Funciones uniformemente convexas y teorema de Enflo

G. Grelier

XX Encuentros de Análisis Real y Complejo
26 de mayo de 2022

Resumen

Notaciones

- X es un espacio de Banach real.
- B_X es su bola unitaria.
- S_X es su esfera unitaria.

1. Espacios super-reflexivos
   - Definiciones
   - Renormamiento uniformemente convexo

2. Funciones uniformemente convexas
   - Definición
   - Propriedades
   - Construcción de funciones ε-uniformemente convexas

3. Teorema de Enflo

4. Conjuntos SWC

Sea X un espacio topológico, I un conjunto y $\mathcal{F} \subset 2^I$ un filtro. Decimos que $(x_i)_{i \in I}$ **tiende a** x **según** $\mathcal{F}$ si para toda vecindad V de x

$$\{i \in I \mid x_i \in V\} \in \mathcal{F}.$$

En este caso, escribiremos $\lim_{\mathcal{F}} x_i = x$.

Sea X un espacio topológico, I un conjunto y $\mathcal{F} \subset 2^I$ un filtro. Decimos que $(x_i)_{i \in I}$ **tiende a** x **según** $\mathcal{F}$ si para toda vecindad V de x

$$\{i \in I \mid x_i \in V\} \in \mathcal{F}.$$

En este caso, escribiremos $\lim_{\mathcal{F}} x_i = x$.

1. Si X es compacto, este límite existe.
2. Si X es T2, la límite es único.

Ultraproducto

Sea $\mathcal{F}$ un ultrafiltro sobre un conjunto I. Se define

$$\ell_\infty(I,X) = \left\{ (x_i)_{i\in I} \mid \sup_{i\in I} \|x_i\| < \infty \right\}$$

$$\mathcal{N}_\mathcal{F} = \left\{ (x_i)_{i\in I} \in \ell_\infty(I,X) \mid \lim_{\mathcal{F}} \|x_i\| = 0 \right\}.$$

El espacio cuociente ${}^{\ell_\infty(I,X)}/_{\mathcal{N}_\mathcal{F}}$ se llama ultraproducto de X con respeto a $\mathcal{F}$. La norme viene dada por $\|(x_i)_\mathcal{F}\| = \lim_\mathcal{F} \|x_i\|$.

Representabilidad finita

Definición

Un espacio de Banach Y se dice **finitamente representable** en X si para todo subespacio de dimensión finita E de Y y para todo $\varepsilon > 0$, existe un sub-espacio F de X tal que $d(E, F) \leq 1 + \varepsilon$.

Proposición

Son equivalentes:

- *Y es finitamente representable en X*
- *Y es isométrico a un subespacio de un ultraproducto de X*

Super-reflexividad

Definición

X se dice super-reflexivo si todo Banach finitamente representable en X es reflexivo.

Proposición

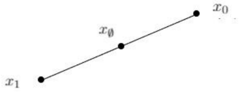
Son equivalentes:

- *X es super-reflexivo*
- *Todo ultraproducto de X es reflexivo*

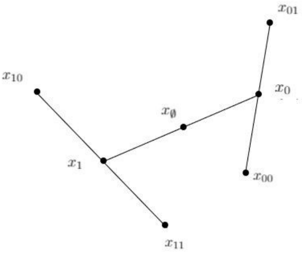
Arboles díadicos

Arboles díadicos

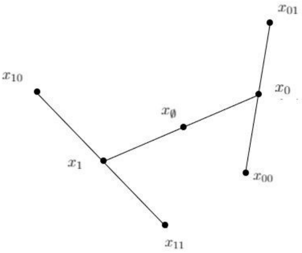
Arboles díadicos



Arboles díadicos



Arboles díadicos



Decimos que un árbol díadico es ε-**separado** si los segmentos qui intervienen en la construcción tienen largo superior a ε.

