$ entonces es posible conseguir subespacios cerrados e invariantes de dimensión 1 ó 2.

¿Qué ocurre cuando el espacio de Banach no es de dimensión finita?

- Si $\mathcal{X}$ es **no separable** $\longrightarrow$ $\mathcal{M}=\overline{\text{span}\{T^n x_0 : n\geq 0\}}, x_0\neq 0$.

Introducción

En dimensión finita:

- Si $\mathcal{X}$ es un esp. de Banach complejo $\xrightarrow{\text{Sí}}$ $\operatorname{Ker}(T-\lambda I)$.
- Si $\mathcal{X}$ es un esp. de Banach real $\xrightarrow{\text{No}}$ $T=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

  Sin embargo, si $\dim\mathcal{X}\geq 3$ entonces es posible conseguir subespacios cerrados e invariantes de dimensión 1 ó 2.

¿Qué ocurre cuando el espacio de Banach no es de dimensión finita?

- Si $\mathcal{X}$ es **no separable** $\longrightarrow \mathcal{M}=\overline{\operatorname{span}\{T^n x_0 : n\geq 0\}}, x_0\neq 0$.
- Si $\mathcal{X}$ es **separable** y $T\in\mathcal{L}(\mathcal{X})$ es tal que

$$\operatorname{Ker} T\neq\{0\} \qquad \text{ó} \qquad \overline{R(T)}\neq\mathcal{X},$$

  también posee un subespacio cerrado, T invariante no trivial.

Introducción

En 1975, Per Enflo presentó la existencia de un espacio de Banach **separable** y un operador T lineal, continuo, **inyectivo y de rango denso** sin subespacios cerrados e invariantes no triviales.

Introducción

En 1975, Per Enflo presentó la existencia de un espacio de Banach **separable** y un operador T lineal, continuo, **inyectivo y de rango denso** sin subespacios cerrados e invariantes no triviales.

Más tarde, C. Read contruyó un operador lineal y continuo en ℓ^1 sin subespacios cerrados e invariantes no triviales.

Introducción

En 1975, Per Enflo presentó la existencia de un espacio de Banach **separable** y un operador T lineal, continuo, **inyectivo y de rango denso** sin subespacios cerrados e invariantes no triviales.

Más tarde, C. Read contruyó un operador lineal y continuo en ℓ^1 sin subespacios cerrados e invariantes no triviales.

Dado un espacio de Banach reflexivo $\mathcal{X}$ de dimensión infinita, separable y un operador $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ inyectivo y de rango denso, ¿existe siempre $\mathcal{M}$ un subespacio cerrado e invariante no trivial?

Introducción

- 1930's, von Neumann.

Introducción

- 1930's, von Neumann.

- 1954, Aronszajn y Smith.

Introducción

- 1930's, von Neumann.
- 1954, Aronszajn y Smith.
- 1966, Bernstein and Robinson.

Introducción

- 1930's, von Neumann.
- 1954, Aronszajn y Smith.
- 1966, Bernstein and Robinson.
- 1967, Halmos.

Introducción

- 1973, **Teorema de Lomonosov:** Si $\mathcal{X}$ un espacio de Banach de dimensión infinita, $T, K \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ con K un operador compacto no nulo y tal que $TK = KT$, entonces T posee un subespacio cerrado e invariante no trivial.

Introducción

- 1973, **Teorema de Lomonosov:** Si $\mathcal{X}$ un espacio de Banach de dimensión infinita, $T, K \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ con K un operador compacto no nulo y tal que $TK = KT$, entonces T posee un subespacio cerrado e invariante no trivial.

  Si además $T \neq \lambda I$, entonces T posee un subespacio cerrado, T **hiperinvariante** no trivial, esto es, existe $\mathcal{M}$ subespacio cerrado tal que $S\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ para todo $S \in \{T\}'$.

Introducción

- 1973, **Teorema de Lomonosov:** Si $\mathcal{X}$ un espacio de Banach de dimensión infinita, $T, K \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ con K un operador compacto no nulo y tal que $TK = KT$, entonces T posee un subespacio cerrado e invariante no trivial.

  Si además $T \neq \lambda I$, entonces T posee un subespacio cerrado, T **hiperinvariante** no trivial, esto es, existe $\mathcal{M}$ subespacio cerrado tal que $S\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ para todo $S \in \{T\}'$.

- 2002, Troitsky afirma que el Teorema de Lomonosov no puede extenderse a una cadena de cuatro operadores.

