Estimaciones cuantitativas con pesos matriciales

Israel P. Rivera Ríos
Universidad de Málaga

EARCO 2022 - Cartagena

Contenidos

Extensiones vectoriales

Objetivo

Queremos extender operadores escalares para que actúen sobre funciones $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$, así como estudiar una teoría de pesos adecuada a dichos operadores.

- Consideremos $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Dado un operador lineal T y $\vec{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ definimos

$$T\vec{f}(x) = \sum_{i=1}^{n} T(\langle \vec{f}, \vec{e}_i \rangle)\vec{e}_i.$$

- Recordamos que si A es una matriz autoadjunta, definida positiva, siempre podemos diagonalizarla, de manera que podemos encontrar una base ortonormal $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$ de autovectores y autovalores $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ con $\lambda_i > 0$ tales que

$$A = PDP^t,$$

donde $P = (\vec{e}_1 | \dots | \vec{e}_n)$ y $D = (\delta_{ij}\lambda_i)_{i,j=1,\dots,n}$.
Teniendo en cuenta esto, es posible definir un cálculo funcional de la siguiente forma. Dada una función inyectiva $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ definimos

$$\phi(A) = P\phi(D)P^t \qquad \phi(D) = (\delta_{ij}\phi(\lambda_i))_{i,j=1,\dots,n}$$

Estas matrices también son simétricas, definidas positivas y autoadjuntas. Se verifican las propiedades usuales de las potencias.

Extensiones vectoriales

Objetivo

Queremos extender operadores escalares para que actúen sobre funciones $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$, así como estudiar una teoría de pesos adecuada a dichos operadores.

- Consideremos $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Dado un operador lineal T y $\vec{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ definimos
$$T\vec{f}(x) = \sum_{i=1}^{n} T(\langle \vec{f}, \vec{e}_i \rangle)\vec{e}_i.$$
- Recordamos que si A es una matriz autoadjunta, definida positiva, siempre podemos diagonalizarla, de manera que podemos encontrar una base ortonormal $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$ de autovectores y autovalores $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ con $\lambda_i > 0$ tales que
$$A = PDP^t,$$
donde $P = (\vec{e}_1 | \dots | \vec{e}_n)$ y $D = (\delta_{ij}\lambda_i)_{i,j=1,\dots,n}$.
Teniendo en cuenta esto, es posible definir un cálculo funcional de la siguiente forma. Dada una función inyectiva $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ definimos
$$\phi(A) = P\phi(D)P^t \qquad \phi(D) = (\delta_{ij}\phi(\lambda_i))_{i,j=1,\dots,n}$$
Estas matrices también son simétricas, definidas positivas y autoadjuntas. Se verifican las propiedades usuales de las potencias.

Extensiones vectoriales

Objetivo

Queremos extender operadores escalares para que actúen sobre funciones $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$, así como estudiar una teoría de pesos adecuada a dichos operadores.

- Consideremos $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Dado un operador lineal T y $\vec{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ definimos
$$T\vec{f}(x) = \sum_{i=1}^n T(\langle \vec{f}, \vec{e}_i \rangle)\vec{e}_i.$$
- Recordamos que si A es una matriz autoadjunta, definida positiva, siempre podemos diagonalizarla, de manera que podemos encontrar una base ortonormal $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$ de autovectores y autovalores $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ con $\lambda_i > 0$ tales que
$$A = PDP^t,$$
donde $P = (\vec{e}_1 | \ldots | \vec{e}_n)$ y $D = (\delta_{ij}\lambda_i)_{i,j=1,\ldots,n}$.
Teniendo en cuenta esto, es posible definir un cálculo funcional de la siguiente forma. Dada una función inyectiva $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ definimos
$$\phi(A) = P\phi(D)P^t \qquad \phi(D) = (\delta_{ij}\phi(\lambda_i))_{i,j=1,\ldots,n}$$
Estas matrices también son simétricas, definidas positivas y autoadjuntas. Se verifican las propiedades usuales de las potencias.

Extensiones vectoriales

Objetivo

Queremos extender operadores escalares para que actúen sobre funciones $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$, así como estudiar una teoría de pesos adecuada a dichos operadores.

- Consideremos $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Dado un operador lineal T y $\vec{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ definimos
$$T\vec{f}(x) = \sum_{i=1}^n T(\langle \vec{f}, \vec{e}_i \rangle)\vec{e}_i.$$
- Recordamos que si A es una matriz autoadjunta, definida positiva, siempre podemos diagonalizarla, de manera que podemos encontrar una base ortonormal $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$ de autovectores y autovalores $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ con $\lambda_i > 0$ tales que
$$A = PDP^t,$$
donde $P = (\vec{e}_1 | \dots | \vec{e}_n)$ y $D = (\delta_{ij}\lambda_i)_{i,j=1,\dots n}$.
Teniendo en cuenta esto, es posible definir un cálculo funcional de la siguiente forma. Dada una función inyectiva $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ definimos
$$\phi(A) = P\phi(D)P^t \qquad \phi(D) = (\delta_{ij}\phi(\lambda_i))_{i,j=1,\dots n}$$
Estas matrices también son simétricas, definidas positivas y autoadjuntas. Se verifican las propiedades usuales de las potencias.

Pesos matriciales

Definición

Llamaremos peso matricial a toda funición matricial $W : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tal que $W(x)$ es una matriz autoadjunta, definida positiva a.e. $x \in \mathbb{R}^d$.

- Recordamos que en el caso escalar $f \in L^p(w)$ si

$$\|f\|_{L^p(w)} = \left(\int |f|^p w\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int |w^{\frac{1}{p}} f|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

- Si W es un peso matricial diremos que $f \in L^p(W)$ si

$$\|\vec{f}\|_{L^p(W)} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |W^{\frac{1}{p}}(x)\vec{f}(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Pesos matriciales

Definición

Llamaremos peso matricial a toda funición matricial $W : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tal que $W(x)$ es una matriz autoadjunta, definida positiva a.e. $x \in \mathbb{R}^d$.

