Desigualdades de tipo Littlewood-Paley para una derivada fraccionaria inducida por un peso radial

Elena de la Rosa

Departamento de Análisis Matemático...
Universidad de Málaga

Trabajo con José Ángel Peláez

XX Encuentros de Análisis Real y Complejo
Cartagena, España.
28 de Mayo 2022

Notación

- $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Notación

- $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.
- $\mathscr{H}(\mathbb{D}) = \{g : g$ es analítica en $\mathbb{D}\}$.

Notación

- $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.
- $\mathscr{H}(\mathbb{D}) = \{g : g$ es analítica en $\mathbb{D}\}$.
- Para $0 < p < \infty$, H^p es el espacio clásico de Hardy

$$||f||_{H^p} = \sup_{0 \le r < 1} M_p(r,f) = \sup_{0 \le r < 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p \, dt \right)^{1/p} < \infty, \quad f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$$

Notación

- $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.
- $\mathscr{H}(\mathbb{D}) = \{g : g$ es analítica en $\mathbb{D}\}$.
- Para $0 < p < \infty$, H^p es el espacio clásico de Hardy

$$||f||_{H^p} = \sup_{0 \le r < 1} M_p(r, f) = \sup_{0 \le r < 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p \, dt \right)^{1/p} < \infty, \quad f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$$

$$H^\infty = \{f \in \mathscr{H}(\mathbb{D}) \text{ y acotada } \}$$

Notación

- $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.
- $\mathcal{H}(\mathbb{D}) = \{g : g$ es analítica en $\mathbb{D}\}$.
- Para $0 < p < \infty$, H^p es el espacio clásico de Hardy

$$||f||_{H^p} = \sup_{0 \le r < 1} M_p(r, f) = \sup_{0 \le r < 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p \, dt \right)^{1/p} < \infty, \quad f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$$

$$H^\infty = \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) \text{ y acotada } \}$$

- Para una función integrable $\omega : [0, 1) \to [0, \infty)$, la extensión a $\mathbb{D}$ definida por $\omega(z) = \omega(|z|)$, $z \in \mathbb{D}$, se llama peso radial.

Notación

- $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.
- $\mathcal{H}(\mathbb{D}) = \{g : g$ es analítica en $\mathbb{D}\}$.
- Para $0 < p < \infty$, H^p es el espacio clásico de Hardy

$$||f||_{H^p} = \sup_{0 \le r < 1} M_p(r,f) = \sup_{0 \le r < 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p \, dt \right)^{1/p} < \infty, \quad f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$$

$$H^\infty = \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) \text{ y acotada } \}$$

- Para una función integrable $\omega : [0,1) \to [0,\infty)$, la extensión a $\mathbb{D}$ definida por $\omega(z) = \omega(|z|)$, $z \in \mathbb{D}$, se llama peso radial.
- Para $0 < p < \infty$ y un peso radial ω, L^p_ω es el espacio de las funciones medibles f tales que

$$\|f\|^p_{L^p_\omega} = \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \omega(z) \, dA(z) < \infty, \quad dA(z) = \frac{dx\,dy}{\pi}$$

Notación

- $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.
- $\mathcal{H}(\mathbb{D}) = \{g : g$ es analítica en $\mathbb{D}\}$.
- Para $0 < p < \infty$, H^p es el espacio clásico de Hardy

$$||f||_{H^p} = \sup_{0 \le r < 1} M_p(r,f) = \sup_{0 \le r < 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p \, dt \right)^{1/p} < \infty, \quad f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$$

$$H^\infty = \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) \text{ y acotada } \}$$

- Para una función integrable $\omega : [0,1) \to [0,\infty)$, la extensión a $\mathbb{D}$ definida por $\omega(z) = \omega(|z|)$, $z \in \mathbb{D}$, se llama peso radial.
- Para $0 < p < \infty$ y un peso radial ω, L^p_ω es el espacio de las funciones medibles f tales que

$$\|f\|^p_{L^p_\omega} = \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \omega(z) \, dA(z) < \infty, \quad dA(z) = \frac{dx\,dy}{\pi}$$

- El **espacio de Bergman** con peso $A^p_\omega = \mathcal{H}(\mathbb{D}) \cap L^p_\omega$.

Notación

- $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.
- $\mathcal{H}(\mathbb{D}) = \{g : g$ es analítica en $\mathbb{D}\}$.
- Para $0 < p < \infty$, H^p es el espacio clásico de Hardy

$$||f||_{H^p} = \sup_{0\le r<1} M_p(r,f) = \sup_{0\le r<1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{it})|^p\,dt\right)^{1/p} < \infty, \quad f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$$

$$H^\infty = \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) \text{ y acotada }\}$$

- Para una función integrable $\omega : [0,1) \to [0,\infty)$, la extensión a $\mathbb{D}$ definida por $\omega(z) = \omega(|z|)$, $z \in \mathbb{D}$, se llama peso radial.
- Para $0 < p < \infty$ y un peso radial ω, L^p_ω es el espacio de las funciones medibles f tales que

$$\|f\|^p_{L^p_\omega} = \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \omega(z)\,dA(z) < \infty, \quad dA(z) = \frac{dx\,dy}{\pi}$$

- El **espacio de Bergman** con peso $A^p_\omega = \mathcal{H}(\mathbb{D}) \cap L^p_\omega$.
- $\widehat{\omega}(r) = \int_r^1 \omega(s)\,ds$. Suponemos que $\widehat{\omega}(r) > 0$, $r \in (0,1)$, ya que en otro caso $A^p_\omega = \mathcal{H}(\mathbb{D})$.