Vectores minimales

Definición de vectores minimales

Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach y sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ un operador inyectivo y de rango denso. Dados $x_0 \in \mathcal{X}$ vector no nulo, $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon \in (0\,, \|x_0\|)$, definimos el conjunto

$$K_n^\varepsilon := (T^n)^{-1}(\overline{B(x_0, \varepsilon)}) = \{y \in \mathcal{X} : \|T^n y - x_0\| \leq \varepsilon\}.$$

Definición de vectores minimales

Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach y sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ un operador inyectivo y de rango denso. Dados $x_0 \in \mathcal{X}$ vector no nulo, $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon \in (0\,, \|x_0\|)$, definimos el conjunto

$$K_n^{\varepsilon} := (T^n)^{-1}(\overline{B(x_0, \varepsilon)}) = \{y \in \mathcal{X} : \|T^n y - x_0\| \leq \varepsilon\}.$$

Se observa que:

Definición de vectores minimales

Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach y sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ un operador inyectivo y de rango denso. Dados $x_0 \in \mathcal{X}$ vector no nulo, $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon \in (0\,, \|x_0\|)$, definimos el conjunto

$$K_n^\varepsilon := (T^n)^{-1}(\overline{B(x_0, \varepsilon)}) = \{y \in \mathcal{X} : \| T^n y - x_0\| \leq \varepsilon\}.$$

Se observa que:

1. $0 \notin K_n^\varepsilon$.

Definición de vectores minimales

Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach y sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ un operador inyectivo y de rango denso. Dados $x_0 \in \mathcal{X}$ vector no nulo, $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon \in (0\,, \|x_0\|)$, definimos el conjunto

$$K_n^\varepsilon := (T^n)^{-1}(\overline{B(x_0, \varepsilon)}) = \{y \in \mathcal{X} : \|T^n y - x_0\| \leq \varepsilon\}.$$

Se observa que:

1. $0 \notin K_n^\varepsilon$.
2. K_n^ε es cerrado y convexo para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definición de vectores minimales

Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach y sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ un operador inyectivo y de rango denso. Dados $x_0 \in \mathcal{X}$ vector no nulo, $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon \in (0\,, \|x_0\|)$, definimos el conjunto

$$K_n^\varepsilon := (T^n)^{-1}(\overline{B(x_0, \varepsilon)}) = \{y \in \mathcal{X} : \|T^n y - x_0\| \leq \varepsilon\}.$$

Se observa que:

1. $0 \notin K_n^\varepsilon$.
2. K_n^ε es cerrado y convexo para todo $n \in \mathbb{N}$.
3. $K_n^\varepsilon \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$, al ser T de rango denso.

Definición de vectores minimales

Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach y sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ un operador inyectivo y de rango denso. Dados $x_0 \in \mathcal{X}$ vector no nulo, $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon \in (0\,, \|x_0\|)$, definimos el conjunto

$$K_n^\varepsilon := (T^n)^{-1}(\overline{B(x_0, \varepsilon)}) = \{y \in \mathcal{X} : \|T^n y - x_0\| \leq \varepsilon\}.$$

Se observa que:

1. $0 \notin K_n^\varepsilon$.
2. K_n^ε es cerrado y convexo para todo $n \in \mathbb{N}$.
3. $K_n^\varepsilon \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$, al ser T de rango denso.

Fijados $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon \in (0, \|x_0\|)$, sea

$$d_n^\varepsilon = \text{ínf}\{\|y\| : y \in K_n^\varepsilon\}.$$

Definición de vectores minimales

Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach y sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ un operador inyectivo y de rango denso. Dados $x_0 \in \mathcal{X}$ vector no nulo, $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon \in (0\,,\|x_0\|)$, definimos el conjunto

$$K_n^\varepsilon := (T^n)^{-1}(\overline{B(x_0,\varepsilon)}) = \{y \in \mathcal{X} : \|T^n y - x_0\| \leq \varepsilon\}.$$

Se observa que:

1. $0 \notin K_n^\varepsilon$.
2. K_n^ε es cerrado y convexo para todo $n \in \mathbb{N}$.
3. $K_n^\varepsilon \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$, al ser T de rango denso.

Fijados $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon \in (0, \|x_0\|)$, sea

$$d_n^\varepsilon = \inf\{\|y\| : y \in K_n^\varepsilon\}.$$

Se satisface que $d_n^\varepsilon > 0$.

Definición de vectores minimales

En las condiciones anteriores:

Definición de vectores minimales

En las condiciones anteriores:

Vector minimal

Si $d_n^\varepsilon = \|y_n^\varepsilon\|$ para cierto $y_n^\varepsilon \in K_n^\varepsilon$

Definición de vectores minimales

En las condiciones anteriores:

Vector minimal

Si $d_n^\varepsilon = \|y_n^\varepsilon\|$ para cierto $y_n^\varepsilon \in K_n^\varepsilon$ entonces y_n^ε se denomina **vector minimal** asociado al operador T y con los parámetros x_0, n y ε.

Definición de vectores minimales

En las condiciones anteriores:

Vector minimal

Si $d_n^\varepsilon = \|y_n^\varepsilon\|$ para cierto $y_n^\varepsilon \in K_n^\varepsilon$ entonces y_n^ε se denomina **vector minimal** asociado al operador T y con los parámetros x_0, n y ε.