- Recordamos que en el caso escalar $f \in L^p(w)$ si

$$\|f\|_{L^p(w)} = \left(\int |f|^p w\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int |w^{\frac{1}{p}} f|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

- Si W es un peso matricial diremos que $f \in L^p(W)$ si

$$\|\vec{f}\|_{L^p(W)} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |W^{\frac{1}{p}}(x)\vec{f}(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Pesos matriciales

Definición

Llamaremos peso matricial a toda funición matricial $W : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tal que $W(x)$ es una matriz autoadjunta, definida positiva a.e. $x \in \mathbb{R}^d$.

- Recordamos que en el caso escalar $f \in L^p(w)$ si

$$\|f\|_{L^p(w)} = \left(\int |f|^p w\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int |w^{\frac{1}{p}} f|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

- Si W es un peso matricial diremos que $f \in L^p(W)$ si

$$\|\vec{f}\|_{L^p(W)} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |W^{\frac{1}{p}}(x)\vec{f}(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Pesos A_p

- Recordamos que $w \in A_p$ $(1 < p < \infty)$ si

$$[w]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)dx \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(y)^{-\frac{p'}{p}} dy \right)^{\frac{p}{p'}} < \infty$$

$$\iff [w]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{\frac{p'}{p}} w(y)^{-\frac{p'}{p}} dy \right)^{\frac{p}{p'}} dx < \infty$$

$$\iff [w]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \left(w(x)^{\frac{1}{p}} w(y)^{-\frac{1}{p}} \right)^{p'} dy \right)^{\frac{p}{p'}} dx < \infty$$

lo que motiva definir

$$[W]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \left\| W^{\frac{1}{p}}(x) W^{-\frac{1}{p}}(y) \right\|_{\mathrm{op}}^{p'} dy \right)^{\frac{p}{p'}} dx < \infty$$

- En el caso $p = 1$, $w \in A_1$ si

$$[w]_{A_1} = \sup_Q \operatorname*{ess\,sup}_{z \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |w(y)| w^{-1}(z) dy < \infty$$

lo que nos lleva a definir

$$[W]_{A_1} = \sup_Q \operatorname*{ess\,sup}_{z \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q \|W(y) W^{-1}(z)\|_{\mathrm{op}} dy < \infty$$

- Esta forma de expresar los pesos que acabamos de ver se debe a Roudenko y Frazier.

Pesos A_p

- Recordamos que $w \in A_p$ $(1 < p < \infty)$ si

$$[w]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)dx \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(y)^{-\frac{p'}{p}} dy \right)^{\frac{p}{p'}} < \infty$$

$$\iff [w]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{\frac{p'}{p}} w(y)^{-\frac{p'}{p}} dy \right)^{\frac{p}{p'}} dx < \infty$$

$$\iff [w]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \left(w(x)^{\frac{1}{p}} w(y)^{-\frac{1}{p}} \right)^{p'} dy \right)^{\frac{p}{p'}} dx < \infty$$

lo que motiva definir

$$[W]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \left\| W^{\frac{1}{p}}(x) W^{-\frac{1}{p}}(y) \right\|_{\mathrm{op}}^{p'} dy \right)^{\frac{p}{p'}} dx < \infty$$

- En el caso $p = 1$, $w \in A_1$ si

$$[w]_{A_1} = \sup_Q \operatorname*{ess\,sup}_{z \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |w(y)| w^{-1}(z) dy < \infty$$

lo que nos lleva a definir

$$[W]_{A_1} = \sup_Q \operatorname*{ess\,sup}_{z \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q \| W(y) W^{-1}(z) \|_{\mathrm{op}} dy < \infty$$

- Esta forma de expresar los pesos que acabamos de ver se debe a Roudenko y Frazier.

Pesos A_p

- Recordamos que $w \in A_p$ $(1 < p < \infty)$ si

$$[w]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)dx \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(y)^{-\frac{p'}{p}} dy \right)^{\frac{p}{p'}} < \infty$$

$$\iff [w]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{\frac{p'}{p}} w(y)^{-\frac{p'}{p}} dy \right)^{\frac{p}{p'}} dx < \infty$$

$$\iff [w]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \left(w(x)^{\frac{1}{p}} w(y)^{-\frac{1}{p}} \right)^{p'} dy \right)^{\frac{p}{p'}} dx < \infty$$

lo que motiva definir

$$[W]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \left\| W^{\frac{1}{p}}(x) W^{-\frac{1}{p}}(y) \right\|_{\mathrm{op}}^{p'} dy \right)^{\frac{p}{p'}} dx < \infty$$

- En el caso $p = 1$, $w \in A_1$ si

$$[w]_{A_1} = \sup_Q \operatorname{ess\,sup}_{z \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |w(y)| w^{-1}(z) dy < \infty$$

lo que nos lleva a definir

$$[W]_{A_1} = \sup_Q \operatorname{ess\,sup}_{z \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q \| W(y) W^{-1}(z) \|_{\mathrm{op}} dy < \infty$$

- Esta forma de expresar los pesos que acabamos de ver se debe a Roudenko y Frazier.

