El índice de Conley y el grado topólogico

Héctor Barge Yáñez

7 de Noviembre de 2013

Universidad Complutense de Madrid

Table of contents

Definiciones

- M variedad C^∞ compacta n-dimensional .
- $f : M \to \mathbb{R}$ función C^∞

Definition

Sea $p \in Crit(f)$, diremos que p es *no degenerado* si $\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)\right)_{i,j} \neq 0$. Diremos que f es una *función de Morse* si todos sus puntos críticos son no degenerados. Definimos el *índice de Morse* de un punto crítico no degenerado p como el número de autovalores negativos de la matriz $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)\right)$.

Definiciones

- M variedad C^∞ compacta n-dimensional .
- $f : M \to \mathbb{R}$ función C^∞

Definition

Sea $p \in Crit(f)$, diremos que p es *no degenerado* si $\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)\right)_{i,j} \neq 0$. Diremos que f es una *función de Morse* si todos sus puntos críticos son no degenerados. Definimos el *índice de Morse* de un punto crítico no degenerado p como el número de autovalores negativos de la matriz $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)\right)$.

Definiciones

- M variedad C^∞ compacta n-dimensional .
- $f : M \to \mathbb{R}$ función C^∞

Definition

Sea $p \in Crit(f)$, diremos que p es *no degenerado* si $\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)\right)_{i,j} \neq 0$. Diremos que f es una *función de Morse* si todos sus puntos críticos son no degenerados. Definimos el *índice de Morse* de un punto crítico no degenerado p como el número de autovalores negativos de la matriz $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)\right)$.

Desigualdades de Morse

Las desigualdades de Morse ponen de manifiesto la relación existente entre la topología de la variedad y las funciones de Morse.

Theorem (Desigualdades de Morse)

Sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función de Morse definida en una variedad C^∞. Sean c_i el número total de puntos críticos de índice i y β_i el i-ésimo número de Betti de la variedad M. Se tiene entonces:

- $\beta_i \leq c_i$,
- $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i c_i = \chi(M)$.

Desigualdades de Morse

Las desigualdades de Morse ponen de manifiesto la relación existente entre la topología de la variedad y las funciones de Morse.

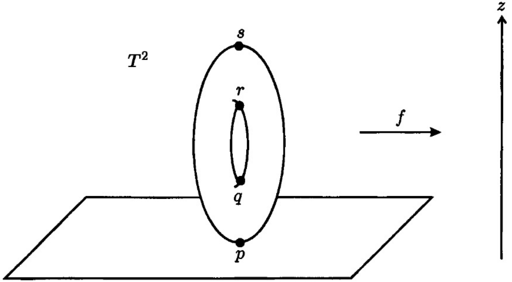
Theorem (Desigualdades de Morse)

Sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función de Morse definida en una variedad C^∞. Sean c_i el número total de puntos críticos de índice i y β_i el i-ésimo número de Betti de la variedad M. Se tiene entonces:

- $\beta_i \leq c_i$,
- $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i c_i = \chi(M)$.

El toro y la función altura

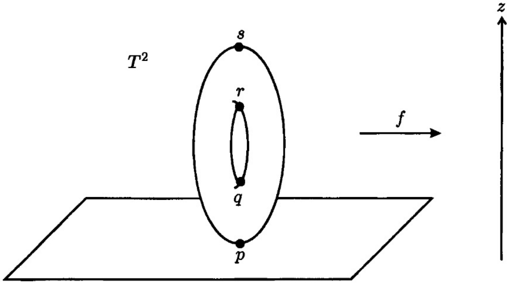
Si consideramos $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ y f la función altura se tiene:



- $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 1$ y $\chi(M) = 0$,
- $c_0 = 1$, $c_1 = 2$, $c_2 = 1$ y $c_0 - c_1 + c_2 = 0$.

El toro y la función altura

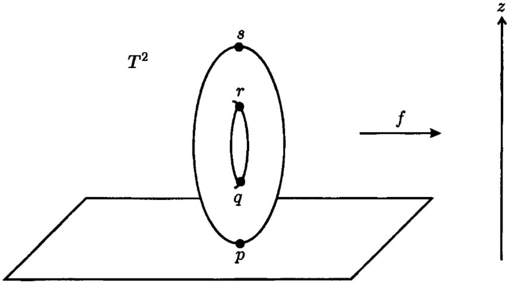
Si consideramos $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ y f la función altura se tiene:



- $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 1$ y $\chi(M) = 0$,
- $c_0 = 1$, $c_1 = 2$, $c_2 = 1$ y $c_0 - c_1 + c_2 = 0$.

El toro y la función altura

Si consideramos $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ y f la función altura se tiene:



- $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 1$ y $\chi(M) = 0$,
- $c_0 = 1$, $c_1 = 2$, $c_2 = 1$ y $c_0 - c_1 + c_2 = 0$.