Notación

- $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.
- $\mathcal{H}(\mathbb{D}) = \{g : g$ es analítica en $\mathbb{D}\}$.
- Para $0 < p < \infty$, H^p es el espacio clásico de Hardy

$$||f||_{H^p} = \sup_{0\le r<1} M_p(r,f) = \sup_{0\le r<1} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p\, dt\right)^{1/p} < \infty, \quad f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$$

$$H^\infty = \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) \text{ y acotada }\}$$

- Para una función integrable $\omega : [0,1) \to [0,\infty)$, la extensión a $\mathbb{D}$ definida por $\omega(z) = \omega(|z|)$, $z \in \mathbb{D}$, se llama peso radial.
- Para $0 < p < \infty$ y un peso radial ω, L^p_ω es el espacio de las funciones medibles f tales que

$$\|f\|^p_{L^p_\omega} = \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \omega(z)\, dA(z) < \infty, \quad dA(z) = \frac{dx\, dy}{\pi}$$

- El **espacio de Bergman** con peso $A^p_\omega = \mathcal{H}(\mathbb{D}) \cap L^p_\omega$.
- $\widehat{\omega}(r) = \int_r^1 \omega(s)\, ds$. Suponemos que $\widehat{\omega}(r) > 0$, $r \in (0,1)$, ya que en otro caso $A^p_\omega = \mathcal{H}(\mathbb{D})$.
- Para $x \ge 0$, $\omega_x = \int_0^1 r^x \omega(r) dr$.

Fórmula de Littlewood-Paley

Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $0 < p < \infty$

$$\|f\|_{A^p_\omega}^p \asymp \int_{\mathbb{D}} |f^{(n)}(z)|^p (1-|z|)^{np} \omega(z)\, dA(z) + \sum_{j=0}^{n-1} |f^{(j)}(0)|^p, \quad f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}), \tag{1}$$

si ω es un **peso estándar**, $\omega(z) = (\alpha+1)(1-|z|^2)^\alpha$ para algún $-1 < \alpha < \infty$.

Fórmula de Littlewood-Paley

Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $0 < p < \infty$

$$\|f\|_{A^p_\omega}^p \asymp \int_{\mathbb{D}} |f^{(n)}(z)|^p (1-|z|)^{np} \omega(z)\, dA(z) + \sum_{j=0}^{n-1} |f^{(j)}(0)|^p, \quad f \in \mathscr{H}(\mathbb{D}), \qquad (1)$$

si ω es un **peso estándar**, $\omega(z) = (\alpha+1)(1-|z|^2)^\alpha$ para algún $-1 < \alpha < \infty$.
Juega un papel fundamental en los siguientes problemas:

Fórmula de Littlewood-Paley

Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $0 < p < \infty$

$$\|f\|_{A^p_\omega}^p \asymp \int_{\mathbb{D}} |f^{(n)}(z)|^p (1-|z|)^{np} \omega(z)\, dA(z) + \sum_{j=0}^{n-1} |f^{(j)}(0)|^p, \quad f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}), \tag{1}$$

si ω es un **peso estándar**, $\omega(z) = (\alpha+1)(1-|z|^2)^\alpha$ para algún $-1 < \alpha < \infty$.
Juega un papel fundamental en los siguientes problemas:

- Acotación de la proyección de Bergman.

Fórmula de Littlewood-Paley

Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $0 < p < \infty$

$$\|f\|_{A^p_\omega}^p \asymp \int_{\mathbb{D}} |f^{(n)}(z)|^p (1-|z|)^{np} \omega(z)\, dA(z) + \sum_{j=0}^{n-1} |f^{(j)}(0)|^p, \quad f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}), \tag{1}$$

si ω es un **peso estándar**, $\omega(z) = (\alpha+1)(1-|z|^2)^\alpha$ para algún $-1 < \alpha < \infty$.
Juega un papel fundamental en los siguientes problemas:

- Acotación de la proyección de Bergman.
- Acotación de ciertos operadores integrales, por ejemplo

$$T_g(f)(z) = \int_0^z f(\zeta) g'(\zeta) d\zeta$$

Fórmula de Littlewood-Paley

Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $0 < p < \infty$

$$\|f\|_{A^p_\omega}^p \asymp \int_{\mathbb{D}} |f^{(n)}(z)|^p (1-|z|)^{np} \omega(z)\, dA(z) + \sum_{j=0}^{n-1} |f^{(j)}(0)|^p, \quad f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}), \qquad (1)$$

si ω es un **peso estándar**, $\omega(z) = (\alpha+1)(1-|z|^2)^\alpha$ para algún $-1 < \alpha < \infty$.
Juega un papel fundamental en los siguientes problemas:

- Acotación de la proyección de Bergman.
- Acotación de ciertos operadores integrales, por ejemplo

$$T_g(f)(z) = \int_0^z f(\zeta) g'(\zeta) d\zeta$$

- Estimación de la norma para determinadas funciones.

Fórmula de Littlewood-Paley

Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $0 < p < \infty$

$$\|f\|_{A^p_\omega}^p \asymp \int_{\mathbb{D}} |f^{(n)}(z)|^p (1-|z|)^{np} \omega(z)\, dA(z) + \sum_{j=0}^{n-1} |f^{(j)}(0)|^p, \quad f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}), \qquad (1)$$

si ω es un **peso estándar**, $\omega(z) = (\alpha+1)(1-|z|^2)^\alpha$ para algún $-1 < \alpha < \infty$.
Juega un papel fundamental en los siguientes problemas:

- Acotación de la proyección de Bergman.
- Acotación de ciertos operadores integrales, por ejemplo

$$T_g(f)(z) = \int_0^z f(\zeta) g'(\zeta) d\zeta$$

- Estimación de la norma para determinadas funciones.

Problema

¿Cuáles son los pesos radiales ω tales que se satisface (1)?

Fórmula de Littlewood-Paley

1. $\omega \in \widehat{\mathcal{D}}$ si existe $C = C(\omega) > 0$ tal que $\widehat{\omega}(r) \leq C\widehat{\omega}\left(\frac{1+r}{2}\right)$, $0 \leq r < 1$.

Fórmula de Littlewood-Paley

1. $\omega \in \widehat{\mathcal{D}}$ si existe $C = C(\omega) > 0$ tal que $\widehat{\omega}(r) \leq C\widehat{\omega}\left(\frac{1+r}{2}\right)$, $0 \leq r < 1$.
2. $\omega \in \widetilde{\mathcal{D}}$ si existen constantes $k = k(\omega) > 1$ y $C = C(\omega) > 0$ tales que $C\widehat{\omega}(r) \leq \int_r^{1-\frac{1-r}{k}} \omega(s)ds$, $0 \leq r < 1$.