Pesos A_p

- Recordamos que $w \in A_p$ $(1 < p < \infty)$ si

$$[w]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)dx \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(y)^{-\frac{p'}{p}} dy \right)^{\frac{p}{p'}} < \infty$$

$$\iff [w]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{\frac{p'}{p}} w(y)^{-\frac{p'}{p}} dy \right)^{\frac{p}{p'}} dx < \infty$$

$$\iff [w]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \left(w(x)^{\frac{1}{p}} w(y)^{-\frac{1}{p}} \right)^{p'} dy \right)^{\frac{p}{p'}} dx < \infty$$

  lo que motiva definir

$$[W]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \left\| W^{\frac{1}{p}}(x) W^{-\frac{1}{p}}(y) \right\|_{\mathrm{op}}^{p'} dy \right)^{\frac{p}{p'}} dx < \infty$$

- En el caso $p = 1$, $w \in A_1$ si

$$[w]_{A_1} = \sup_Q \operatorname*{ess\,sup}_{z \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |w(y)| w^{-1}(z) dy < \infty$$

  lo que nos lleva a definir

$$[W]_{A_1} = \sup_Q \operatorname*{ess\,sup}_{z \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q \|W(y) W^{-1}(z)\|_{\mathrm{op}} dy < \infty$$

- Esta forma de expresar los pesos que acabamos de ver se debe a Roudenko y Frazier.

Pesos A_p

- Recordamos que $w \in A_p$ $(1 < p < \infty)$ si

$$[w]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)dx \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(y)^{-\frac{p'}{p}} dy \right)^{\frac{p}{p'}} < \infty$$

$$\iff [w]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{\frac{p'}{p}} w(y)^{-\frac{p'}{p}} dy \right)^{\frac{p}{p'}} dx < \infty$$

$$\iff [w]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \left(w(x)^{\frac{1}{p}} w(y)^{-\frac{1}{p}} \right)^{p'} dy \right)^{\frac{p}{p'}} dx < \infty$$

lo que motiva definir

$$[W]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \left\| W^{\frac{1}{p}}(x) W^{-\frac{1}{p}}(y) \right\|_{\text{op}}^{p'} dy \right)^{\frac{p}{p'}} dx < \infty$$

- En el caso $p = 1$, $w \in A_1$ si

$$[w]_{A_1} = \sup_Q \operatorname{ess\,sup}_{z \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |w(y)| w^{-1}(z) dy < \infty$$

lo que nos lleva a definir

$$[W]_{A_1} = \sup_Q \operatorname{ess\,sup}_{z \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q \|W(y)W^{-1}(z)\|_{\text{op}} dy < \infty$$

- Esta forma de expresar los pesos que acabamos de ver se debe a Roudenko y Frazier.

Pesos A_p

- Recordamos que $w \in A_p$ $(1 < p < \infty)$ si

$$[w]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)dx \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(y)^{-\frac{p'}{p}} dy \right)^{\frac{p}{p'}} < \infty$$

$$\iff [w]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{\frac{p'}{p}} w(y)^{-\frac{p'}{p}} dy \right)^{\frac{p}{p'}} dx < \infty$$

$$\iff [w]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \left(w(x)^{\frac{1}{p}} w(y)^{-\frac{1}{p}} \right)^{p'} dy \right)^{\frac{p}{p'}} dx < \infty$$

lo que motiva definir

$$[W]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \left\| W^{\frac{1}{p}}(x) W^{-\frac{1}{p}}(y) \right\|_{\text{op}}^{p'} dy \right)^{\frac{p}{p'}} dx < \infty$$

- En el caso $p = 1$, $w \in A_1$ si

$$[w]_{A_1} = \sup_Q \operatorname*{ess\,sup}_{z \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |w(y)| w^{-1}(z) dy < \infty$$

lo que nos lleva a definir

$$[W]_{A_1} = \sup_Q \operatorname*{ess\,sup}_{z \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q \| W(y) W^{-1}(z) \|_{\text{op}} dy < \infty$$

- Esta forma de expresar los pesos que acabamos de ver se debe a Roudenko y Frazier.

Pesos A_p

- Recordamos que $w \in A_p$ $(1 < p < \infty)$ si

$$[w]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)dx \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(y)^{-\frac{p'}{p}} dy \right)^{\frac{p}{p'}} < \infty$$

$$\iff [w]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{\frac{p'}{p}} w(y)^{-\frac{p'}{p}} dy \right)^{\frac{p}{p'}} dx < \infty$$

$$\iff [w]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \left(w(x)^{\frac{1}{p}} w(y)^{-\frac{1}{p}} \right)^{p'} dy \right)^{\frac{p}{p'}} dx < \infty$$

lo que motiva definir

$$[W]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \left\| W^{\frac{1}{p}}(x) W^{-\frac{1}{p}}(y) \right\|_{\text{op}}^{p'} dy \right)^{\frac{p}{p'}} dx < \infty$$

- En el caso $p = 1$, $w \in A_1$ si

$$[w]_{A_1} = \sup_Q \operatorname*{ess\,sup}_{z \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |w(y)| w^{-1}(z) dy < \infty$$

lo que nos lleva a definir

$$[W]_{A_1} = \sup_Q \operatorname*{ess\,sup}_{z \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q \| W(y) W^{-1}(z) \|_{\text{op}} dy < \infty$$

- Esta forma de expresar los pesos que acabamos de ver se debe a Roudenko y Frazier.

Más propiedades útiles

Matrices reductoras

Dado un peso matricial W, definimos

$$|\mathscr{W}_{p,Q}\vec{e}| \simeq \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |W^{\frac{1}{p}}(x)\vec{e}|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \qquad p \geq 1$$

$$|\mathscr{W}'_{p,Q}\vec{e}| \simeq \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |W^{-\frac{1}{p}}(x)\vec{e}|^{p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}} \qquad p > 1$$

Usando las matrices reductoras:

$$[W]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \left\|W^{\frac{1}{p}}(x)W^{-\frac{1}{p}}(y)\right\|_{\text{op}}^{p'} dy\right)^{\frac{p}{p'}} dx \simeq \sup_Q \|\mathscr{W}_{p,Q}\mathscr{W}'_{p,Q}\|_{op}^p$$

$$[W]_{A_1} = \sup_Q \operatorname*{ess\,sup}_{z\in Q} \frac{1}{|Q|}\int_Q \|W(y)W^{-1}(z)\|_{\text{op}} dy \simeq \sup_Q \operatorname*{ess\,sup}_{z\in Q} \|\mathscr{W}_{1,Q}W^{-1}(z)\|_{\text{op}}.$$