Versión dinámica

El estudio de las funciones de Morse es equivalente al estudio de la EDO

$$\dot{x} = -\nabla f(x).$$

La condición de que todos los puntos críticos de f sean *no degenerados* equivale a que todos los puntos críticos de $-\nabla f$ sean *hiperbólicos*. Además el *índice de Morse* de cada uno de ellos coincide con la dimensión de su *variedad inestable*.

Se deduce entonces que las desigualdades de Morse ponen de manifiesto la relación entre la dinámica definida por el campo $-\nabla f$ en un entorno de cada punto crítico y la topología de la variedad M.

Versión dinámica

El estudio de las funciones de Morse es equivalente al estudio de la EDO

$$\dot{x} = -\nabla f(x).$$

La condición de que todos los puntos críticos de f sean *no degenerados* equivale a que todos los puntos críticos de $-\nabla f$ sean *hiperbólicos*. Además el *índice de Morse* de cada uno de ellos coincide con la dimensión de su *variedad inestable*.

Se deduce entonces que las desigualdades de Morse ponen de manifiesto la relación entre la dinámica definida por el campo $-\nabla f$ en un entorno de cada punto crítico y la topología de la variedad M.

Versión dinámica

El estudio de las funciones de Morse es equivalente al estudio de la EDO

$$\dot{x} = -\nabla f(x).$$

La condición de que todos los puntos críticos de f sean *no degenerados* equivale a que todos los puntos críticos de $-\nabla f$ sean *hiperbólicos*. Además el *índice de Morse* de cada uno de ellos coincide con la dimensión de su *variedad inestable*.
Se deduce entonces que las desigualdades de Morse ponen de manifiesto la relación entre la dinámica definida por el campo $-\nabla f$ en un entorno de cada punto crítico y la topología de la variedad M.

Problema de Conley

- Sea $\varphi : X \times \mathbb{R} \to X$ un flujo definido en un espacio métrico localmente compacto.
- Sea $K \subset X$ un compacto invariante aislado.
- Es posible definir un índice que proporcione información sobre la dinámica en un entorno de K y que generalice al índice de Morse?
- En caso afirmativo, Es posible obtener un análogo a las desigualdades de Morse en este caso?

Problema de Conley

- Sea $\varphi : X \times \mathbb{R} \to X$ un flujo definido en un espacio métrico localmente compacto.
- Sea $K \subset X$ un compacto invariante aislado.
- Es posible definir un índice que proporcione información sobre la dinámica en un entorno de K y que generalice al índice de Morse?
- En caso afirmativo, Es posible obtener un análogo a las desigualdades de Morse en este caso?

Problema de Conley

- Sea $\varphi : X \times \mathbb{R} \to X$ un flujo definido en un espacio métrico localmente compacto.
- Sea $K \subset X$ un compacto invariante aislado.
- Es posible definir un índice que proporcione información sobre la dinámica en un entorno de K y que generalice al índice de Morse?
- En caso afirmativo, Es posible obtener un análogo a las desigualdades de Morse en este caso?

Problema de Conley

- Sea $\varphi : X \times \mathbb{R} \to X$ un flujo definido en un espacio métrico localmente compacto.
- Sea $K \subset X$ un compacto invariante aislado.
- Es posible definir un índice que proporcione información sobre la dinámica en un entorno de K y que generalice al índice de Morse?
- En caso afirmativo, Es posible obtener un análogo a las desigualdades de Morse en este caso?

Definición

- Sea K un compacto invariante aislado,
- (N, L) un *bloque aislante* para K.

Definition

Se define el *índice de Conley* de K como el tipo de homotopía del espacio topológico punteado $h(K) = (N/L, [L])$.

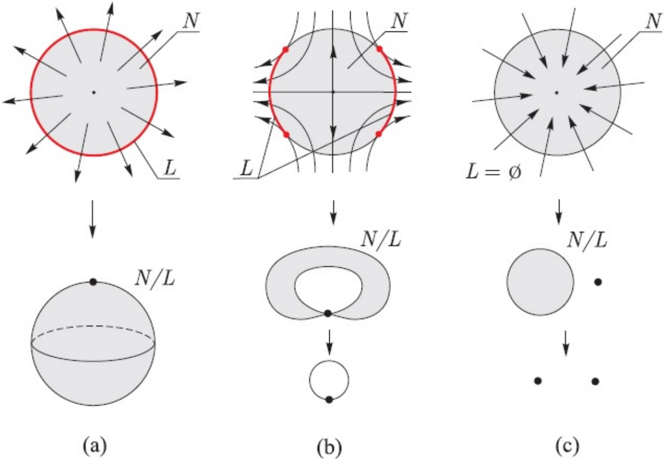
Definición

- Sea K un compacto invariante aislado,
- (N, L) un *bloque aislante* para K.