Fórmula de Littlewood-Paley

1. $\omega \in \widehat{\mathscr{D}}$ si existe $C = C(\omega) > 0$ tal que $\widehat{\omega}(r) \leq C\widehat{\omega}\left(\frac{1+r}{2}\right)$, $0 \leq r < 1$.
2. $\omega \in \widetilde{\mathscr{D}}$ si existen constantes $k = k(\omega) > 1$ y $C = C(\omega) > 0$ tales que $C\widehat{\omega}(r) \leq \int_r^{1-\frac{1-r}{k}} \omega(s)ds$, $0 \leq r < 1$.

Teorema Peláez-Rättya (2021)

$$\int_{\mathbb{D}} |f^{(n)}(z)|^p (1-|z|)^{np} \omega(z)\, dA(z) + \sum_{j=0}^{n-1} |f^{(j)}(0)|^p \leq C\|f\|_{A^p_\omega}^p, \; f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$$

si y solo si $\omega \in \widehat{\mathscr{D}}$.

Fórmula de Littlewood-Paley

1. $\omega \in \widehat{\mathcal{D}}$ si existe $C = C(\omega) > 0$ tal que $\widehat{\omega}(r) \leq C\widehat{\omega}\left(\frac{1+r}{2}\right)$, $0 \leq r < 1$.
2. $\omega \in \widetilde{\mathcal{D}}$ si existen constantes $k = k(\omega) > 1$ y $C = C(\omega) > 0$ tales que $C\widehat{\omega}(r) \leq \int_r^{1-\frac{1-r}{k}} \omega(s)ds$, $0 \leq r < 1$.

Teorema Peláez-Rättya (2021)

$$\int_{\mathbb{D}} |f^{(n)}(z)|^p (1-|z|)^{np} \omega(z)\, dA(z) + \sum_{j=0}^{n-1} |f^{(j)}(0)|^p \leq C \|f\|_{A^p_\omega}^p, \; f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$$

si y solo si $\omega \in \widehat{\mathcal{D}}$.

Teorema Peláez-Rättya (2021)

$$\|f\|_{A^p_\omega}^p \asymp \int_{\mathbb{D}} |f^{(n)}(z)|^p (1-|z|)^{np} \omega(z)\, dA(z) + \sum_{j=0}^{n-1} |f^{(j)}(0)|^p, \; f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$$

si y solo si $\omega \in \mathcal{D} = \widehat{\mathcal{D}} \cap \widetilde{\mathcal{D}}$.

Desigualdades Littlewood-Paley para derivadas fraccionarias

La derivada fraccionaria de Hardy-Littlewood de orden $\beta > 0$: Para $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ y $\beta > 0$,

$$D^{\beta}(f)(z) = \frac{2}{\Gamma(\beta+1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+1)} \widehat{f}(n) z^n, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Desigualdades Littlewood-Paley para derivadas fraccionarias

La derivada fraccionaria de Hardy-Littlewood de orden $\beta > 0$: Para $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$ y $\beta > 0$,

$$D^{\beta}(f)(z) = \frac{2}{\Gamma(\beta+1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+1)} \widehat{f}(n) z^n, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Resultado conocido (que generaliza la desigualdad de L-P clásica)

$$\|f\|_{A^p_\omega}^p \asymp \int_{\mathbb{D}} |D^{\beta}(f)(z)|^p (1-|z|)^{\beta p} \omega(z)\, dA(z), \quad f \in \mathscr{H}(\mathbb{D}), \tag{2}$$

para cualquier $\beta, p > 0$ y cualquier **peso estándar** $\omega(z) = (\alpha+1)(1-|z|^2)^{\alpha}$, $\alpha > -1$.

Desigualdades Littlewood-Paley para derivadas fraccionarias

La derivada fraccionaria de Hardy-Littlewood de orden $\beta > 0$: Para $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ y $\beta > 0$,

$$D^{\beta}(f)(z) = \frac{2}{\Gamma(\beta+1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+1)} \widehat{f}(n) z^n, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Resultado conocido (que generaliza la desigualdad de L-P clásica)

$$\|f\|_{A^p_\omega}^p \asymp \int_{\mathbb{D}} |D^{\beta}(f)(z)|^p (1-|z|)^{\beta p} \omega(z)\, dA(z), \quad f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}), \tag{2}$$

para cualquier $\beta, p > 0$ y cualquier **peso estándar** $\omega(z) = (\alpha+1)(1-|z|^2)^{\alpha}$, $\alpha > -1$.

Problema

¿Cuáles son los pesos radiales ω tales que se verifica (2)?

Desigualdades Littlewood-Paley para derivadas fraccionarias

La derivada fraccionaria de Hardy-Littlewood de orden $\beta > 0$: Para $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ y $\beta > 0$,

$$D^{\beta}(f)(z) = \frac{2}{\Gamma(\beta+1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+1)} \widehat{f}(n) z^n, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Resultado conocido (que generaliza la desigualdad de L-P clásica)

$$\|f\|_{A^p_\omega}^p \asymp \int_{\mathbb{D}} |D^{\beta}(f)(z)|^p (1-|z|)^{\beta p} \omega(z)\, dA(z), \quad f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}), \tag{2}$$

para cualquier $\beta, p > 0$ y cualquier **peso estándar** $\omega(z) = (\alpha+1)(1-|z|^2)^{\alpha}$, $\alpha > -1$.

Problema

¿Cuáles son los pesos radiales ω tales que se verifica (2)?