Super-reflexividad y árboles díadicos

1. En un espace reflexivo (o con la RNP), no existen árboles díadicos ε-separados infinitos acotados.

Super-reflexividad y árboles díadicos

1. En un espace reflexivo (o con la RNP), no existen árboles díadicos ε-separados infinitos acotados.
2. Si B_X contiene árboles díadicos ε-separados de tamaño arbitrariamente grande, entonces existe un Banach Y finitamente representable en X tal que B_Y contiene un árbol díadico ε-separado infinito. En particular, Y no es reflexivo y X no es super-reflexivo.

Super-reflexividad y árboles díadicos

1. En un espace reflexivo (o con la RNP), no existen árboles díadicos ε-separados infinitos acotados.
2. Si B_X contiene árboles díadicos ε-separados de tamaño arbitrariamente grande, entonces existe un Banach Y finitamente representable en X tal que B_Y contiene un árbol díadico ε-separado infinito. En particular, Y no es reflexivo y X no es super-reflexivo.
3. Si X no es reflexivo, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que B_X contiene árboles díadicos ε-separados de tamaño arbitrariamente grande.

Super-reflexividad y árboles díadicos

Proposición

Son equivalentes:

- X *no es super-reflexivo*
- *Para todo* $\varepsilon > 0$, B_X *no contiene árboles díadicos* ε*-separados de tamaño arbitrariamente grande.*

En particular, X es super-reflexivo $\iff$ X tiene la super-RNP.

Norma uniformemente convexa

Définition

El modulo de convexidad de una norma $\|.\|$ sobre X es la función $\delta_X : [0, 2) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\delta_X(\varepsilon) = \text{ínf}\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \mid x, y \in S_X \text{ tel que } \|x-y\| \geq \varepsilon\right\}.$$

La norma se dice **uniformemente convexa** si $\delta_X(\varepsilon) > 0$ para todo $\varepsilon \in [0, 2)$.

Teorema de Enflo

Teorema

Son equivalentes:

- X *es super-reflexivo*
- X *admite una norma equivalente uniformemente convexa.*

Corolario

Son equivalentes:

- X *es super-reflexivo*
- $L^2(X)$ *es super-reflexivo*

Definición

Sea $C \subset X$ un conjunto convexo.

Definición

Una función $f : C \to \overline{\mathbb{R}}$ se dice ε-**uniformemente convexa** si existe $\delta > 0$ tal que

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} - \delta$$

para todo $x, y \in C$ tal que $\|x-y\| \geq \varepsilon$.
Si f es ε-uniformemente convexa para todo $\varepsilon > 0$, se dice que f es **uniformemente convexa**.

Una función ε-uniformemente convexa puede no ser convexa!

Coercividad

Teorema

Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función ε-uniformemente convexa acotada inferioremente.
Entonces f es coerciva. Más precisamente, se tiene

$$\liminf_{\|x\|\to\infty} \frac{f(x)}{\|x\|^2} > 0.$$

Estabilidad

Se dice que $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es ε^+-uniformemente convexa si f es ε'-uniformemente convexa para todo $\varepsilon' > \varepsilon$.

Teorema

La envoltura convexa cerrada de una función ε-uniformemente convexa es ε^+-uniformemente convexa.

Continuidad

Proposición

Sea $f : C \to \overline{\mathbb{R}}$ una función ε-uniformemente convexa acotada. Entonces existe una función $g : C \to \overline{\mathbb{R}}$ Lipschitz y ε'-uniformemente convexa para todo $\varepsilon' > \varepsilon$.

Continuidad

Proposición

Sea $f : C \to \overline{\mathbb{R}}$ una función ε-uniformemente convexa acotada. Entonces existe una función $g : C \to \overline{\mathbb{R}}$ Lipschitz y ε'-uniformemente convexa para todo $\varepsilon' > \varepsilon$.

Se puede definir $g(x) = \text{ínf}\{f(y) + \alpha\|x - y\| \ : \ y \in C\}$ para un α adecuado.