Definition

Se define el *índice de Conley* de K como el tipo de homotopía del espacio topológico punteado $h(K) = (N/L, [L])$.

Ejemplos



The Conley index for a source, a saddle and a sink.

Propiedades

- K admite una base de bloques aislantes,
- $h(K)$ no depende del bloque aislante escogido,
- $K \neq \varnothing$ si $h(K) \neq \{*\}$,
- Si $K = K_1 \cup K_2$ con $K_1 \cap K_2 = \varnothing$, $h(K) = h(K_1) \vee h(K_2)$,
- $h(K)$ es invariante por *continuación*.

Propiedades

- K admite una base de bloques aislantes,
- $h(K)$ no depende del bloque aislante escogido,
- $K \neq \varnothing$ si $h(K) \neq \{*\}$,
- Si $K = K_1 \cup K_2$ con $K_1 \cap K_2 = \varnothing$, $h(K) = h(K_1) \vee h(K_2)$,
- $h(K)$ es invariante por *continuación*.

Propiedades

- K admite una base de bloques aislantes,
- $h(K)$ no depende del bloque aislante escogido,
- $K \neq \varnothing$ si $h(K) \neq \{*\}$,
- Si $K = K_1 \cup K_2$ con $K_1 \cap K_2 = \varnothing$, $h(K) = h(K_1) \vee h(K_2)$,
- $h(K)$ es invariante por *continuación*.

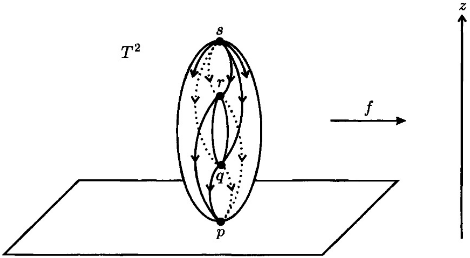
Propiedades

- K admite una base de bloques aislantes,
- $h(K)$ no depende del bloque aislante escogido,
- $K \neq \varnothing$ si $h(K) \neq \{*\}$,
- Si $K = K_1 \cup K_2$ con $K_1 \cap K_2 = \varnothing$, $h(K) = h(K_1) \vee h(K_2)$,
- $h(K)$ es invariante por *continuación*.

Propiedades

- K admite una base de bloques aislantes,
- $h(K)$ no depende del bloque aislante escogido,
- $K \neq \varnothing$ si $h(K) \neq \{*\}$,
- Si $K = K_1 \cup K_2$ con $K_1 \cap K_2 = \varnothing$, $h(K) = h(K_1) \vee h(K_2)$,
- $h(K)$ es invariante por *continuación*.

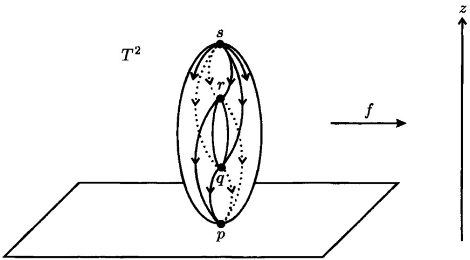
El toro y la función altura



- $h(\{p\}) = (\mathbb{S}^0, \{*\})$, $h(\{q\}) = (\mathbb{S}^1, \{*\})$, $h(\{r\}) = (\mathbb{S}^1, \{*\})$, $h(\{s\}) = (\mathbb{S}^2, \{*\})$

Obsérvese que la dimensión de la esfera asociada a cada punto crítico coincide con su índice de Morse.

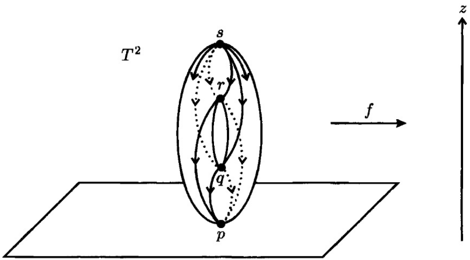
El toro y la función altura



- $h(\{p\}) = (\mathbb{S}^0, \{*\})$, $h(\{q\}) = (\mathbb{S}^1, \{*\})$, $h(\{r\}) = (\mathbb{S}^1, \{*\})$, $h(\{s\}) = (\mathbb{S}^2, \{*\})$

Obsérvese que la dimensión de la esfera asociada a cada punto crítico coincide con su índice de Morse.

El toro y la función altura



- $h(\{p\}) = (\mathbb{S}^0, \{*\})$, $h(\{q\}) = (\mathbb{S}^1, \{*\})$, $h(\{r\}) = (\mathbb{S}^1, \{*\})$, $h(\{s\}) = (\mathbb{S}^2, \{*\})$

Obsérvese que la dimensión de la esfera asociada a cada punto crítico coincide con su índice de Morse.