λ-vector minimal

Fijado $\lambda > 1$, si $d_n^\varepsilon \leq \|y_n^\varepsilon\| \leq \lambda d_n^\varepsilon$ para cierto $y_n^\varepsilon \in K_n^\varepsilon$

Definición de vectores minimales

En las condiciones anteriores:

Vector minimal

Si $d_n^\varepsilon = \|y_n^\varepsilon\|$ para cierto $y_n^\varepsilon \in K_n^\varepsilon$ entonces y_n^ε se denomina **vector minimal** asociado al operador T y con los parámetros x_0, n y ε.

λ-vector minimal

Fijado $\lambda > 1$, si $d_n^\varepsilon \leq \|y_n^\varepsilon\| \leq \lambda d_n^\varepsilon$ para cierto $y_n^\varepsilon \in K_n^\varepsilon$ entonces y_n^ε se denomina λ-**vector minimal** asociado al operador T y con los parámetros x_0, n y ε.

Existencia de los vectores minimales

¿Bajo qué condiciones podemos asegurar la existencia de los vectores minimales asociados a un operador?

Existencia de los vectores minimales

¿Bajo qué condiciones podemos asegurar la existencia de los vectores minimales asociados a un operador?

Recordamos que un espacio normado es *estrictamente convexo* si para cualesquiera $x, y \in \mathcal{X}$ linealmente independientes se cumple la desigualdad triangular estricta, esto es, $\|x + y\| < \|x\| + \|y\|$.

Existencia de los vectores minimales

¿Bajo qué condiciones podemos asegurar la existencia de los vectores minimales asociados a un operador?

Teorema

Sea $\mathcal{X}$ es un espacio de Banach reflexivo y sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ inyectivo y de rango denso. Entonces existen los vectores minimales y_n^ε para $x_0 \in \mathcal{X}$, $\varepsilon \in (0\,, \|x_0\|)$ y $n \in \mathbb{N}$ parámetros fijados cumpliendo

$$\|T^n y_n^\varepsilon - x_0\| = \varepsilon.$$

Si además $\mathcal{X}$ es estrictamente convexo, dichos vectores minimales son únicos.

Existencia de los vectores minimales

¿Bajo qué condiciones podemos asegurar la existencia de los vectores minimales asociados a un operador?

Teorema

Sea $\mathcal{X}$ es un espacio de Banach reflexivo y sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ inyectivo y de rango denso. Entonces existen los vectores minimales y_n^ε para $x_0 \in \mathcal{X}$, $\varepsilon \in (0\,, \|x_0\|)$ y $n \in \mathbb{N}$ parámetros fijados cumpliendo

$$\|T^n y_n^\varepsilon - x_0\| = \varepsilon.$$

Si además $\mathcal{X}$ es estrictamente convexo, dichos vectores minimales son únicos.

Nota: En los espacios de Banach reflexivos siempre es posible construir una norma estrictamente convexa que sea equivalente a la que posee dicho espacio.

Vectores minimales en espacios de Hilbert

Teorema

Sea $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ inyectivo y de rango denso. Sean $x_0 \in \mathcal{H}$ vector no nulo, $\varepsilon \in (0, \|x_0\|)$ y $n \in \mathbb{N}$ parámetros. Entonces existe una constante positiva $\mu_n^\varepsilon = \mu_n^\varepsilon(x_0, \varepsilon)$ tal que los vectores minimales verifican la ecuación de punto fijo

$$y_n^\varepsilon = \mu_n^\varepsilon T^{*n}(x_0 - T^n y_n^\varepsilon).$$

Vectores minimales en espacios de Hilbert

Teorema

Sea $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ inyectivo y de rango denso. Sean $x_0 \in \mathcal{H}$ vector no nulo, $\varepsilon \in (0, \|x_0\|)$ y $n \in \mathbb{N}$ parámetros. Entonces existe una constante positiva $\mu_n^\varepsilon = \mu_n^\varepsilon(x_0, \varepsilon)$ tal que los vectores minimales verifican la ecuación de punto fijo

$$y_n^\varepsilon = \mu_n^\varepsilon T^{*n}(x_0 - T^n y_n^\varepsilon).$$

Además:

Vectores minimales en espacios de Hilbert

Teorema

Sea $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ inyectivo y de rango denso. Sean $x_0 \in \mathcal{H}$ vector no nulo, $\varepsilon \in (0, \|x_0\|)$ y $n \in \mathbb{N}$ parámetros. Entonces existe una constante positiva $\mu_n^\varepsilon = \mu_n^\varepsilon(x_0, \varepsilon)$ tal que los vectores minimales verifican la ecuación de punto fijo

$$y_n^\varepsilon = \mu_n^\varepsilon T^{*n}(x_0 - T^n y_n^\varepsilon).$$

Además:

1. La constante μ_n^ε es única.

Vectores minimales en espacios de Hilbert

Teorema

Sea $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ inyectivo y de rango denso. Sean $x_0 \in \mathcal{H}$ vector no nulo, $\varepsilon \in (0, \|x_0\|)$ y $n \in \mathbb{N}$ parámetros. Entonces existe una constante positiva $\mu_n^\varepsilon = \mu_n^\varepsilon(x_0, \varepsilon)$ tal que los vectores minimales verifican la ecuación de punto fijo

$$y_n^\varepsilon = \mu_n^\varepsilon T^{*n}(x_0 - T^n y_n^\varepsilon).$$

Además:

1. La constante μ_n^ε es única.
2. Haciendo unas pequeñas operaciones se obtiene

$$x_0 - T^n y_n^\varepsilon = (I + \mu_n^\varepsilon T^n T^{*n})^{-1} x_0.$$

Propiedades

Corolario

Sea $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ operador inyectivo y de rango denso. Sean $x_0 \in \mathcal{H}$ vector no nulo, $\varepsilon \in (0, \|x_0\|)$ y $n \in \mathbb{N}$.

Propiedades

Corolario

Sea $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ operador inyectivo y de rango denso. Sean $x_0 \in \mathcal{H}$ vector no nulo, $\varepsilon \in (0, \|x_0\|)$ y $n \in \mathbb{N}$.

1. Si denotamos θ_n^ε el ángulo formado por $T^n y_n^\varepsilon - x_0$ y $T^n y_n^\varepsilon$, entonces $\theta_n^\varepsilon > \pi/2$.

Propiedades

Corolario

Sea $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ operador inyectivo y de rango denso. Sean $x_0 \in \mathcal{H}$ vector no nulo, $\varepsilon \in (0, \|x_0\|)$ y $n \in \mathbb{N}$.

1. Si denotamos θ_n^ε el ángulo formado por $T^n y_n^\varepsilon - x_0$ y $T^n y_n^\varepsilon$, entonces $\theta_n^\varepsilon > \pi/2$.
2. $\|T^n y_n^\varepsilon\|^2 < \|x_0\|^2 - \varepsilon^2$.

Propiedades

Corolario

Sea $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ operador inyectivo y de rango denso. Sean $x_0 \in \mathcal{H}$ vector no nulo, $\varepsilon \in (0, \|x_0\|)$ y $n \in \mathbb{N}$.

1. Si denotamos θ_n^ε el ángulo formado por $T^n y_n^\varepsilon - x_0$ y $T^n y_n^\varepsilon$, entonces $\theta_n^\varepsilon > \pi/2$.
2. $\|T^n y_n^\varepsilon\|^2 < \|x_0\|^2 - \varepsilon^2$.
3. Si $z \in \mathcal{H}$, $z \perp y_n^\varepsilon$ si y sólo si $T^n z \perp T^n y_n^\varepsilon - x_0$.

Propiedades

Corolario

Sea $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ operador inyectivo y de rango denso. Sean $x_0 \in \mathcal{H}$ vector no nulo, $\varepsilon \in (0, \|x_0\|)$ y $n \in \mathbb{N}$.

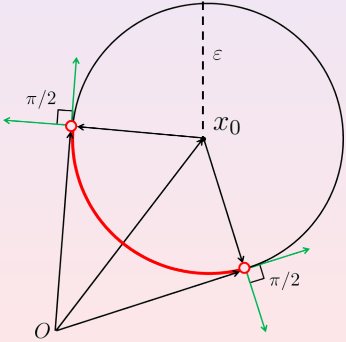
1. Si denotamos θ_n^ε el ángulo formado por $T^n y_n^\varepsilon - x_0$ y $T^n y_n^\varepsilon$, entonces $\theta_n^\varepsilon > \pi/2$.
2. $\|T^n y_n^\varepsilon\|^2 < \|x_0\|^2 - \varepsilon^2$.
3. Si $z \in \mathcal{H}$, $z \perp y_n^\varepsilon$ si y sólo si $T^n z \perp T^n y_n^\varepsilon - x_0$.
4. Si $x \in K_n^\varepsilon$, entonces $\|y_n^\varepsilon\|^2 \leq |\langle x, y_n^\varepsilon \rangle|$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Propiedades

Intuitivamente, el corolario anterior permite conocer, de manera geométrica, en que región de la frontera de la bola $\overline{B(x_0, \varepsilon)}$ se sitúan los vectores $T^n y_n^\varepsilon$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Propiedades

Intuitivamente, el corolario anterior permite conocer, de manera geométrica, en que región de la frontera de la bola $\overline{B(x_0, \varepsilon)}$ se sitúan los vectores $T^n y_n^\varepsilon$, para cada $n \in \mathbb{N}$.



Esto es debido a que, para cada n natural se tiene que $\theta_n^\varepsilon > \pi/2$, y por consiguiente dichos vectores se encuentran en el arco con extremos abiertos señalado de color rojo en la Figura para dimensión dos.