Conexión con la teoría escalar

Si $W \in A_p$ entonces

$$\sup_{\vec{e}\neq 0} [|W^{\frac{1}{p}}(\cdot)\vec{e}|^p]_{A_p} \lesssim [W]_{A_p}$$

Más propiedades útiles

Matrices reductoras

Dado un peso matricial W, definimos

$$|\mathscr{W}_{p,Q}\vec{e}| \simeq \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |W^{\frac{1}{p}}(x)\vec{e}|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \qquad p \geq 1$$

$$|\mathscr{W}'_{p,Q}\vec{e}| \simeq \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |W^{-\frac{1}{p}}(x)\vec{e}|^{p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}} \qquad p > 1$$

Usando las matrices reductoras:

$$[W]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \left\|W^{\frac{1}{p}}(x)W^{-\frac{1}{p}}(y)\right\|_{\text{op}}^{p'} dy\right)^{\frac{p}{p'}} dx \simeq \sup_Q \|\mathscr{W}_{p,Q}\mathscr{W}'_{p,Q}\|_{op}^p$$

$$[W]_{A_1} = \sup_Q \operatorname*{ess\,sup}_{z\in Q} \frac{1}{|Q|}\int_Q \|W(y)W^{-1}(z)\|_{\text{op}} dy \simeq \sup_Q \operatorname*{ess\,sup}_{z\in Q} \|\mathscr{W}_{1,Q}W^{-1}(z)\|_{\text{op}}.$$

Conexión con la teoría escalar

Si $W \in A_p$ entonces

$$\sup_{\vec{e}\neq 0}[|W^{\frac{1}{p}}(\cdot)\vec{e}|^p]_{A_p} \lesssim [W]_{A_p}$$

Más propiedades útiles

Matrices reductoras

Dado un peso matricial W, definimos

$$|\mathscr{W}_{p,Q}\vec{e}| \simeq \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |W^{\frac{1}{p}}(x)\vec{e}|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \qquad p \geq 1$$

$$|\mathscr{W}'_{p,Q}\vec{e}| \simeq \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |W^{-\frac{1}{p}}(x)\vec{e}|^{p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}} \qquad p > 1$$

Usando las matrices reductoras:

$$[W]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \left\|W^{\frac{1}{p}}(x)W^{-\frac{1}{p}}(y)\right\|_{\text{op}}^{p'} dy\right)^{\frac{p}{p'}} dx \simeq \sup_Q \|\mathscr{W}_{p,Q}\mathscr{W}'_{p,Q}\|_{op}^p$$

$$[W]_{A_1} = \sup_Q \operatorname*{ess\,sup}_{z\in Q} \frac{1}{|Q|}\int_Q \|W(y)W^{-1}(z)\|_{\text{op}} dy \simeq \sup_Q \operatorname*{ess\,sup}_{z\in Q} \|\mathscr{W}_{1,Q}W^{-1}(z)\|_{\text{op}}.$$

Conexión con la teoría escalar

Si $W \in A_p$ entonces

$$\sup_{\vec{e}\neq 0}[|W^{\frac{1}{p}}(\cdot)\vec{e}|^p]_{A_p} \lesssim [W]_{A_p}$$

La maximal de Christ y Goldberg

Al no ser lineal la maximal, uno de los posibles caminos para estudiarla es considerar versiones con pesos.

Teorema

Sea $1 \leq p < \infty$

$$M_{W,p}\vec{f}(x) = \sup_{x\in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q \left| W^{\frac{1}{p}}(x) W^{-\frac{1}{p}}(y) \vec{f}(y) \right| dy.$$

- *(Christ - Goldberg / Goldberg / Isralowitz - Kwon - Pott) Sea* $1 < p < \infty$ *y*

$$W \in A_p \iff \|M_{W,p}\vec{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq c_{n,d,p}[W]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}} \|\vec{f}\|_{L^p}.$$

- *(Isralowitz - Pott - R-R) Si* $W \in A_1$ *entonces*

$$\|M_{W,p}\vec{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq c_{n,d,p}[W]_{A_1}^{\frac{1}{p}} \|\vec{f}\|_{L^p}$$

Contenidos

Definiciones rough y L^r-Hörmander

Definición

Dado $r \geq 1$, T_r es un operador singular $L^{r'}$-Hörmander si T_r es acotado en L^2 y admite la siguiente representación

$$T_r f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x,y) f(y)\,dy \tag{1}$$

siempre que $f \in \mathscr{C}_c^\infty$ y $x \notin \operatorname{sop}(f)$ donde $K : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \setminus \{(x,x) : x \in \mathbb{R}^d\} \to \mathbb{R}$ es un núcleo localmente integrable que satisface la condición $L^{r'}$-Hörmander, es decir,

$$H_{r',1} = \sup_{Q} \sup_{x,z \in \frac{1}{2}Q} \sum_{k=1}^{\infty} \left(2^k l(Q)\right)^d \left\| (K(x,\cdot) - K(z,\cdot)) \chi_{2^k Q \setminus 2^{k-1} Q} \right\|_{L^{r'}, 2^k Q} < \infty.$$

$$H_{r',2} = \sup_{Q} \sup_{x,z \in \frac{1}{2}Q} \sum_{k=1}^{\infty} \left(2^k l(Q)\right)^d \left\| (K(\cdot,x) - K(\cdot,z)) \chi_{2^k Q \setminus 2^{k-1} Q} \right\|_{L^{r'}, 2^k Q} < \infty.$$

Observamos que en particular los operadores de Calderón-Zygmund, p. ej. las transformadas de Hilbert y de Riesz son L^∞-Hörmander.