índice de Conley de puntos críticos hiperbólicos

Theorem

Sea p es un punto crítico hiperbólico de un flujo diferenciable definido en una variedad. Entonces $h(\{p\}) = (\mathbb{S}^k, \{*\})$ donde k denota el índice de Morse del punto p.

Hemos dado respuesta afirmativa a la primera cuestión, veamos entonces que ocurre con la segunda.

índice de Conley de puntos críticos hiperbólicos

Theorem

Sea p es un punto crítico hiperbólico de un flujo diferenciable definido en una variedad. Entonces $h(\{p\}) = (\mathbb{S}^k, \{*\})$ donde k denota el índice de Morse del punto p.

Hemos dado respuesta afirmativa a la primera cuestión, veamos entonces que ocurre con la segunda.

Descomposición de Morse

Sea K un compacto invariante aislado, diremos que la colección de subcompactos $\{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$ es una *descomposición de Morse* de K si verifica:

- M_i es un compacto invariante aislado,
- $M_i \cap M_j = \varnothing$ si $i \neq j$,
- Si $x \in K \setminus \bigcup M_k$, existen i, j con $i \leq j$ tales que $\alpha(x) \subset M_j$ y $\omega(x) \subset M_i$.

Descomposición de Morse

Sea K un compacto invariante aislado, diremos que la colección de subcompactos $\{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$ es una *descomposición de Morse* de K si verifica:

- M_i es un compacto invariante aislado,
- $M_i \cap M_j = \emptyset$ si $i \neq j$,
- Si $x \in K \setminus \bigcup M_k$, existen i, j con $i \leq j$ tales que $\alpha(x) \subset M_j$ y $\omega(x) \subset M_i$.

Descomposición de Morse

Sea K un compacto invariante aislado, diremos que la colección de subcompactos $\{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$ es una *descomposición de Morse* de K si verifica:

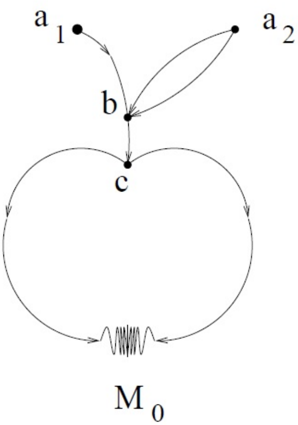
- M_i es un compacto invariante aislado,
- $M_i \cap M_j = \varnothing$ si $i \neq j$,
- Si $x \in K \setminus \bigcup M_k$, existen i, j con $i \leq j$ tales que $\alpha(x) \subset M_j$ y $\omega(x) \subset M_i$.

Descomposición de Morse

Sea K un compacto invariante aislado, diremos que la colección de subcompactos $\{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$ es una *descomposición de Morse* de K si verifica:

- M_i es un compacto invariante aislado,
- $M_i \cap M_j = \varnothing$ si $i \neq j$,
- Si $x \in K \setminus \bigcup M_k$, existen i, j con $i \leq j$ tales que $\alpha(x) \subset M_j$ y $\omega(x) \subset M_i$.

Ejemplo



$M_3 = \{a_1, a_2\}$

$M_2 = \{b\}$

$M_1 = \{c\}$

$M_0 = \{\,\mathsf{I}\,\}$

La ecuación de Morse

Se define el *polinomio de Poincaré* de un espacio topológico X (suponemos espacios buenos, es decir, variedades compactas, CW-complejos finitos...)

$$p_t(X) = \sum_q \beta_q t^q,$$

donde β_q denota el q-ésimo número de Betti de X.

Theorem

Sea K un compacto invariante aislado de un flujo φ y $\{M_1, M_2, \ldots M_k\}$ una descomposición de Morse de K. Entonces existe un polinomio $q(t)$ con coeficientes enteros no negativos tal que:

$$\sum_i p_t(h(M_i)) = p_t(h(K)) + (1+t)q(t).$$

La ecuación de Morse

Se define el *polinomio de Poincaré* de un espacio topológico X (suponemos espacios buenos, es decir, variedades compactas, CW-complejos finitos...)

$$p_t(X) = \sum_q \beta_q t^q,$$

donde β_q denota el q-ésimo número de Betti de X.

Theorem

Sea K un compacto invariante aislado de un flujo φ y $\{M_1, M_2, \ldots M_k\}$ una descomposición de Morse de K. Entonces existe un polinomio $q(t)$ con coeficientes enteros no negativos tal que:

$$\sum_i p_t(h(M_i)) = p_t(h(K)) + (1+t)q(t).$$

La ecuación de Morse

Se define el *polinomio de Poincaré* de un espacio topológico X (suponemos espacios buenos, es decir, variedades compactas, CW-complejos finitos...)

$$p_t(X) = \sum_q \beta_q t^q,$$

donde β_q denota el q-ésimo número de Betti de X.