Propiedades

Recordemos que dado $\mathcal{X}$ espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, se dice que T es *cuasinilpotente* si $\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = 0$.

Propiedades

Recordemos que dado $\mathcal{X}$ espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, se dice que T es *cuasinilpotente* si $\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = 0$.

Proposición

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ un operador inyectivo y de rango denso. Dados $x_0 \in \mathcal{X}$ vector no nulo, $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon \in (0\,,\|x_0\|)$ denotemos por $\{y_n^\varepsilon\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de vectores minimales asociado a dicho operador. Si T es cuasinilpotente entonces

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|y^\varepsilon_{n_{k-1}}\|}{\|y^\varepsilon_{n_k}\|} = 0,$$

para cierta subsucesión $\{y^\varepsilon_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Resultados conocidos

Operadores compactos

Recordemos que dado $\mathcal{X}$ espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, se dice que T es *compacto* si $\overline{\{Tx : x \in B_{\mathcal{X}}\}}$ es compacto en $\mathcal{X}$.

Operadores compactos

Recordemos que dado $\mathcal{X}$ espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, se dice que T es *compacto* si $\overline{\{Tx : x \in B_{\mathcal{X}}\}}$ es compacto en $\mathcal{X}$.

Teorema de Lomonosov (1973)

Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach de dimensión infinita. Si $T, K \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ con K un operador compacto no nulo y tal que $TK = KT$, entonces T posee un subespacio cerrado invariante no trivial.

Operadores compactos

Recordemos que dado $\mathcal{X}$ espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, se dice que T es *compacto* si $\overline{\{Tx : x \in B_{\mathcal{X}}\}}$ es compacto en $\mathcal{X}$.

Teorema de Lomonosov (1973)

Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach de dimensión infinita. Si $T, K \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ con K un operador compacto no nulo y tal que $TK = KT$, entonces T posee un subespacio cerrado invariante no trivial.

Nota: Si además el operador T es no escalar, esto es $T \neq \lambda I$, entonces T posee un subespacio cerrado, T hiperinvariante no trivial.

Operadores compactos

Recordemos que dado $\mathcal{X}$ espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, se dice que T es *compacto* si $\overline{\{Tx : x \in B_{\mathcal{X}}\}}$ es compacto en $\mathcal{X}$.

Teorema de Lomonosov (1973)

Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach de dimensión infinita. Si $T, K \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ con K un operador compacto no nulo y tal que $TK = KT$, entonces T posee un subespacio cerrado invariante no trivial.

Corolario

1. Todo operador compacto no nulo K tiene un subespacio cerrado hiperinvariante no trivial.
2. Todo operador polinomialmente compacto no nulo $P(K)$ tiene un subespacio cerrado hiperinvariante no trivial.

Operadores cuasinilpotentes

Operadores cuasinilpotentes

1997, C. Read construye un operador cuasinilpotente en ℓ^1 sin subespacios cerrados e invariantes no triviales.

Operadores cuasinilpotentes

1997, C. Read construye un operador cuasinilpotente en ℓ^1 sin subespacios cerrados e invariantes no triviales.

Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio de Banach $\mathcal{X}$ se denomina *base de Schauder* si para todo $x \in \mathcal{X}$ existe una única sucesión de escalares $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$, esto es,

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \right\| \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Operadores cuasinilpotentes

1997, C. Read construye un operador cuasinilpotente en ℓ^1 sin subespacios cerrados e invariantes no triviales.

Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio de Banach $\mathcal{X}$ se denomina *base de Schauder* si para todo $x \in \mathcal{X}$ existe una única sucesión de escalares $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$, esto es,

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \right\| \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Si $\mathcal{X}$ es un espacio de Banach real y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder, se define

Operadores cuasinilpotentes

1997, C. Read construye un operador cuasinilpotente en ℓ^1 sin subespacios cerrados e invariantes no triviales.

Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio de Banach $\mathcal{X}$ se denomina *base de Schauder* si para todo $x \in \mathcal{X}$ existe una única sucesión de escalares $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$, esto es,

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \right\| \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Si $\mathcal{X}$ es un espacio de Banach real y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder, se define

1. $C = \{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n : \alpha_n \geq 0 \text{ para todo } n = 1, 2, \dots\}$.

Operadores cuasinilpotentes

1997, C. Read construye un operador cuasinilpotente en ℓ^1 sin subespacios cerrados e invariantes no triviales.

Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio de Banach $\mathcal{X}$ se denomina *base de Schauder* si para todo $x \in \mathcal{X}$ existe una única sucesión de escalares $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$, esto es,

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \right\| \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Si $\mathcal{X}$ es un espacio de Banach real y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder, se define

1. $C = \{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n : \alpha_n \geq 0 \text{ para todo } n = 1, 2, \dots\}$.
2. $x \geq y$ si y sólo si $x - y \in C$, para todo $x, y \in \mathcal{X}$.