Para $\mu \in \mathcal{D}$ definimos la **derivada fraccionaria de** f **inducida por** μ

$$D^{\mu}(f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\widehat{f}(n)}{\mu_{2n+1}} z^n, \; z \in \mathbb{D}.$$

Si $\mu(z) = \beta(1-|z|^2)^{\beta-1}$, entonces $\mu_{2n+1} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{2}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\beta+1)}$, por tanto

Si $\mu(z) = \beta(1-|z|^2)^{\beta-1}$, entonces $\mu_{2n+1} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{2} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\beta+1)}$, por tanto

$$D^{\beta}(f)(z) = \frac{2}{\Gamma(\beta+1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+1)} \widehat{f}(n) z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\widehat{f}(n)}{\mu_{2n+1}} z^n, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Si $\mu(z)=\beta(1-|z|^2)^{\beta-1}$, entonces $\mu_{2n+1}=\frac{\Gamma(\beta+1)}{2}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\beta+1)}$, por tanto

$$D^{\beta}(f)(z)=\frac{2}{\Gamma(\beta+1)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+1)}\widehat{f}(n)z^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\widehat{f}(n)}{\mu_{2n+1}}z^n,\quad z\in\mathbb{D}.$$

Además $\widehat{\mu}(z)\asymp(1-|z|^2)^{\beta}$,

$$\|f\|_{A^p_\omega}^p\asymp\int_{\mathbb{D}}|D^{\mu}(f)(z)|^p\widehat{\mu}(z)^p\omega(z)\,dA(z),\quad f\in\mathcal{H}(\mathbb{D}),\tag{3}$$

para cualquier $\beta,p>0$ y cualesquiera **pesos estándar** ω y μ.

Si $\mu(z)=\beta(1-|z|^2)^{\beta-1}$, entonces $\mu_{2n+1}=\frac{\Gamma(\beta+1)}{2}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\beta+1)}$, por tanto

$$D^{\beta}(f)(z)=\frac{2}{\Gamma(\beta+1)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+1)}\widehat{f}(n)z^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\widehat{f}(n)}{\mu_{2n+1}}z^n,\quad z\in\mathbb{D}.$$

Además $\widehat{\mu}(z)\asymp(1-|z|^2)^{\beta}$,

$$\|f\|_{A^p_\omega}^p\asymp\int_{\mathbb{D}}|D^{\mu}(f)(z)|^p\widehat{\mu}(z)^p\omega(z)\,dA(z),\quad f\in\mathcal{H}(\mathbb{D}),\tag{3}$$

para cualquier $\beta,p>0$ y cualesquiera **pesos estándar** ω y μ.

Problema

Sea $\mu\in\mathcal{D}$. Describir los pesos radiales ω tales que

$$\|f\|_{A^p_\omega}^p\asymp\int_{\mathbb{D}}|D^{\mu}(f)(z)|^p\widehat{\mu}(z)^p\omega(z)\,dA(z),\quad f\in\mathcal{H}(\mathbb{D}).$$

Teorema (Peláez-delaRosa)

Sea ω un peso radial, $0<p<\infty$ y $\mu\in\mathscr{D}$. Entonces existe $C=C(\omega,\mu,p)>0$ tal que

$$\int_{\mathbb{D}}|D^{\mu}(f)(z)|^p\widehat{\mu}(z)^p\omega(z)\,dA(z)\le C\|f\|_{A^p_\omega}^p,\quad f\in\mathscr{H}(\mathbb{D}).$$

si y solo si $\omega\in\widehat{\mathscr{D}}$.

Teorema (Peláez-delaRosa)

Sea ω un peso radial, $0<p<\infty$ y $\mu\in\mathcal{D}$. Entonces existe $C=C(\omega,\mu,p)>0$ tal que

$$\int_{\mathbb{D}} |D^{\mu}(f)(z)|^p \widehat{\mu}(z)^p \omega(z)\,dA(z) \le C\|f\|_{A^p_\omega}^p, \quad f\in\mathcal{H}(\mathbb{D}).$$

si y solo si $\omega\in\widehat{\mathcal{D}}$.

Puntos y herramientas clave de la prueba:

1. (Peláez-delaRosa). Sea $0<p<\infty$ y $\mu\in\mathcal{D}$. Entonces existe $C>0$ tal que

$$M_p(r,D^{\mu}(f)) \le C\frac{M_p(\rho,f)}{\widehat{\mu}\left(\frac{r}{\rho}\right)}, \quad 0\le r<\rho<1, \quad f\in\mathcal{H}(\mathbb{D}).$$

Teorema (Peláez-delaRosa)

Sea ω un peso radial, $0<p<\infty$ y $\mu \in \mathscr{D}$. Entonces existe $C=C(\omega,\mu,p)>0$ tal que

$$\int_{\mathbb{D}} |D^{\mu}(f)(z)|^p \widehat{\mu}(z)^p \omega(z)\, dA(z) \leq C \|f\|_{A^p_\omega}^p, \quad f \in \mathscr{H}(\mathbb{D}).$$

si y solo si $\omega \in \widehat{\mathscr{D}}$.

Puntos y herramientas clave de la prueba:

1. (Peláez-delaRosa). Sea $0<p<\infty$ y $\mu \in \mathscr{D}$. Entonces existe $C>0$ tal que

$$M_p(r, D^{\mu}(f)) \leq C \frac{M_p(\rho, f)}{\widehat{\mu}\left(\frac{r}{\rho}\right)}, \quad 0 \leq r < \rho < 1, \quad f \in \mathscr{H}(\mathbb{D}).$$

2. Bases universales de polinomios de Cesaro.

Suficiencia: Supongamos $\mu \in \mathscr{D}$ y $\omega \in \widehat{\mathscr{D}}$.

Suficiencia: Supongamos $\mu \in \mathscr{D}$ y $\omega \in \widehat{\mathscr{D}}$.

$$M_p(r, D^\mu(f)) \le C \frac{M_p(\rho, f)}{\widehat{\mu}\left(\frac{r}{\rho}\right)}, \quad 0 \le r < \rho < 1, \quad f \in \mathscr{H}(\mathbb{D}).$$

Suficiencia: Supongamos $\mu \in \mathcal{D}$ y $\omega \in \widehat{\mathcal{D}}$.