Theorem

Sea K un compacto invariante aislado de un flujo φ y $\{M_1, M_2, \dots M_k\}$ una descomposición de Morse de K. Entonces existe un polinomio $q(t)$ con coeficientes enteros no negativos tal que:

$$\sum_i p_t(h(M_i)) = p_t(h(K)) + (1+t)q(t).$$

La característica de Euler

Teniendo en cuenta que dado un espacio topológico X, $\chi(X) = p_{-1}(X)$, se deduce de la ecuación de Morse que si $\{M_1, M_2, \dots, M_k\}$ es una descomposición de Morse de un compacto invariante aislado K, entonces

$$\sum_i \chi(h(M_i)) = \chi(h(K)),$$

En particular si K es el espacio total en el cual el flujo está definido,

$$\sum_i \chi(h(M_i)) = \chi(K),$$

La característica de Euler

Teniendo en cuenta que dado un espacio topológico X, $\chi(X) = p_{-1}(X)$, se deduce de la ecuación de Morse que si $\{M_1, M_2, \ldots, M_k\}$ es una descomposición de Morse de un compacto invariante aislado K, entonces

$$\sum_i \chi(h(M_i)) = \chi(h(K)),$$

En particular si K es el espacio total en el cual el flujo está definido,

$$\sum_i \chi(h(M_i)) = \chi(K),$$

Flujos de Morse en superficies

Sea $\varphi : M \times \mathbb{R} \to M$ un flujo de Morse en una superficie compacta y sean $\{p_1, p_2, \dots p_k\}$ los puntos fijos de φ.

- Si p_i es un atractor o un repulsor $\chi(h(p_i)) = 1$,
- Si p_i es una silla $\chi(h(p_i)) = -1$

Si denotamos por α el número de puntos críticos atractores o repulsores y por β el número de sillas se tiene

$$\sum_i \chi(h(p_i)) = \alpha - \beta = \chi(M).$$

Flujos de Morse en superficies

Sea $\varphi : M \times \mathbb{R} \to M$ un flujo de Morse en una superficie compacta y sean $\{p_1, p_2, \ldots p_k\}$ los puntos fijos de φ.

- Si p_i es un atractor o un repulsor $\chi(h(p_i)) = 1$,
- Si p_i es una silla $\chi(h(p_i)) = -1$

Si denotamos por α el número de puntos críticos atractores o repulsores y por β el número de sillas se tiene

$$\sum_i \chi(h(p_i)) = \alpha - \beta = \chi(M).$$

Flujos de Morse en superficies

Sea $\varphi : M \times \mathbb{R} \to M$ un flujo de Morse en una superficie compacta y sean $\{p_1, p_2, \ldots p_k\}$ los puntos fijos de φ.

- Si p_i es un atractor o un repulsor $\chi(h(p_i)) = 1$,
- Si p_i es una silla $\chi(h(p_i)) = -1$

Si denotamos por α el número de puntos críticos atractores o repulsores y por β el número de sillas se tiene

$$\sum_i \chi(h(p_i)) = \alpha - \beta = \chi(M).$$

Flujos de Morse en superficies

Sea $\varphi : M \times \mathbb{R} \to M$ un flujo de Morse en una superficie compacta y sean $\{p_1, p_2, \dots p_k\}$ los puntos fijos de φ.

- Si p_i es un atractor o un repulsor $\chi(h(p_i)) = 1$,
- Si p_i es una silla $\chi(h(p_i)) = -1$

Si denotamos por α el número de puntos críticos atractores o repulsores y por β el número de sillas se tiene

$$\sum_i \chi(h(p_i)) = \alpha - \beta = \chi(M).$$

Flujos de Morse en superficies

Por otro lado, $\beta = k - \alpha$, entonces

$$\chi(M) = 2\alpha - k = k - 2\beta$$

y se deduce

- $\beta = \frac{k - \chi(M)}{2}$
- $\alpha = \frac{k + \chi(M)}{2}$

El índice de Conley, vía las ecuaciones de Morse nos permite detectar exactamente cuantos de nuestros puntos fijos son sillas y cuantos atractores o repulsores de un modo exacto.

Flujos de Morse en superficies

Por otro lado, $\beta = k - \alpha$, entonces

$$\chi(M) = 2\alpha - k = k - 2\beta$$

y se deduce

- $\beta = \frac{k - \chi(M)}{2}$
- $\alpha = \frac{k + \chi(M)}{2}$

El índice de Conley, vía las ecuaciones de Morse nos permite detectar exactamente cuantos de nuestros puntos fijos son sillas y cuantos atractores o repulsores de un modo exacto.