Operadores cuasinilpotentes

1997, C. Read construye un operador cuasinilpotente en ℓ^1 sin subespacios cerrados e invariantes no triviales.

Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio de Banach $\mathcal{X}$ se denomina *base de Schauder* si para todo $x \in \mathcal{X}$ existe una única sucesión de escalares $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$, esto es,

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \right\| \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Si $\mathcal{X}$ es un espacio de Banach real y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder, se define

1. $C = \{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n : \alpha_n \geq 0$ para todo $n = 1, 2, \ldots\}$.
2. $x \geq y$ si y sólo si $x - y \in C$, para todo $x, y \in \mathcal{X}$.
3. $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ es *positivo* respecto a dicha base si $T(C) \subseteq C$.

Operadores cuasinilpotentes

Teorema (Abramovich-Aliprantis-Burkinshaw, 1994)

Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach real con una base de Schauder. Si $T, Q \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ son operadores positivos respecto a dicha base que conmutan entre sí verificando que

$$\lim_{n\to\infty} \|Q^n y_0\|^{1/n} = 0, \quad y_0 \geq 0, \quad y_0 \neq 0,$$

entonces T posee un subespacio cerrado e invariante no trivial.

Operadores cuasinilpotentes

Teorema (Abramovich-Aliprantis-Burkinshaw, 1994)

Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach real con una base de Schauder. Si $T, Q \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ son operadores positivos respecto a dicha base que conmutan entre sí verificando que

$$\lim_{n\to\infty} \|Q^n y_0\|^{1/n} = 0, \quad y_0 \geq 0, \quad y_0 \neq 0,$$

entonces T posee un subespacio cerrado e invariante no trivial.

Corolario

Si $\mathcal{X}$ un espacio de Banach real, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder del mismo y $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ un operador cuasinilpotente positivo respecto a dicha base, entonces Q posee un subespacio cerrado e invariante no trivial.

Vectores minimales y subespacios hiperinvariantes

Operadores compactos

Teorema

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Entonces todo operador compacto no nulo K tiene un subespacio cerrado e hiperinvariante no trivial.

Esquema de la demostración

Esquema de la demostración

Fórmula de Gelfand $\rho(T) = \text{lím}_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$

Esquema de la demostración

- K es cuasinilpotente.

Esquema de la demostración

- K es cuasinilpotente. Sea x_0 vector no nulo y $\varepsilon \in (0, \|x_0\|)$.

Esquema de la demostración

- K es cuasinilpotente. Sea x_0 vector no nulo y $\varepsilon \in (0, \|x_0\|)$.
- Existe subsucesión tal que $\text{lím}_{j\to\infty} \|y^{\varepsilon}_{n_j-1}\|/\|y^{\varepsilon}_{n_j}\| = 0$.

Esquema de la demostración

- K es cuasinilpotente. Sea x_0 vector no nulo y $\varepsilon \in (0, \|x_0\|)$.
- Existe subsucesión tal que $\lim_{j\to\infty} \|y^{\varepsilon}_{n_j-1}\|/\|y^{\varepsilon}_{n_j}\| = 0$.
- $y_0, z_0 \in \mathcal{H}$ verificando $K^{n_j} y^{\varepsilon}_{n_j} \xrightarrow{w} y_0$,$K^{n_j-1} y^{\varepsilon}_{n_j-1} \xrightarrow{w} z_0$.

Esquema de la demostración

- K es cuasinilpotente. Sea x_0 vector no nulo y $\varepsilon \in (0, \|x_0\|)$.
- Existe subsucesión tal que $\lim_{j\to\infty} \|y^{\varepsilon}_{n_j-1}\|/\|y^{\varepsilon}_{n_j}\| = 0$.
- $y_0, z_0 \in \mathcal{H}$ verificando $K^{n_j} y^{\varepsilon}_{n_j} \xrightarrow{w} y_0$,$K^{n_j-1} y^{\varepsilon}_{n_j-1} \xrightarrow{w} z_0$.
- Para $T \in \{K\}'$,

Esquema de la demostración

- K es cuasinilpotente. Sea x_0 vector no nulo y $\varepsilon \in (0, \|x_0\|)$.
- Existe subsucesión tal que $\lim_{j\to\infty} \|y^{\varepsilon}_{n_j-1}\|/\|y^{\varepsilon}_{n_j}\| = 0$.
- $y_0, z_0 \in \mathcal{H}$ verificando $K^{n_j} y^{\varepsilon}_{n_j} \xrightarrow{w} y_0$,$K^{n_j-1} y^{\varepsilon}_{n_j-1} \xrightarrow{w} z_0$.
- Para $T \in \{K\}'$, escribimos

$$Ty^{\varepsilon}_{n_j-1} = \alpha_{n_j-1} y^{\varepsilon}_{n_j} + \omega_{n_j-1}, \text{ donde } \omega_{n_j-1} \in \langle\{y^{\varepsilon}_{n_j}\}\rangle^{\perp}.$$