Funciones uniformemente casi-convexas

Definición

Una función $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ se dice ε-**uniformemente casi-convexa** si existe $\delta > 0$ tal que

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \max\{f(x), f(y)\} - \delta$$

para todo $x, y \in X$ tales que $\|x - y\| \geq \varepsilon$.

Funciones uniformemente casi-convexas

Definición

Una función $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ se dice ε-**uniformemente casi-convexa** si existe $\delta > 0$ tal que

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \max\{f(x), f(y)\} - \delta$$

para todo $x, y \in X$ tales que $\|x - y\| \geq \varepsilon$.

Proposición

Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función ε-uniformemente casi-convexa con separación δ.
Entonces $3^{\frac{f}{\delta}}$ es ε-uniformemente convexa.

Estrategia

Sea X un espacio de Banach super-reflexivo.

Objetivo: Construir una función uniformemente convexa.

Estrategia

Sea X un espacio de Banach super-reflexivo.

Objetivo: Construir una función uniformemente convexa.

Construir una función convexa y ε-uniformemente convexa para todo $\varepsilon > 0$

Estrategia

Sea X un espacio de Banach super-reflexivo.

Objetivo: Construir una función uniformemente convexa.

Construir una función convexa y ε-uniformemente convexa para todo $\varepsilon > 0$

Construir una función ε-uniformemente convexa para todo $\varepsilon > 0$

Estrategia

Sea X un espacio de Banach super-reflexivo.

Objetivo: Construir una función uniformemente convexa.

Construir una función convexa y ε-uniformemente convexa para todo $\varepsilon > 0$

Construir una función ε-uniformemente convexa para todo $\varepsilon > 0$

Construir una función ε-uniformemente casi-convexas para todo $\varepsilon > 0$

Construcción de una función ε-uniformemente casi-convexa

Sea $\varepsilon > 0$. B_X no contiene árboles díadicos ε-separados de tamaño arbitrariamente grande.

Construcción de una función ε-uniformemente casi-convexa

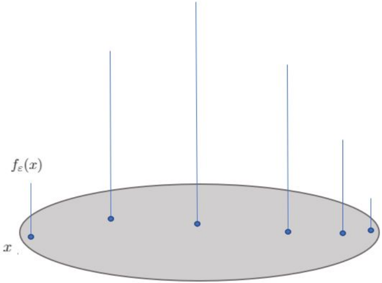
Sea $\varepsilon > 0$. B_X no contiene árboles díadicos ε-separados de tamaño arbitrariamente grande.

Si $x \in B_X$, definimos $f_\varepsilon(x)$ como el máximo tamaño de un árbol díadico ε-separado con raíz x e incluido en B_X.

Construcción de una función ε-uniformemente casi-convexa

Sea $\varepsilon > 0$. B_X no contiene árboles díadicos ε-separados de tamaño arbitrariamente grande.

Si $x \in B_X$, definimos $f_\varepsilon(x)$ como el máximo tamaño de un árbol díadico ε-separado con raíz x e incluido en B_X.



Construcción de una función ε-uniformemente casi-convexa

Se tiene que que si $\|x-y\| \geq \varepsilon$ entonces

$$f_\varepsilon\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \min\{f_\varepsilon(x), f_\varepsilon(y)\} + 1,$$

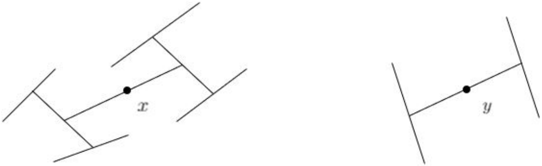
i.e. $h_\varepsilon = -f_\varepsilon$ es ε-uniformemente casi-convexa.

Construcción de una función ε-uniformemente casi-convexa

Se tiene que que si $\|x-y\| \geq \varepsilon$ entonces

$$f_\varepsilon\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \min\{f_\varepsilon(x), f_\varepsilon(y)\} + 1,$$

i.e. $h_\varepsilon = -f_\varepsilon$ es ε-uniformemente casi-convexa.