Flujos de Morse en superficies

Por otro lado, $\beta = k - \alpha$, entonces

$$\chi(M) = 2\alpha - k = k - 2\beta$$

y se deduce

- $\beta = \frac{k - \chi(M)}{2}$
- $\alpha = \frac{k + \chi(M)}{2}$

El índice de Conley, vía las ecuaciones de Morse nos permite detectar exactamente cuantos de nuestros puntos fijos son sillas y cuantos atractores o repulsores de un modo exacto.

Flujos de Morse en superficies

Por otro lado, $\beta = k - \alpha$, entonces

$$\chi(M) = 2\alpha - k = k - 2\beta$$

y se deduce

- $\beta = \frac{k-\chi(M)}{2}$
- $\alpha = \frac{k+\chi(M)}{2}$

El índice de Conley, vía las ecuaciones de Morse nos permite detectar exactamente cuantos de nuestros puntos fijos son sillas y cuantos atractores o repulsores de un modo exacto.

Flujos de Morse en superficies

Por otro lado, $\beta = k - \alpha$, entonces

$$\chi(M) = 2\alpha - k = k - 2\beta$$

y se deduce

- $\beta = \frac{k-\chi(M)}{2}$
- $\alpha = \frac{k+\chi(M)}{2}$

El índice de Conley, vía las ecuaciones de Morse nos permite detectar exactamente cuantos de nuestros puntos fijos son sillas y cuantos atractores o repulsores de un modo exacto.

Dos resultados clave

Theorem

Todo flujo continuo en una superficie cerrada es conjugado a un flujo diferenciable.

Corollary

Sea K un compacto invariante aislado para un flujo φ definido en una superficie M. Entonces K admite una base de entornos aislantes N que son superficies compactas con borde ∂N y tales que el conjunto de salida L es una subvariedad compacta de ∂N unidimensional.

Se deduce que L es homeomorfo a una unión disjunta de circunferencias e intervalos cerrados.

Dos resultados clave

Theorem

Todo flujo continuo en una superficie cerrada es conjugado a un flujo diferenciable.

Corollary

Sea K un compacto invariante aislado para un flujo φ definido en una superficie M. Entonces K admite una base de entornos aislantes N que son superficies compactas con borde ∂N y tales que el conjunto de salida L es una subvariedad compacta de ∂N unidimensional.

Se deduce que L es homeomorfo a una unión disjunta de circunferencias e intervalos cerrados.

Dos resultados clave

Theorem

Todo flujo continuo en una superficie cerrada es conjugado a un flujo diferenciable.

Corollary

Sea K un compacto invariante aislado para un flujo φ definido en una superficie M. Entonces K admite una base de entornos aislantes N que son superficies compactas con borde ∂N y tales que el conjunto de salida L es una subvariedad compacta de ∂N unidimensional.

Se deduce que L es homeomorfo a una unión disjunta de circunferencias e intervalos cerrados.

Cálculos

Dado K compacto invariante aislado en la superficie M, calculamos $\chi(h(K))$. Sean $J_1, \dots J_k$ y $C_1, \dots C_r$ las componentes conexas de L.

$$\chi(h(K)) = \chi(N, L) = \chi(N) - \sum \chi(J_k) - \sum \chi(C_l) = \chi(N) - k.$$

Se tiene entonces que, si E denota los puntos en los que el flujo es tangente a ∂N exteriormente,

$$\chi(h(K)) = \chi(N) - \frac{1}{2} E.$$

Cálculos

Dado K compacto invariante aislado en la superficie M, calculamos $\chi(h(K))$. Sean $J_1, \dots J_k$ y $C_1, \dots C_r$ las componentes conexas de L.

$$\chi(h(K)) = \chi(N, L) = \chi(N) - \sum \chi(J_k) - \sum \chi(C_l) = \chi(N) - k.$$

Se tiene entonces que, si E denota los puntos en los que el flujo es tangente a ∂N exteriormente,

$$\chi(h(K)) = \chi(N) - \frac{1}{2}E.$$

Cálculos

Dado K compacto invariante aislado en la superficie M, calculamos $\chi(h(K))$. Sean $J_1, \dots J_k$ y $C_1, \dots C_r$ las componentes conexas de L.

$$\chi(h(K)) = \chi(N, L) = \chi(N) - \sum \chi(J_k) - \sum \chi(C_l) = \chi(N) - k.$$

Se tiene entonces que, si E denota los puntos en los que el flujo es tangente a ∂N exteriormente,

$$\chi(h(K)) = \chi(N) - \frac{1}{2}E.$$

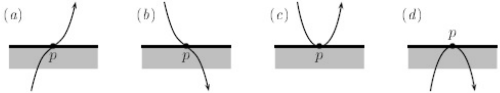
El índice de Poincaré

Definition

Sea p un punto crítico aislado y D un disco que no contiene más puntos críticos que p y verifica que todo punto del ∂D es de *tangencia interna*, de *tangencia externa* o *transversal* al flujo. Se define el *índice de Poincaré* de p como el número entero

$$\iota(p) = 1 + \frac{1}{2}(I - E),$$

donde I denota el número de puntos de *tangencia interna* y E el número de puntos de *tangencia externa* de D.