$$M_p(r, D^\mu(f)) \le C \frac{M_p(\rho, f)}{\widehat{\mu}\left(\frac{r}{\rho}\right)}, \quad 0 \le r < \rho < 1, \quad f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}).$$

$$\begin{aligned}
\|D^\mu f\|^p_{A^p_{\widehat{\mu}^p \omega}} &= \int_{\mathbb{D}} |D^\mu(f)(z)|^p \widehat{\mu}(z)^p \omega(z)\, dA(z) \le C \int_{\frac{1}{2}}^1 M_p^p(\sqrt{r}, f) \frac{\widehat{\mu}(r)^p}{\widehat{\mu}(\sqrt{r})^p} \omega(r)\, dr \\
&\le C \int_{\frac{1}{2}}^1 M_p^p(\sqrt{r}, f) \omega(r)\, dr = 2C \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 r M_p^p(r, f) \omega(r^2) dr \\
&= C M_p^p\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, f\right) \widehat{\omega}\left(\frac{1}{2}\right) + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \left[\frac{d}{dr} M_p^p(r, f)\right] \widehat{\omega}(r^2)\, dr \\
&\le C M_p^p\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, f\right) \widehat{\omega}\left(\frac{1}{2}\right) + C(\omega) \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \left[\frac{d}{dr} M_p^p(r, f)\right] \widehat{\omega}(r)\, dr, \\
&\le C M_p^p\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, f\right) \widehat{\omega}\left(\frac{1}{2}\right) + C \int_{\frac{1}{2}}^1 r M_p^p(r, f) \omega(r) dr \le C \|f\|^p_{A^p_\omega},
\end{aligned}$$

Necesidad: Consideramos como funciones test $f(z) = z^n$,

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{|z|^{np}}{\mu_{2n+1}^p} \widehat{\mu}(z)^p \omega(z)\, dA(z) \leq C^p \int_{\mathbb{D}} |z|^{np} \omega(z)\, dA(z),\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

lo que implica $\omega \in \widehat{\mathscr{D}}$.

Bases universales de polinomios de Cesaro.

El producto de Hadamard de un polinomio $W(z) = \sum_{k\in J} b_k z^k$, donde J es un subconjunto finito de $\mathbb{N}$ y $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$ es

$$(W * f)(z) = \sum_{k\in J} a_k b_k z^k, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Bases universales de polinomios de Cesaro.

El producto de Hadamard de un polinomio $W(z) = \sum_{k\in J} b_k z^k$, donde J es un subconjunto finito de $\mathbb{N}$ y $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$ es

$$(W * f)(z) = \sum_{k\in J} a_k b_k z^k, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Sea $\Delta_n(z) = \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}} z^n$, $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$. Entonces

Bases universales de polinomios de Cesaro.

El producto de Hadamard de un polinomio $W(z)=\sum_{k\in J} b_k z^k$, donde J es un subconjunto finito de $\mathbb{N}$ y $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$ es

$$(W*f)(z)=\sum_{k\in J} a_k b_k z^k, \quad z\in\mathbb{D}.$$

Sea $\Delta_n(z)=\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}} z^n$, $f\in\mathscr{H}(\mathbb{D})$. Entonces

1.
$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_k z^k = f(0)+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k z^k = f(0)+\sum_{n=0}^{\infty}(f*\Delta_n)(z).$$

Bases universales de polinomios de Cesaro.

El producto de Hadamard de un polinomio $W(z) = \sum_{k \in J} b_k z^k$, donde J es un subconjunto finito de $\mathbb{N}$ y $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$ es

$$(W * f)(z) = \sum_{k \in J} a_k b_k z^k, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Sea $\Delta_n(z) = \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}} z^n$, $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$. Entonces

1. $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_k z^k = f(0) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k z^k = f(0) + \sum_{n=0}^{\infty} (f * \Delta_n)(z).$$

2. $$\|f * \Delta_n\|_{H^p} \leq C \|f\|_{H^p}, \quad p > 1,\, n \in \mathbb{N}$$

Bases universales de polinomios de Cesaro.

Proposición

Sea $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ y $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de C^∞ tal que $\Psi \equiv 1$ en $(-\infty, 1]$, $\Psi \equiv 0$ en $[k, \infty)$ y Ψ es decreciente y positiva en $(1, k)$. Sea $\psi(t) = \Psi\left(\frac{t}{k}\right) - \Psi(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Sea $V_{0,k}(z) = \sum_{j=0}^{k-1} \Psi(j) z^j$ y

$$V_{n,k}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi\left(\frac{j}{k^{n-1}}\right) z^j = \sum_{j=k^{n-1}}^{k^{n+1}-1} \psi\left(\frac{j}{k^{n-1}}\right) z^j, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Entonces,

Bases universales de polinomios de Cesaro.

Proposición

Sea $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ y $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de C^∞ tal que $\Psi \equiv 1$ en $(-\infty, 1]$, $\Psi \equiv 0$ en $[k, \infty)$ y Ψ es decreciente y positiva en $(1, k)$. Sea $\psi(t) = \Psi\left(\frac{t}{k}\right) - \Psi(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Sea $V_{0,k}(z) = \sum_{j=0}^{k-1} \Psi(j) z^j$ y

$$V_{n,k}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi\left(\frac{j}{k^{n-1}}\right) z^j = \sum_{j=k^{n-1}}^{k^{n+1}-1} \psi\left(\frac{j}{k^{n-1}}\right) z^j, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Entonces,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (V_{n,k} * f)(z), \quad z \in \mathbb{D}, \quad f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}),$$

Bases universales de polinomios de Cesaro.

Proposición

Sea $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ y $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de C^∞ tal que $\Psi \equiv 1$ en $(-\infty, 1]$, $\Psi \equiv 0$ en $[k, \infty)$ y Ψ es decreciente y positiva en $(1, k)$. Sea $\psi(t) = \Psi\left(\frac{t}{k}\right) - \Psi(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Sea $V_{0,k}(z) = \sum_{j=0}^{k-1} \Psi(j) z^j$ y

$$V_{n,k}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi\left(\frac{j}{k^{n-1}}\right) z^j = \sum_{j=k^{n-1}}^{k^{n+1}-1} \psi\left(\frac{j}{k^{n-1}}\right) z^j, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Entonces,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (V_{n,k} * f)(z), \quad z \in \mathbb{D}, \quad f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}),$$

y para cada $0 < p < \infty$ existe una constante $C = C(p, \Psi, k) > 0$ tal que

$$\| V_{n,k} * f \|_{H^p} \leq C \| f \|_{H^p}, \quad f \in H^p, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Bases universales de polinomios de Cesaro.