Definición

Dado $\Omega \in L^\infty(\mathbb{S}^{d-1})$ con $\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Omega = 0$, $T_\Omega(f) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{\Omega\left(\frac{x-y}{|x-y|}\right)}{|x-y|^d} f(y)\,dy$.

Estimaciones de tipo fuerte

Resultados para operadores $L^{r'}$-Hörmander

- (Nazarov - Petermichl - Treil - Volberg / Cruz-Uribe - Isralowitz - Moen / Muller, R-R) Si $W \in A_{\frac{p}{r}}$

$$\|T_r\vec{f}\|_{L^p(W)} \lesssim [W]_{A_{\frac{p}{r}}}^{1+\frac{1}{p}\frac{r}{p-r}} \|\vec{f}\|_{L^p(W)} \qquad p > r \geq 1.$$

- (Isralowitz - Pott - R-R / Muller R-R) Si $W \in A_1$

$$\|T\vec{f}\|_{L^p(W)} \leq c_{n,T,p} \left(\frac{p}{r}\right)' [W]_{A_1} \|\vec{f}\|_{L^p(W)} \qquad p > r \geq 1.$$

Observaciones

- La conjetura A_2 sigue siendo un problema abierto. Para el caso $r = 1$ y $p = 2$ se obtiene

$$\|T\vec{f}\|_{L^2(W)} \lesssim [W]_{A_2}^{\frac{3}{2}} \|\vec{f}\|_{L^2(W)}.$$

La estimación sharp escalar es $\|T\vec{f}\|_{L^p(w)} \lesssim [w]_{A_p}^{\max\{1,\frac{1}{p-1}\}} \|\vec{f}\|_{L^p(w)}$.

- La estimación A_1 si que recupera la dependencia sharp del caso escalar.

Estimaciones de tipo fuerte

Resultados para operadores $L^{r'}$-Hörmander

- (Nazarov - Petermichl - Treil - Volberg / Cruz-Uribe - Isralowitz - Moen / Muller, R-R) Si $W \in A_{\frac{p}{r}}$

$$\|T_r\vec{f}\|_{L^p(W)} \lesssim [W]_{A_{\frac{p}{r}}}^{1+\frac{1}{p}\frac{r}{p-r}} \|\vec{f}\|_{L^p(W)} \qquad p > r \geq 1.$$

- (Isralowitz - Pott - R-R / Muller R-R) Si $W \in A_1$

$$\|T\vec{f}\|_{L^p(W)} \leq c_{n,T,p}\left(\frac{p}{r}\right)'[W]_{A_1}\|\vec{f}\|_{L^p(W)} \qquad p > r \geq 1.$$

Observaciones

- La conjetura A_2 sigue siendo un problema abierto. Para el caso $r=1$ y $p=2$ se obtiene

$$\|T\vec{f}\|_{L^2(W)} \lesssim [W]_{A_2}^{\frac{3}{2}}\|\vec{f}\|_{L^2(W)}.$$

  La estimación sharp escalar es $\|T\vec{f}\|_{L^p(w)} \lesssim [w]_{A_p}^{\max\left\{1,\frac{1}{p-1}\right\}}\|\vec{f}\|_{L^p(w)}$.

- La estimación A_1 si que recupera la dependencia sharp del caso escalar.

Estimaciones de tipo fuerte

Resultados para operadores $L^{r'}$-Hörmander

- (Nazarov - Petermichl - Treil - Volberg / Cruz-Uribe - Isralowitz - Moen / Muller, R-R) Si $W \in A_{\frac{p}{r}}$

$$\|T_r \vec{f}\|_{L^p(W)} \lesssim [W]_{A_{\frac{p}{r}}}^{1+\frac{1}{p}\frac{r}{p-r}} \|\vec{f}\|_{L^p(W)} \qquad p > r \geq 1.$$

- (Isralowitz - Pott - R-R / Muller R-R) Si $W \in A_1$

$$\|T\vec{f}\|_{L^p(W)} \leq c_{n,T,p} \left(\frac{p}{r}\right)' [W]_{A_1} \|\vec{f}\|_{L^p(W)} \qquad p > r \geq 1.$$

Observaciones

- La conjetura A_2 sigue siendo un problema abierto. Para el caso $r = 1$ y $p = 2$ se obtiene
$$\|T\vec{f}\|_{L^2(W)} \lesssim [W]_{A_2}^{\frac{3}{2}} \|\vec{f}\|_{L^2(W)}.$$
La estimación sharp escalar es $\|T\vec{f}\|_{L^p(w)} \lesssim [w]_{A_p}^{\max\left\{1,\frac{1}{p-1}\right\}} \|\vec{f}\|_{L^p(w)}$.
- La estimación A_1 si que recupera la dependencia sharp del caso escalar.

Estimaciones de tipo fuerte

Estimaciones para T_Ω

- (Di Plinio, Hytönen - Li / Muller - R-R) Si $W \in A_p$

$$\|T_\Omega \vec{f}\|_{L^p(W)} \lesssim \|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{d-1})} [W]_{A_p}^{1+\frac{1}{p(p-1)}+\min\left\{1,\frac{1}{p-1}\right\}} \|\vec{f}\|_{L^p(W)} \qquad p > 1.$$

- (Muller - R-R) Si $W \in A_1$

$$\|T_\Omega \vec{f}\|_{L^p(W)} \lesssim \|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{d-1})} [W]_{A_1} \|\vec{f}\|_{L^p(W)} \qquad p > 1.$$

Observaciones

- En el caso escalar, la mejor estimación conocida es

$$\|T_\Omega \vec{f}\|_{L^p(w)} \lesssim \|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{d-1})} [w]_{A_p}^{p'} \|\vec{f}\|_{L^p(w)}.$$

- La estimación A_1 si que recupera la dependencia sharp del caso escalar.