índice de Poincaré e índice de Conley

Theorem

Sea K un compacto invariante aislado para un flujo φ en una superficie cerrada M. Supongamos que K contiene un número finito de puntos críticos $p_1, p_2, \ldots p_m$. Entonces

$$\sum_i \iota(p_i) = \chi(h(K)).$$

Aplicaciones

Theorem

Un punto crítico aislado atractor $p \in \mathbb{R}^2$ *es estable si, y solo si,* $\chi(\mathcal{A}(p)) = 1$.

Theorem

Sea p *un punto crítico de un campo vectorial en una superficie* M. *Si* $\iota(p) > 1$, *entonces existe una órbita homoclínica en cualquier entorno de* p.

Aplicaciones

Theorem

Un punto crítico aislado atractor $p \in \mathbb{R}^2$ *es estable si, y solo si,* $\chi(\mathcal{A}(p)) = 1$.

Theorem

Sea p *un punto crítico de un campo vectorial en una superficie* M. *Si* $\iota(p) > 1$, *entonces existe una órbita homoclínica en cualquier entorno de* p.

Definición

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto *abierto acotado* y $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ una aplicación continua que no se anula en $\partial\Omega$.

Se define el *grado* de f con respecto al abierto Ω, como el *único* número entero $\deg(f, \Omega)$ que satisface

1. No trivialidad: si $0 \in \Omega$, entonces $\deg(id, \Omega) = 1$,
2. existencia: si $\deg(f, \Omega) \neq 0$, entonces $f^{-1}(0) \cap \Omega \neq \varnothing$,
3. aditividad: si Ω_1 y Ω_2 son dos subconjuntos abiertos disjuntos de Ω y no hay ceros de f en $\Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$, entonces $\deg(f, \Omega) = \deg(f, \Omega_1) + \deg(f, \Omega_2)$,
4. invariancia homotópica: si $F : \overline{\Omega} \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ es una aplicación continua tal que $F(x, t) \neq 0$ para todo $(x, t) \in \partial\Omega \times [0, 1]$, entonces

$$\deg(F(\cdot, 0), \Omega) = \deg(F(\cdot, 1), \Omega).$$

Definición

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto *abierto acotado* y $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ una aplicación continua que no se anula en $\partial\Omega$.
Se define el *grado* de f con respecto al abierto Ω, como el *único* número entero $\deg(f, \Omega)$ que satisface

1. No trivialidad: si $0 \in \Omega$, entonces $\deg(id, \Omega) = 1$,
2. existencia: si $\deg(f, \Omega) \neq 0$, entonces $f^{-1}(0) \cap \Omega \neq \varnothing$,
3. aditividad: si Ω_1 y Ω_2 son dos subconjuntos abiertos disjuntos de Ω y no hay ceros de f en $\Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$, entonces $\deg(f, \Omega) = \deg(f, \Omega_1) + \deg(f, \Omega_2)$,
4. invariancia homotópica: si $F : \overline{\Omega} \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ es una aplicación continua tal que $F(x, t) \neq 0$ para todo $(x, t) \in \partial\Omega \times [0, 1]$, entonces
$$\deg(F(\cdot, 0), \Omega) = \deg(F(\cdot, 1), \Omega).$$

Definición

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto *abierto acotado* y $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ una aplicación continua que no se anula en $\partial\Omega$.
Se define el *grado* de f con respecto al abierto Ω, como el *único* número entero $\deg(f, \Omega)$ que satisface

1. No trivialidad: si $0 \in \Omega$, entonces $\deg(id, \Omega) = 1$,
2. existencia: si $\deg(f, \Omega) \neq 0$, entonces $f^{-1}(0) \cap \Omega \neq \varnothing$,
3. aditividad: si Ω_1 y Ω_2 son dos subconjuntos abiertos disjuntos de Ω y no hay ceros de f en $\Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$, entonces $\deg(f, \Omega) = \deg(f, \Omega_1) + \deg(f, \Omega_2)$,
4. invariancia homotópica: si $F : \overline{\Omega} \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ es una aplicación continua tal que $F(x, t) \neq 0$ para todo $(x, t) \in \partial\Omega \times [0, 1]$, entonces
$$\deg(F(\cdot, 0), \Omega) = \deg(F(\cdot, 1), \Omega).$$

Definición

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto *abierto acotado* y $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ una aplicación continua que no se anula en $\partial\Omega$.
Se define el *grado* de f con respecto al abierto Ω, como el *único* número entero $\deg(f, \Omega)$ que satisface