Esquema de la demostración

- K es cuasinilpotente. Sea x_0 vector no nulo y $\varepsilon \in (0, \|x_0\|)$.
- Existe subsucesión tal que $\lim_{j\to\infty} \|y^\varepsilon_{n_j-1}\|/\|y^\varepsilon_{n_j}\| = 0$.
- $y_0, z_0 \in \mathcal{H}$ verificando $K^{n_j} y^\varepsilon_{n_j} \xrightarrow{w} y_0$,$K^{n_j-1} y^\varepsilon_{n_j-1} \xrightarrow{w} z_0$.
- Para $T \in \{K\}'$, escribimos

$$Ty^\varepsilon_{n_j-1} = \alpha_{n_j-1} y^\varepsilon_{n_j} + \omega_{n_j-1}, \text{ donde } \omega_{n_j-1} \in \langle \{y^\varepsilon_{n_j}\} \rangle^\perp.$$

- $\lim_{j\to\infty} \langle TK^{n_j} y^\varepsilon_{n_j-1}, K^{n_j} y^\varepsilon_{n_j} - x_0 \rangle = \langle TKz_0, y_0 - x_0 \rangle = 0.$

Esquema de la demostración

- K es cuasinilpotente. Sea x_0 vector no nulo y $\varepsilon \in (0, \|x_0\|)$.
- Existe subsucesión tal que $\lim_{j\to\infty} \|y^{\varepsilon}_{n_j-1}\|/\|y^{\varepsilon}_{n_j}\| = 0$.
- $y_0, z_0 \in \mathcal{H}$ verificando $K^{n_j} y^{\varepsilon}_{n_j} \xrightarrow{w} y_0$,$K^{n_j-1} y^{\varepsilon}_{n_j-1} \xrightarrow{w} z_0$.
- Para $T \in \{K\}'$, escribimos

$$Ty^{\varepsilon}_{n_j-1} = \alpha_{n_j-1} y^{\varepsilon}_{n_j} + \omega_{n_j-1}, \text{ donde } \omega_{n_j-1} \in \langle\{y^{\varepsilon}_{n_j}\}\rangle^{\perp}.$$

- $\lim_{j\to\infty}\langle TK^{n_j} y^{\varepsilon}_{n_j-1}, K^{n_j} y^{\varepsilon}_{n_j} - x_0\rangle = \langle TKz_0, y_0 - x_0\rangle = 0.$
- $\langle Tz_0, K^*(y_0 - x_0)\rangle = 0$

Esquema de la demostración

- K es cuasinilpotente. Sea x_0 vector no nulo y $\varepsilon \in (0, \|x_0\|)$.
- Existe subsucesión tal que $\lim_{j\to\infty} \|y^{\varepsilon}_{n_j-1}\|/\|y^{\varepsilon}_{n_j}\| = 0$.
- $y_0, z_0 \in \mathcal{H}$ verificando $K^{n_j} y^{\varepsilon}_{n_j} \xrightarrow{w} y_0$,$K^{n_j-1} y^{\varepsilon}_{n_j-1} \xrightarrow{w} z_0$.
- Para $T \in \{K\}'$, escribimos

$$Ty^{\varepsilon}_{n_j-1} = \alpha_{n_j-1} y^{\varepsilon}_{n_j} + \omega_{n_j-1}, \text{ donde } \omega_{n_j-1} \in \langle\{y^{\varepsilon}_{n_j}\}\rangle^{\perp}.$$

- $\lim_{j\to\infty} \langle TK^{n_j} y^{\varepsilon}_{n_j-1}, K^{n_j} y^{\varepsilon}_{n_j} - x_0\rangle = \langle TKz_0, y_0 - x_0\rangle = 0.$
- $\langle Tz_0, K^*(y_0 - x_0)\rangle = 0$ con $(y_0 - x_0) \neq 0$ y $K^*(y_0 - x_0) \neq 0$.

Esquema de la demostración

- K es cuasinilpotente. Sea x_0 vector no nulo y $\varepsilon \in (0, \|x_0\|)$.
- Existe subsucesión tal que $\lim_{j\to\infty} \|y^{\varepsilon}_{n_j-1}\|/\|y^{\varepsilon}_{n_j}\| = 0$.
- $y_0, z_0 \in \mathcal{H}$ verificando $K^{n_j} y^{\varepsilon}_{n_j} \xrightarrow{w} y_0$,$K^{n_j-1} y^{\varepsilon}_{n_j-1} \xrightarrow{w} z_0$.
- Para $T \in \{K\}'$, escribimos

$$Ty^{\varepsilon}_{n_j-1} = \alpha_{n_j-1} y^{\varepsilon}_{n_j} + \omega_{n_j-1}, \text{ donde } \omega_{n_j-1} \in \langle \{y^{\varepsilon}_{n_j}\} \rangle^{\perp}.$$

- $\lim_{j\to\infty} \langle TK^{n_j} y^{\varepsilon}_{n_j-1}, K^{n_j} y^{\varepsilon}_{n_j} - x_0 \rangle = \langle TKz_0, y_0 - x_0 \rangle = 0$.
- $\langle Tz_0, K^*(y_0 - x_0) \rangle = 0$ con $(y_0 - x_0) \neq 0$ y $K^*(y_0 - x_0) \neq 0$.
- $\mathcal{M} = \operatorname{span} \overline{\{Sz_0 : SK = KS\}}$.