Proposición

Sea $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ y $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de C^∞ tal que $\Psi \equiv 1$ en $(-\infty, 1]$, $\Psi \equiv 0$ en $[k, \infty)$ y Ψ es decreciente y positiva en $(1, k)$. Sea $\psi(t) = \Psi\left(\frac{t}{k}\right) - \Psi(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Sea $V_{0,k}(z) = \sum_{j=0}^{k-1} \Psi(j) z^j$ y

$$V_{n,k}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi\left(\frac{j}{k^{n-1}}\right) z^j = \sum_{j=k^{n-1}}^{k^{n+1}-1} \psi\left(\frac{j}{k^{n-1}}\right) z^j, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Entonces,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (V_{n,k} * f)(z), \quad z \in \mathbb{D}, \quad f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}),$$

y para cada $0 < p < \infty$ existe una constante $C = C(p, \Psi, k) > 0$ tal que

$$\| V_{n,k} * f \|_{H^p} \le C \| f \|_{H^p}, \quad f \in H^p, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$M_p(r, D^\mu(f)) \le C \frac{M_p(\rho, f)}{\widehat{\mu}\left(\frac{r}{\rho}\right)}, \quad 0 \le r < \rho < 1, \quad f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}).$$

Teorema (Peláez-delaRosa)

Sea ω un peso radial, $0<p<\infty$ and $\mu\in\mathcal{D}$. Entonces

$$\|f\|_{A^p_\omega}^p \asymp \int_{\mathbb{D}} |D^\mu(f)(z)|^p \widehat{\mu}(z)^p \omega(z)\,dA(z), \quad f\in\mathcal{H}(\mathbb{D}),$$

si y solo si $\omega\in\mathcal{D}$.

Teorema (Peláez-delaRosa)

Sea ω un peso radial, $0<p<\infty$ and $\mu\in\mathcal{D}$. Entonces

$$\|f\|_{A^p_\omega}^p \asymp \int_{\mathbb{D}} |D^\mu(f)(z)|^p \widehat{\mu}(z)^p \omega(z)\,dA(z), \quad f\in\mathcal{H}(\mathbb{D}),$$

si y solo si $\omega\in\mathcal{D}$.

Suficiencia: Supongamos $\mu\in\mathcal{D}$ y $\omega\in\mathcal{D}$.

1. **Teorema de descomposición de la norma (Peláez-delaRosa)** Sean $0<p<\infty$, $\eta\in\mathcal{D}$ y $k=k(\eta)>1$, $k\in\mathbb{N}$ tales que $C\widehat{\eta}\left(1-\frac{1-r}{k}\right)\le\int_r^{1-\frac{1-r}{k}}\eta(s)ds$. Entonces

$$\|f\|_{A^p_\eta}^p \asymp \sum_{n=0}^{\infty} \eta_{k^n} \|V_{n,k}*f\|_{H^p}^p \quad f\in\mathcal{H}(\mathbb{D}),$$

donde $\{V_{n,k}\}$ es una base universal de polinomios de Cesaro.

Teorema (Peláez-delaRosa)

Sea ω un peso radial, $0<p<\infty$ and $\mu\in\mathcal{D}$. Entonces

$$\|f\|_{A^p_\omega}^p \asymp \int_{\mathbb{D}} |D^\mu(f)(z)|^p \widehat{\mu}(z)^p \omega(z)\,dA(z), \quad f\in\mathcal{H}(\mathbb{D}),$$

si y solo si $\omega\in\mathcal{D}$.

Suficiencia: Supongamos $\mu\in\mathcal{D}$ y $\omega\in\mathcal{D}$.

1. **Teorema de descomposición de la norma (Peláez-delaRosa)** Sean $0<p<\infty$, $\eta\in\mathcal{D}$ y $k=k(\eta)>1$, $k\in\mathbb{N}$ tales que $C\widehat{\eta}\left(1-\frac{1-r}{k}\right)\le\int_r^{1-\frac{1-r}{k}}\eta(s)ds$. Entonces
$$\|f\|_{A^p_\eta}^p \asymp \sum_{n=0}^{\infty} \eta_{k^n} \|V_{n,k}*f\|_{H^p}^p \quad f\in\mathcal{H}(\mathbb{D}),$$
donde $\{V_{n,k}\}$ es una base universal de polinomios de Cesaro.
2. Si $\omega\in\widetilde{\mathcal{D}}$ entonces $\omega\widehat{\mu}^p\in\widetilde{\mathcal{D}}$. Es más, si existen $k=k(\omega)>1$ y $C_1>0$ tales que $C_1\int_{1-\frac{1-r}{k}}^1\omega(s)\,ds\le\int_r^{1-\frac{1-r}{k}}\omega(s)ds$, $0\le r<1$ entonces existe $C_2(\omega,\mu)>0$ $C_2\int_{1-\frac{1-r}{k}}^1\omega(s)\widehat{\mu}^p(s)\,ds\le\int_r^{1-\frac{1-r}{k}}\omega(s)\widehat{\mu}^p(s)\,ds$, $0\le r<1$.

Teorema (Peláez-delaRosa)

Sea ω un peso radial, $0<p<\infty$ and $\mu\in\mathcal{D}$. Entonces

$$\|f\|_{A^p_\omega}^p \asymp \int_{\mathbb{D}} |D^\mu(f)(z)|^p \widehat{\mu}(z)^p \omega(z)\,dA(z), \quad f\in\mathcal{H}(\mathbb{D}),$$

si y solo si $\omega\in\mathcal{D}$.

Suficiencia: Supongamos $\mu\in\mathcal{D}$ y $\omega\in\mathcal{D}$.