1. No trivialidad: si $0 \in \Omega$, entonces $\deg(id, \Omega) = 1$,
2. existencia: si $\deg(f, \Omega) \neq 0$, entonces $f^{-1}(0) \cap \Omega \neq \varnothing$,
3. aditividad: si Ω_1 y Ω_2 son dos subconjuntos abiertos disjuntos de Ω y no hay ceros de f en $\Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$, entonces $\deg(f, \Omega) = \deg(f, \Omega_1) + \deg(f, \Omega_2)$,
4. invariancia homotópica: si $F : \overline{\Omega} \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ es una aplicación continua tal que $F(x, t) \neq 0$ para todo $(x, t) \in \partial\Omega \times [0, 1]$, entonces

$$\deg(F(\cdot, 0), \Omega) = \deg(F(\cdot, 1), \Omega).$$

Definición

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto *abierto acotado* y $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ una aplicación continua que no se anula en $\partial\Omega$.
Se define el *grado* de f con respecto al abierto Ω, como el *único* número entero $\deg(f, \Omega)$ que satisface

1. No trivialidad: si $0 \in \Omega$, entonces $\deg(id, \Omega) = 1$,
2. existencia: si $\deg(f, \Omega) \neq 0$, entonces $f^{-1}(0) \cap \Omega \neq \varnothing$,
3. aditividad: si Ω_1 y Ω_2 son dos subconjuntos abiertos disjuntos de Ω y no hay ceros de f en $\Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$, entonces $\deg(f, \Omega) = \deg(f, \Omega_1) + \deg(f, \Omega_2)$,
4. invariancia homotópica: si $F : \overline{\Omega} \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ es una aplicación continua tal que $F(x, t) \neq 0$ para todo $(x, t) \in \partial\Omega \times [0, 1]$, entonces

$$\deg(F(\cdot, 0), \Omega) = \deg(F(\cdot, 1), \Omega).$$

Definición

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto *abierto acotado* y $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ una aplicación continua que no se anula en $\partial\Omega$.
Se define el *grado* de f con respecto al abierto Ω, como el *único* número entero $\deg(f, \Omega)$ que satisface

1. No trivialidad: si $0 \in \Omega$, entonces $\deg(id, \Omega) = 1$,
2. existencia: si $\deg(f, \Omega) \neq 0$, entonces $f^{-1}(0) \cap \Omega \neq \varnothing$,
3. aditividad: si Ω_1 y Ω_2 son dos subconjuntos abiertos disjuntos de Ω y no hay ceros de f en $\Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$, entonces $\deg(f, \Omega) = \deg(f, \Omega_1) + \deg(f, \Omega_2)$,
4. invariancia homotópica: si $F : \overline{\Omega} \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ es una aplicación continua tal que $F(x, t) \neq 0$ para todo $(x, t) \in \partial\Omega \times [0, 1]$, entonces
$$\deg(F(\cdot, 0), \Omega) = \deg(F(\cdot, 1), \Omega).$$

Grado topológico e índice de Conley

Theorem

Sean $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo de vectores y φ el flujo inducido por v. Si K es una compacto invariante aislado y N un entorno aislante para K, entonces

$$\deg(v, \operatorname{int}(N)) = (-1)^n \chi(h(K)).$$

Aplicación

Theorem

Sean $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo de vectores y φ el flujo inducido por v. Si K es un atractor global para φ, entonces existe al menos un punto fijo $p \in K$.

Se puede probar que $\chi(h(K)) = \chi(\mathbb{R}^n) = 1$ en virtud de que K es un atractor global y entonces, si N es un entorno aislante de K

$$\deg(v, \mathrm{int}(N)) = (-1)^n \neq 0,$$

y por tanto, en virtud de la propiedad 2 antes vista, v tiene al menos un cero en N que tiene que estar en K puesto que es aislado.

Aplicación

Theorem

Sean $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo de vectores y φ el flujo inducido por v. Si K es un atractor global para φ, entonces existe al menos un punto fijo $p \in K$.

Se puede probar que $\chi(h(K)) = \chi(\mathbb{R}^n) = 1$ en virtud de que K es un atractor global y entonces, si N es un entorno aislante de K

$$\deg(v, \mathrm{int}(N)) = (-1)^n \neq 0,$$

y por tanto, en virtud de la propiedad 2 antes vista, v tiene al menos un cero en N que tiene que estar en K puesto que es aislado.

Aplicación

Theorem

Sean $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo de vectores y φ el flujo inducido por v. Si K es un atractor global para φ, entonces existe al menos un punto fijo $p \in K$.

Se puede probar que $\chi(h(K)) = \chi(\mathbb{R}^n) = 1$ en virtud de que K es un atractor global y entonces, si N es un entorno aislante de K

$$\deg(v, \mathrm{int}(N)) = (-1)^n \neq 0,$$

y por tanto, en virtud de la propiedad 2 antes vista, v tiene al menos un cero en N que tiene que estar en K puesto que es aislado.

Gracias por vuestra atención!!