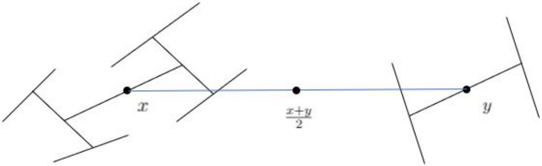


Construcción de una función ε-uniformemente casi-convexa

Se tiene que que si $\|x - y\| \geq \varepsilon$ entonces

$$f_\varepsilon\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \min\{f_\varepsilon(x), f_\varepsilon(y)\} + 1,$$

i.e. $h_\varepsilon = -f_\varepsilon$ es ε-uniformemente casi-convexa.

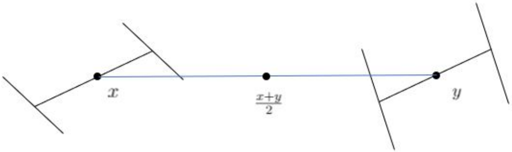


Construcción de una función ε-uniformemente casi-convexa

Se tiene que que si $\|x-y\| \geq \varepsilon$ entonces

$$f_\varepsilon\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \min\{f_\varepsilon(x), f_\varepsilon(y)\} + 1,$$

i.e. $h_\varepsilon = -f_\varepsilon$ es ε-uniformemente casi-convexa.



Construcción de la norma uniformemente convexa

Sea $f : B_X \to B_X$ una función Lipschitz uniformemente convexa simétrica acotada.

Construcción de la norma uniformemente convexa

Sea $f : B_X \to B_X$ una función Lipschitz uniformemente convexa simétrica acotada.

La función $F(x) = \|x\| + f(x)$ es uniformemente convexa.

Construcción de la norma uniformemente convexa

Sea $f : B_X \to B_X$ una función Lipschitz uniformemente convexa simétrica acotada.

La función $F(x) = \|x\| + f(x)$ es uniformemente convexa.

Se comprueba entonces que

$$B = \left\{ x \in X \mid F(x) \leq \text{ínf}\, F + \frac{1}{2} \right\}$$

es la bola unitaria de una norma equivalente uniformemente convexa.

Definición

¿Cuales conjuntos admiten una función uniformemente convexa?

Definición

¿Cuales conjuntos admiten una función uniformemente convexa?

Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro libre en $\mathbb{N}$. Si $A \subset X$ es un conjunto acotado, definimos su **ultrapotencia** por

$$A_{\mathcal{U}} = \{(x_n)_{\mathcal{U}} \mid x_n \in A \text{ para todo } n\}$$

Definición

¿Cuales conjuntos admiten una función uniformemente convexa?

Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro libre en $\mathbb{N}$. Si $A \subset X$ es un conjunto acotado, definimos su **ultrapotencia** por

$$A_{\mathcal{U}} = \{(x_n)_{\mathcal{U}} \mid x_n \in A \text{ para todo } n\}$$

Definición

Un conjunto acotado débilmente cerrado $A \subset X$ se dice **super weakly compact** (SWC) si $A_{\mathcal{U}}$ es relativamente débilmente compacto.

X es super-reflexivo $\iff$ B_X es SWC.

Teorema de James

Teorema

Sea C un subconjunto de un Banach X. Son equivalentes:

(i) *C no es relativamente débilmente compacto*

(ii) *existen $\theta > 0$ y una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C$ tales que $d(co\{x_j\}_{j\leq k}, co\{x_j\}_{j>k}) \geq \theta$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Caracterización SWC

Teorema

Sea C un subconjunto convexo cerrado acotado de un Banach X. Son equivalentes:

(i) *C no es SWC*

(ii) $\exists\theta > 0\ \forall n \geq 1\ \exists x_1, ..., x_n \in C$ *tal que* $\forall k \in \{1, ..., n-1\}\ d(co\{x_j\}_{j\leq k}, co\{x_j\}_{j>k}) \geq \theta$