Estimaciones de tipo fuerte

Estimaciones para T_Ω

- (Di Plinio, Hytönen - Li / Muller - R-R) Si $W \in A_p$

$$\|T_\Omega \vec{f}\|_{L^p(W)} \lesssim \|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{d-1})} [W]_{A_p}^{1+\frac{1}{p(p-1)}+\min\left\{1,\frac{1}{p-1}\right\}} \|\vec{f}\|_{L^p(W)} \qquad p>1.$$

- (Muller - R-R) Si $W \in A_1$

$$\|T_\Omega \vec{f}\|_{L^p(W)} \lesssim \|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{d-1})} [W]_{A_1} \|\vec{f}\|_{L^p(W)} \qquad p>1.$$

Observaciones

- En el caso escalar, la mejor estimación conocida es

$$\|T_\Omega \vec{f}\|_{L^p(w)} \lesssim \|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{d-1})} [w]_{A_p}^{p'} \|\vec{f}\|_{L^p(w)}.$$

- La estimación A_1 si que recupera la dependencia sharp del caso escalar.

Estimaciones de tipo fuerte

Estimaciones para T_Ω

- (Di Plinio, Hytönen - Li / Muller - R-R) Si $W \in A_p$

$$\|T_\Omega \vec{f}\|_{L^p(W)} \lesssim \|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{d-1})}[W]_{A_p}^{1+\frac{1}{p(p-1)}+\min\left\{1,\frac{1}{p-1}\right\}}\|\vec{f}\|_{L^p(W)} \qquad p>1.$$

- (Muller - R-R) Si $W \in A_1$

$$\|T_\Omega \vec{f}\|_{L^p(W)} \lesssim \|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{d-1})}[W]_{A_1}\|\vec{f}\|_{L^p(W)} \qquad p>1.$$

Observaciones

- En el caso escalar, la mejor estimación conocida es

$$\|T_\Omega \vec{f}\|_{L^p(w)} \lesssim \|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{d-1})}[w]_{A_p}^{p'}\|\vec{f}\|_{L^p(w)}.$$

- La estimación A_1 si que recupera la dependencia sharp del caso escalar.

Ideas de las pruebas de los tipos fuertes - El caso escalar

Definición

Una familia de cubos $\mathscr{S}$ es η-sparse $(0 < \eta < 1)$ si para cada $Q \in \mathscr{S}$ existe un subconjunto medible $E_Q \subset Q$ tal que $\eta|Q| \leq |E_Q|$ y los conjuntos E_Q son disjuntos dos a dos.

Figura: Familia $\frac{1}{2}$-sparse

Teorema (Conde-Alonso, Rey, Lerner, Nazarov, Lacey)

Si T es un operador de Calderón-Zygmund y $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ es una función tal que $f \in L^\infty_c$, existe una familia sparse $\mathscr{S}$ tal que

$$|Tf(x)| \leq \sum_{Q \in \mathscr{S}} \langle |f| \rangle_Q \chi_Q(x)$$

donde $\langle f \rangle_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q f$.

Ideas de las pruebas de los tipos fuertes - El caso escalar

Definición

Una familia de cubos $\mathscr{S}$ es η-sparse ($0 < \eta < 1$) si para cada $Q \in \mathscr{S}$ existe un subconjunto medible $E_Q \subset Q$ tal que $\eta|Q| \leq |E_Q|$ y los conjuntos E_Q son disjuntos dos a dos.

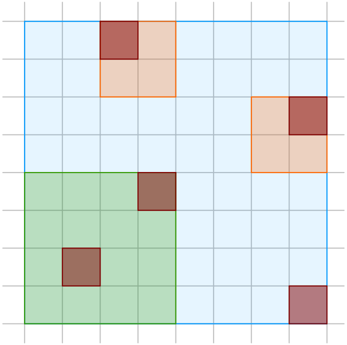

Figura: Familia $\frac{1}{2}$-sparse

Teorema (Conde-Alonso, Rey, Lerner, Nazarov, Lacey)

Si T es un operador de Calderón-Zygmund y $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ es una función tal que $f \in L^\infty_c$, existe una familia sparse $\mathscr{S}$ tal que

$$|Tf(x)| \leq \sum_{Q \in \mathscr{S}} \langle |f| \rangle_Q \chi_Q(x)$$

donde $\langle f \rangle_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q f$.

Ideas de las pruebas de los tipos fuertes - El caso escalar

Definición

Una familia de cubos $\mathscr{S}$ es η-sparse ($0 < \eta < 1$) si para cada $Q \in \mathscr{S}$ existe un subconjunto medible $E_Q \subset Q$ tal que $\eta|Q| \leq |E_Q|$ y los conjuntos E_Q son disjuntos dos a dos.

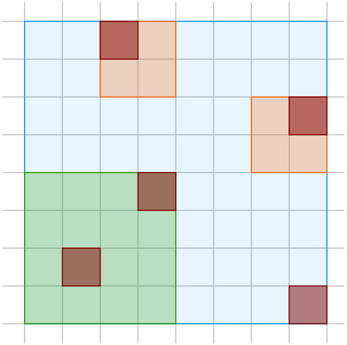

Figura: Familia $\frac{1}{2}$-sparse

Teorema (Conde-Alonso, Rey, Lerner, Nazarov, Lacey)

Si T es un operador de Calderón-Zygmund y $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ es una función tal que $f \in L^\infty_c$, existe una familia sparse $\mathscr{S}$ tal que

$$|Tf(x)| \leq \sum_{Q \in \mathscr{S}} \langle |f| \rangle_Q \chi_Q(x)$$

donde $\langle f \rangle_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q f$.