1. **Teorema de descomposición de la norma (Peláez-delaRosa)** Sean $0<p<\infty$, $\eta\in\mathcal{D}$ y $k=k(\eta)>1$, $k\in\mathbb{N}$ tales que $C\widehat{\eta}\left(1-\frac{1-r}{k}\right)\le\int_r^{1-\frac{1-r}{k}}\eta(s)ds$. Entonces
$$\|f\|_{A^p_\eta}^p \asymp \sum_{n=0}^{\infty} \eta_{k^n}\|V_{n,k}*f\|_{H^p}^p \quad f\in\mathcal{H}(\mathbb{D}),$$
donde $\{V_{n,k}\}$ es una base universal de polinomios de Cesaro.
2. Si $\omega\in\widetilde{\mathcal{D}}$ entonces $\omega\widehat{\mu}^p\in\widetilde{\mathcal{D}}$. Es más, si existen $k=k(\omega)>1$ y $C_1>0$ tales que $C_1\int_{1-\frac{1-r}{k}}^1\omega(s)\,ds\le\int_r^{1-\frac{1-r}{k}}\omega(s)ds$, $0\le r<1$ entonces existe $C_2(\omega,\mu)>0$ $C_2\int_{1-\frac{1-r}{k}}^1\omega(s)\widehat{\mu}^p(s)\,ds\le\int_r^{1-\frac{1-r}{k}}\omega(s)\widehat{\mu}^p(s)\,ds$, $0\le r<1$.
3. Si $\omega\in\mathcal{D}$, $\mu\in\widehat{\mathcal{D}}$ y $0<p<\infty$, entonces $\omega\widehat{\mu}^p\in\mathcal{D}$.

4

$$\|f\|^p_{A^p_\omega} \asymp \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{k^n} \|V_{n,k} * f\|^p_{H^p},$$

$$\|D^\mu f\|^p_{A^p_{\omega\widehat{\mu}^p}} \asymp \sum_{n=0}^{\infty} (\omega\widehat{\mu}^p)_{k^n} \|V_{n,k} * D^\mu f\|^p_{H^p}$$

4.

$$\|f\|_{A^p_\omega}^p \asymp \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{k^n} \|V_{n,k} * f\|_{H^p}^p,$$

$$\|D^\mu f\|_{A^p_{\omega\widehat{\mu}^p}}^p \asymp \sum_{n=0}^{\infty} (\omega\widehat{\mu}^p)_{k^n} \|V_{n,k} * D^\mu f\|_{H^p}^p$$

5. Usando algunas caracterizaciones de las clases de pesos

$$\omega_{k^n} \mu_{k^{n-1}}^p \lesssim (\omega\widehat{\mu}^p)_{k^n}$$

4. $$\|f\|^p_{A^p_\omega} \asymp \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{k^n} \|V_{n,k} * f\|^p_{H^p},$$

$$\|D^\mu f\|^p_{A^p_{\omega\widehat{\mu}^p}} \asymp \sum_{n=0}^{\infty} (\omega\widehat{\mu}^p)_{k^n} \|V_{n,k} * D^\mu f\|^p_{H^p}$$

5. Usando algunas caracterizaciones de las clases de pesos

$$\omega_{k^n}\mu^p_{k^{n-1}} \lesssim (\omega\widehat{\mu}^p)_{k^n}$$

6. $$\begin{aligned}
\|f\|^p_{A^p_\omega} &\le C(\omega,p)\sum_{n=0}^{\infty}\omega_{k^n}\|V_{n,k} * f\|^p_{H^p} = C(\omega,p)\sum_{n=0}^{\infty}\omega_{k^n}\left\|\sum_{j=k^{n-1}}^{k^{n+1}+1}\widehat{f}(j)\widehat{V_{n,k}}(j)z^j\right\|^p_{H^p} \\
&= C(\omega,p)\left[\sum_{n=1}^{\infty}\omega_{k^n}\left\|\sum_{j=k^{n-1}}^{k^{n+1}+1}\widehat{f}(j)\widehat{V_{n,k}}(j)\frac{\mu_{2j+1}}{\mu_{2j+1}}z^j\right\|^p_{H^p} + \omega_1\mu_0^p\|V_{0,k} * D^\mu(f)\|^p_{H^p}\right] \\
&\le C(\omega,\mu,p)\left[\omega_1\mu_0^p\|V_{0,k} * D^\mu(f)\|^p_{H^p} + \sum_{n=1}^{\infty}\omega_{k^n}\mu^p_{k^{n-1}}\|V_{n,k} * D^\mu(f)\|^p_{H^p}\right] \\
&\le C(\omega,\mu,p)\sum_{n=0}^{\infty}(\omega\widehat{\mu}^p)_{k^n}\|V_{n,k} * D^\mu(f)\|^p_{H^p} \le C(\omega,\mu,p)\|D^\mu(f)\|^p_{A^p_{\omega\widehat{\mu}^p}}.
\end{aligned}$$

Necesidad: Consideramos como funciones test $f(z) = z^n$,

$$C_1^p \int_{\mathbb{D}} \frac{|z|^{np}}{\mu_{2n+1}^p} \widehat{\mu}(z)^p \omega(z)\, dA(z) \leq \int_{\mathbb{D}} |z|^{np} \omega(z)\, dA(z) \leq C_2^p \int_{\mathbb{D}} \frac{|z|^{np}}{\mu_{2n+1}^p} \widehat{\mu}(z)^p \omega(z)\, dA(z)$$

Esta equivalencia implica $\omega \in \mathcal{D}$.

Corolario

Sea $\mu \in \mathscr{D}$, $0 < p < \infty$ y ω un peso radial. Son equivalentes:

(i)
$$\int_{\mathbb{D}} |D^{\mu}(f)(z)|^p \widehat{\mu}(z)^p \omega(z)\, dA(z) \leq C \|f\|_{A^p_\omega}, \quad f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$$

(ii)
$$\int_{\mathbb{D}} |D^{\mu}(f)(z)|^p \widehat{\mu}(z)^p \omega(z)\, dA(z) \leq C \|f\|_{A^p_\omega}, \quad f(z) = z^n, n \in \mathbb{N}$$

(iii) $\omega \in \widehat{\mathscr{D}}$.

Corolario

Sea $\mu \in \mathscr{D}$, $0 < p < \infty$ y ω un peso radial. Son equivalentes:

(i)
$$\int_{\mathbb{D}} |D^{\mu}(f)(z)|^p \widehat{\mu}(z)^p \omega(z)\, dA(z) \leq C \|f\|_{A^p_\omega}, \quad f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$$

(ii)
$$\int_{\mathbb{D}} |D^{\mu}(f)(z)|^p \widehat{\mu}(z)^p \omega(z)\, dA(z) \leq C \|f\|_{A^p_\omega}, \quad f(z) = z^n, n \in \mathbb{N}$$

(iii) $\omega \in \widehat{\mathscr{D}}$.