(iii) *existe $\varepsilon > 0$ tal que C contiene árboles díadicos ε-separados de tamaño arbitrariamente grande.*

Caracterización SWC

Teorema

Sea C un subconjunto convexo cerrado acotado de un Banach X. Son equivalentes:

(i) *C no es SWC*

(ii) $\exists \theta > 0\ \forall n \geq 1\ \exists x_1, \ldots, x_n \in C$ *tal que* $\forall k \in \{1, \ldots, n-1\}\ d(co\{x_j\}_{j \leq k}, co\{x_j\}_{j > k}) \geq \theta$

(iii) *existe $\varepsilon > 0$ tal que C contiene árboles díadicos ε-separados de tamaño arbitrariamente grande.*

Se deduce entonces que **conjunto convexo cerrado SWC admite una función uniformemente convexa acotada.**

Dentabilidad finita

Sean C un subconjunto convexo cerrado acotado de un Banach X, $\varepsilon > 0$. Se define una derivación por

$$[C]'_\varepsilon = \{x \in C \ : \ \text{diam}(S) > \varepsilon \text{ para toda slice } S \text{ de } C \text{ conteniendo } x\}$$

Dentabilidad finita

Sean C un subconjunto convexo cerrado acotado de un Banach X, $\varepsilon > 0$. Se define una derivación por

$$[C]'_\varepsilon = \{x \in C \ : \ \mathrm{diam}(S) > \varepsilon \text{ para toda slice } S \text{ de } C \text{ conteniendo } x\}$$

Por inducción, se define entonces $[C]^n_\varepsilon = [[C]^{n-1}_\varepsilon]'_\varepsilon$ para todo $n \geq 1$.

Dentabilidad finita

Sean C un subconjunto convexo cerrado acotado de un Banach X, $\varepsilon > 0$. Se define una derivación por

$$[C]'_\varepsilon = \{x \in C \ : \ \mathrm{diam}(S) > \varepsilon \text{ para toda slice } S \text{ de } C \text{ conteniendo } x\}$$

Por inducción, se define entonces $[C]^n_\varepsilon = [[C]^{n-1}_\varepsilon]'_\varepsilon$ para todo $n \geq 1$.
Se dice que C es **finitamente dentable** si para todo $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $[C]^n_\varepsilon = \emptyset$.

Dentabilidad finita

Teorema (Raja)

Sea C un subconjunto convexo cerrado acotado de un Banach X. Son equivalentes:

(i) *C es SWC*

(ii) *C es finitamente dentable.*

Dentabilidad finita

Teorema (Raja)

Sea C un subconjunto convexo cerrado acotado de un Banach X. Son equivalentes:

(i) *C es SWC*

(ii) *C es finitamente dentable.*

Se deduce entonces que

Teorema

Sea C un subconjunto convexo cerrado acotado de un Banach X. Son equivalentes:

(i) *C es SWC*

(ii) *existe una función $f : C \to \mathbb{R}$ uniformemente convexa acotada.*

Muchas propiedades de los SWC

Los conjuntos SWC tienen las siguientes propiedades:

Muchas propiedades de los SWC

Los conjuntos SWC tienen las siguientes propiedades:

1. uniformemente Eberlein (con la topología débil)

Muchas propiedades de los SWC

Los conjuntos SWC tienen las siguientes propiedades:

1. uniformemente Eberlein (con la topología débil)
2. super-Banach-Saks

Muchas propiedades de los SWC

Los conjuntos SWC tienen las siguientes propiedades:

1. uniformemente Eberlein (con la topología débil)
2. super-Banach-Saks
3. super-propiedad del punto fijo para aplicaciones afines

Muchas propiedades de los SWC

Los conjuntos SWC tienen las siguientes propiedades:

1. uniformemente Eberlein (con la topología débil)
2. super-Banach-Saks
3. super-propiedad del punto fijo para aplicaciones afines
4. propiedades ergódicas
5. ...

Muchas gracias!