Prueba del Teorema A_2

Teorema (Cruz-Uribe, Martell, Pérez 2010)

Si $\mathscr{S}$ es una familia η-sparse diádica y $w \in A_2$, entonces,

$$\|A_{\mathscr{S}} f(x)\|_{L^2(w)} \leq c_n \frac{1}{\eta} [w]_{A_2} \|f\|_{L^2(w)}.$$

Llamemos $\sigma = w^{-1}$. Por dualidad, basta ver que
$|\int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{A}_{\mathscr{S}} f(x) g(x) w(x) dx| \leq c_n \frac{1}{\eta} [w]_{A_2} \|f\|_{L^2(w)} \|g\|_{L^2(w)}$

Prueba del Teorema A_2

Teorema (Cruz-Uribe, Martell, Pérez 2010)

Si $\mathscr{S}$ es una familia η-sparse diádica y $w \in A_2$, entonces,

$$\|A_{\mathscr{S}} f(x)\|_{L^2(w)} \leq c_n \frac{1}{\eta} [w]_{A_2} \|f\|_{L^2(w)}.$$

Llamemos $\sigma = w^{-1}$. Por dualidad, basta ver que $|\int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{A}_{\mathscr{S}} f(x) g(x) w(x) dx| \leq c_n \frac{1}{\eta} [w]_{A_2} \|f\|_{L^2(w)} \|g\|_{L^2(w)}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{A}_{\mathscr{S}} f(x) g(x) w(x) dx = \sum_{Q \in \mathscr{S}} \frac{1}{|Q|} \int_Q f dy \int_Q g w dy$$

Prueba del Teorema A_2

Teorema (Cruz-Uribe, Martell, Pérez 2010)

Si $\mathscr{S}$ es una familia η-sparse diádica y $w \in A_2$, entonces,

$$\|A_{\mathscr{S}} f(x)\|_{L^2(w)} \leq c_n \frac{1}{\eta}[w]_{A_2} \|f\|_{L^2(w)}.$$

Llamemos $\sigma = w^{-1}$. Por dualidad, basta ver que
$|\int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{A}_{\mathscr{S}} f(x) g(x) w(x) dx| \leq c_n \frac{1}{\eta}[w]_{A_2} \|f\|_{L^2(w)} \|g\|_{L^2(w)}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{A}_{\mathscr{S}} f(x) g(x) w(x) dx = \sum_{Q \in \mathscr{S}} \frac{1}{|Q|} \int_Q f dy \int_Q g w dy$$

$$\leq \sum_{Q \in \mathscr{S}} \left(\frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q \frac{f}{\sigma} \sigma dy \right) \left(\frac{1}{w(Q)} \int_Q g w dy \right) \frac{w(Q)}{|Q|} \frac{\sigma(Q)}{|Q|} |Q|$$

Prueba del Teorema A_2

Teorema (Cruz-Uribe, Martell, Pérez 2010)

Si $\mathscr{S}$ es una familia η-sparse diádica y $w \in A_2$, entonces,

$$\|A_{\mathscr{S}} f(x)\|_{L^2(w)} \leq c_n \frac{1}{\eta}[w]_{A_2} \|f\|_{L^2(w)}.$$

Llamemos $\sigma = w^{-1}$. Por dualidad, basta ver que
$|\int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{A}_{\mathscr{S}} f(x) g(x) w(x) dx| \leq c_n \frac{1}{\eta}[w]_{A_2} \|f\|_{L^2(w)} \|g\|_{L^2(w)}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{A}_{\mathscr{S}} f(x) g(x) w(x) dx = \sum_{Q \in \mathscr{S}} \frac{1}{|Q|} \int_Q f dy \int_Q g w dy$$

$$\leq \sum_{Q \in \mathscr{S}} \left(\frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q \frac{f}{\sigma} \sigma dy \right) \left(\frac{1}{w(Q)} \int_Q g w dy \right) \frac{w(Q)}{|Q|} \frac{\sigma(Q)}{|Q|} |Q|$$

$$|Q| \leq \frac{1}{\eta} |E_Q|$$

Prueba del Teorema A_2

Teorema (Cruz-Uribe, Martell, Pérez 2010)

Si $\mathscr{S}$ es una familia η-sparse diádica y $w \in A_2$, entonces,

$$\|A_{\mathscr{S}} f(x)\|_{L^2(w)} \leq c_n \frac{1}{\eta}[w]_{A_2} \|f\|_{L^2(w)}.$$

Llamemos $\sigma = w^{-1}$. Por dualidad, basta ver que $|\int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{A}_{\mathscr{S}} f(x) g(x) w(x) dx| \leq c_n \frac{1}{\eta}[w]_{A_2} \|f\|_{L^2(w)} \|g\|_{L^2(w)}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{A}_{\mathscr{S}} f(x) g(x) w(x) dx = \sum_{Q \in \mathscr{S}} \frac{1}{|Q|} \int_Q f dy \int_Q g w dy$$

$$\leq \frac{1}{\eta} \sum_{Q \in \mathscr{S}} \left(\frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q \frac{f}{\sigma} \sigma dy \right) \left(\frac{1}{w(Q)} \int_Q g w dy \right) \frac{w(Q)}{|Q|} \frac{\sigma(Q)}{|Q|} |E_Q|$$

Prueba del Teorema A_2

Teorema (Cruz-Uribe, Martell, Pérez 2010)

Si $\mathscr{S}$ es una familia η-sparse diádica y $w \in A_2$, entonces,

$$\|A_{\mathscr{S}} f(x)\|_{L^2(w)} \leq c_n \frac{1}{\eta} [w]_{A_2} \|f\|_{L^2(w)}.$$