Operadores cuasinilpotentes

Teorema (Jung-Ko-Pearcy, 2003)

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de dimensión infinita. Supongamos $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es un operador inyectivo, de rango denso y cuasinilpotente. Sean $\{D_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \{Q\}'$ una sucesión convergente en la topología débil de operadores a $D \in \{Q\}'$, $D \neq 0$, y $\{K_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión de operadores compactos tales que

$$\lim_{m\to\infty} \|D_m - K_m\| = 0.$$

Entonces Q posee un subespacio cerrado e hiperinvarinte no trivial.

Más resultados

Teorema (Chalendar-Partington, 2005)

Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ un operador inyectivo y de rango denso. Dados $x_0 \in \mathcal{X}$ vector no nulo, $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon \in (0\,, \|x_0\|)$ denotemos por y_n^ε a un λ-vector minimal asociado. Supongamos que existe una subsucesión $\{y_{n_k}^\varepsilon\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|y_{n_{k-1}}^\varepsilon\|}{\|y_{n_k}^\varepsilon\|} = 0,$$

y una sucesión uniformemente acotada $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{T\}'$ de forma que la sucesión $\{A_k T^{n_k-1} y_{n_k-1}^\varepsilon\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge en norma a un elemento no nulo. Entonces T tiene un subespacio cerrado e hiperinvariante no trivial.

Más resultados

Corolario

Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ un operador inyectivo y de rango denso. Dados $x_0 \in \mathcal{X}$ vector no nulo, $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon \in (0\,, \|x_0\|)$ denotemos por y_n^ε a un λ-vector minimal asociado. Supongamos que existe una subsucesión de λ-vectores minimales tal que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|y_{n_{k-1}}^\varepsilon\|}{\|y_{n_k}^\varepsilon\|} = 0.$$

Si se verifica una de las siguientes condiciones:

Más resultados

Corolario

Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ un operador inyectivo y de rango denso. Dados $x_0 \in \mathcal{X}$ vector no nulo, $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon \in (0\,, \|x_0\|)$ denotemos por y_n^ε a un λ-vector minimal asociado. Supongamos que existe una subsucesión de λ-vectores minimales tal que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|y^\varepsilon_{n_{k-1}}\|}{\|y^\varepsilon_{n_k}\|} = 0.$$

Si se verifica una de las siguientes condiciones:

1. $\{T^{n_k-1} y^\varepsilon_{n_k-1}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge en norma a un elemento no nulo.

Más resultados

Corolario

Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ un operador inyectivo y de rango denso. Dados $x_0 \in \mathcal{X}$ vector no nulo, $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon \in (0\,,\|x_0\|)$ denotemos por y_n^ε a un λ-vector minimal asociado. Supongamos que existe una subsucesión de λ-vectores minimales tal que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|y^\varepsilon_{n_{k-1}}\|}{\|y^\varepsilon_{n_k}\|} = 0.$$

Si se verifica una de las siguientes condiciones:

1. $\{T^{n_k-1} y^\varepsilon_{n_k-1}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge en norma a un elemento no nulo.
2. $\{T^{n_k} y^\varepsilon_{n_k-1}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge en norma a un elemento no nulo.

Más resultados

Corolario

Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ un operador inyectivo y de rango denso. Dados $x_0 \in \mathcal{X}$ vector no nulo, $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon \in (0\,,\|x_0\|)$ denotemos por y_n^ε a un λ-vector minimal asociado. Supongamos que existe una subsucesión de λ-vectores minimales tal que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|y^\varepsilon_{n_{k-1}}\|}{\|y^\varepsilon_{n_k}\|} = 0.$$

Si se verifica una de las siguientes condiciones:

1. $\{T^{n_k-1} y^\varepsilon_{n_k-1}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge en norma a un elemento no nulo.
2. $\{T^{n_k} y^\varepsilon_{n_k-1}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge en norma a un elemento no nulo.

Entonces T tiene un subespacio cerrado e hiperinvariante no trivial.

Referencias

Ansari S., Enflo P., Extremal vectors and invariant subspaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **350** (1998), no. 2, 539-558.

Enflo P., Höim T., Some results on extremal vectors an invariant subspaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **131** (2003), no. 2, 379-387.

Chalendar I., Partington J., Convergence properties of minimal vectors for normal operators and weighted shifts. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **133** (2004), no. 2, 501-510.