Corolario

Sea $\mu \in \mathscr{D}$, $0 < p < \infty$ y ω un peso radial. Son equivalentes:

(i)
$$\int_{\mathbb{D}} |D^{\mu}(f)(z)|^p \widehat{\mu}(z)^p \omega(z)\, dA(z) \asymp \|f\|_{A^p_\omega}, \quad f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$$

(ii)
$$\int_{\mathbb{D}} |D^{\mu}(f)(z)|^p \widehat{\mu}(z)^p \omega(z)\, dA(z) \asymp \|f\|_{A^p_\omega}, \quad f(z) = z^n, n \in \mathbb{N}$$

(iii) $\omega \in \mathscr{D}$.

Formulación de teoremas previos y problemas abiertos

Teorema (Peláez-Rättya)

Si $\omega \in \widetilde{\mathcal{D}}$, $\|f\|_{A^p_\omega}^p \leq C \int_{\mathbb{D}} |f^{(n)}(z)|^p (1-|z|)^{np} \omega(z)\, dA(z) + \sum_{j=0}^{n-1} |f^{(j)}(0)|^p$, $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$.

Formulación de teoremas previos y problemas abiertos

Teorema (Peláez-Rättya)

Si $\omega \in \widetilde{\mathscr{D}}$, $\|f\|_{A^p_\omega}^p \leq C \int_{\mathbb{D}} |f^{(n)}(z)|^p (1-|z|)^{np} \omega(z)\, dA(z) + \sum_{j=0}^{n-1} |f^{(j)}(0)|^p$, $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$.

Teorema (Peláez-Rättya)

Si $\|f\|_{A^p_\omega}^p \leq C \int_{\mathbb{D}} |f^{(n)}(z)|^p (1-|z|)^{np} \omega(z)\, dA(z) + \sum_{j=0}^{n-1} |f^{(j)}(0)|^p$, $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$, entonces existe $C = C(\omega) > 1$ y $K = K(\omega) > 1$ tales que $\omega_x \geq C\omega_{Kx}$ para todo $x \geq 1$.

Formulación de teoremas previos y problemas abiertos

Teorema (Peláez-Rättya)

Si $\omega \in \widetilde{\mathscr{D}}$, $\|f\|_{A^p_\omega}^p \leq C \int_{\mathbb{D}} |f^{(n)}(z)|^p (1-|z|)^{np} \omega(z)\, dA(z) + \sum_{j=0}^{n-1} |f^{(j)}(0)|^p$, $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$.

Teorema (Peláez-Rättya)

Si $\|f\|_{A^p_\omega}^p \leq C \int_{\mathbb{D}} |f^{(n)}(z)|^p (1-|z|)^{np} \omega(z)\, dA(z) + \sum_{j=0}^{n-1} |f^{(j)}(0)|^p$, $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$, entonces existe $C = C(\omega) > 1$ y $K = K(\omega) > 1$ tales que $\omega_x \geq C\omega_{Kx}$ para todo $x \geq 1$. Si ω satisface esta condición, $\omega \in \mathscr{M}$.

Formulación de teoremas previos y problemas abiertos

Teorema (Peláez-Rättya)

Si $\omega \in \widetilde{\mathcal{D}}$, $\|f\|_{A^p_\omega}^p \le C \int_{\mathbb{D}} |f^{(n)}(z)|^p (1-|z|)^{np} \omega(z)\, dA(z) + \sum_{j=0}^{n-1} |f^{(j)}(0)|^p$, $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$.

Teorema (Peláez-Rättya)

Si $\|f\|_{A^p_\omega}^p \le C \int_{\mathbb{D}} |f^{(n)}(z)|^p (1-|z|)^{np} \omega(z)\, dA(z) + \sum_{j=0}^{n-1} |f^{(j)}(0)|^p$, $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, entonces existe $C = C(\omega) > 1$ y $K = K(\omega) > 1$ tales que $\omega_x \ge C\omega_{Kx}$ para todo $x \ge 1$. Si ω satisface esta condición, $\omega \in \mathcal{M}$.

$\widetilde{\mathcal{D}} \subsetneq \mathcal{M}$ [Proposición 14, Peláez- Rättya(2021)]

Formulación de teoremas previos y problemas abiertos

Teorema (Peláez-Rättya)

Si $\omega \in \widetilde{\mathcal{D}}$, $\|f\|_{A^p_\omega}^p \le C \int_{\mathbb{D}} |f^{(n)}(z)|^p (1-|z|)^{np}\omega(z)\,dA(z) + \sum_{j=0}^{n-1} |f^{(j)}(0)|^p$, $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$.

Teorema (Peláez-Rättya)

Si $\|f\|_{A^p_\omega}^p \le C \int_{\mathbb{D}} |f^{(n)}(z)|^p (1-|z|)^{np}\omega(z)\,dA(z) + \sum_{j=0}^{n-1} |f^{(j)}(0)|^p$, $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, entonces existe $C = C(\omega) > 1$ y $K = K(\omega) > 1$ tales que $\omega_x \ge C\omega_{Kx}$ para todo $x \ge 1$. Si ω satisface esta condición, $\omega \in \mathcal{M}$.

$\widetilde{\mathcal{D}} \subsetneq \mathcal{M}$ [Proposición 14, Peláez- Rättya(2021)]

Conjetura

$$\|f\|_{A^p_\omega}^p \lesssim \int_{\mathbb{D}} |f^{(n)}(z)|^p (1-|z|)^{np}\omega(z)\,dA(z) + \sum_{j=0}^{n-1} |f^{(j)}(0)|^p, \; f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$$

si y solo si $\omega \in \mathcal{M}$.

Conjetura

Sea $\mu \in \mathscr{D}$. Entonces

$$\|f\|_{A^p_\omega}^p \lesssim \int_{\mathbb{D}} |D^\mu(f)(z)|^p \widehat{\mu}(z)^p \omega(z)\, dA(z), \quad f \in \mathscr{H}(\mathbb{D}),$$

si y solo si $\omega \in \widetilde{\mathscr{D}}$ ó $\omega \in \mathscr{M}$.

¡Gracias!