Llamemos $\sigma = w^{-1}$. Por dualidad, basta ver que
$|\int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{A}_{\mathscr{S}} f(x) g(x) w(x) dx| \leq c_n \frac{1}{\eta} [w]_{A_2} \|f\|_{L^2(w)} \|g\|_{L^2(w)}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{A}_{\mathscr{S}} f(x) g(x) w(x) dx = \sum_{Q \in \mathscr{S}} \frac{1}{|Q|} \int_Q f dy \int_Q g w dy$$

$$\leq \frac{1}{\eta} \sum_{Q \in \mathscr{S}} \left(\frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q \frac{f}{\sigma} \sigma dy \right) \left(\frac{1}{w(Q)} \int_Q g w dy \right) \frac{w(Q)}{|Q|} \frac{\sigma(Q)}{|Q|} |E_Q|$$

$$[w]_{A_2} = \sup_Q \frac{w(Q)}{|Q|} \frac{\sigma(Q)}{|Q|}$$

Prueba del Teorema A_2

Teorema (Cruz-Uribe, Martell, Pérez 2010)

Si $\mathscr{S}$ es una familia η-sparse diádica y $w \in A_2$, entonces,

$$\|A_{\mathscr{S}} f(x)\|_{L^2(w)} \leq c_n \frac{1}{\eta} [w]_{A_2} \|f\|_{L^2(w)}.$$

Llamemos $\sigma = w^{-1}$. Por dualidad, basta ver que
$|\int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{A}_{\mathscr{S}} f(x) g(x) w(x) dx| \leq c_n \frac{1}{\eta} [w]_{A_2} \|f\|_{L^2(w)} \|g\|_{L^2(w)}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{A}_{\mathscr{S}} f(x) g(x) w(x) dx = \sum_{Q \in \mathscr{S}} \frac{1}{|Q|} \int_Q f dy \int_Q g w dy$$

$$\leq \frac{1}{\eta} [w]_{A_2} \sum_{Q \in \mathscr{S}} \left(\frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q \frac{f}{\sigma} \sigma dy \right) \left(\frac{1}{w(Q)} \int_Q g w dy \right) |E_Q|$$

Prueba del Teorema A_2

Teorema (Cruz-Uribe, Martell, Pérez 2010)

Si $\mathscr{S}$ es una familia η-sparse diádica y $w \in A_2$, entonces,

$$\|A_{\mathscr{S}} f(x)\|_{L^2(w)} \leq c_n \frac{1}{\eta}[w]_{A_2} \|f\|_{L^2(w)}.$$

Llamemos $\sigma = w^{-1}$. Por dualidad, basta ver que $|\int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{A}_{\mathscr{S}} f(x) g(x) w(x) dx| \leq c_n \frac{1}{\eta}[w]_{A_2} \|f\|_{L^2(w)} \|g\|_{L^2(w)}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{A}_{\mathscr{S}} f(x) g(x) w(x) dx = \sum_{Q \in \mathscr{S}} \frac{1}{|Q|} \int_Q f dy \int_Q g w dy$$

$$\leq \frac{1}{\eta}[w]_{A_2} \sum_{Q \in \mathscr{S}} \overbrace{\left(\frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q \frac{f}{\sigma} \sigma dy \right)}^{\leq \text{ínf}_{z \in Q} M_\sigma(f/\sigma)} \overbrace{\left(\frac{1}{w(Q)} \int_Q g w dy \right)}^{\leq \text{ínf}_{z \in Q} M_w(g)} |E_Q|$$

Prueba del Teorema A_2

Teorema (Cruz-Uribe, Martell, Pérez 2010)

Si $\mathscr{S}$ es una familia η-sparse diádica y $w \in A_2$, entonces,

$$\|A_{\mathscr{S}} f(x)\|_{L^2(w)} \leq c_n \frac{1}{\eta}[w]_{A_2}\|f\|_{L^2(w)}.$$

Llamemos $\sigma = w^{-1}$. Por dualidad, basta ver que
$|\int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{A}_{\mathscr{S}} f(x)g(x)w(x)dx| \leq c_n \frac{1}{\eta}[w]_{A_2}\|f\|_{L^2(w)}\|g\|_{L^2(w)}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{A}_{\mathscr{S}} f(x)g(x)w(x)dx = \sum_{Q\in\mathscr{S}} \frac{1}{|Q|}\int_Q fdy \int_Q gwdy$$

$$\leq \frac{1}{\eta}[w]_{A_2} \sum_{Q\in\mathscr{S}} \left(\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q \frac{f}{\sigma}\sigma dy\right)\left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q gwdy\right)|E_Q|$$

$$\leq \frac{1}{\eta}[w]_{A_2} \sum_{Q\in\mathscr{S}} \int_{E_Q} M_\sigma(f/\sigma)(x)M_w(g)(x)dx$$

Prueba del Teorema A_2

Teorema (Cruz-Uribe, Martell, Pérez 2010)

Si $\mathscr{S}$ es una familia η-sparse diádica y $w \in A_2$, entonces,

$$\|A_{\mathscr{S}} f(x)\|_{L^2(w)} \leq c_n \frac{1}{\eta}[w]_{A_2} \|f\|_{L^2(w)}.$$

Llamemos $\sigma = w^{-1}$. Por dualidad, basta ver que $|\int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{A}_{\mathscr{S}} f(x) g(x) w(x) dx| \leq c_n \frac{1}{\eta}[w]_{A_2} \|f\|_{L^2(w)} \|g\|_{L^2(w)}$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{A}_{\mathscr{S}} f(x) g(x) w(x) dx &= \sum_{Q \in \mathscr{S}} \frac{1}{|Q|} \int_Q f dy \int_Q g w dy \\
&\leq \frac{1}{\eta}[w]_{A_2} \sum_{Q \in \mathscr{S}} \left(\frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q \frac{f}{\sigma} \sigma dy \right) \left(\frac{1}{w(Q)} \int_Q g w dy \right) |E_Q| \\
&\leq \frac{1}{\eta}[w]_{A_2} \sum_{Q \in \mathscr{S}} \int_{E_Q} M_\sigma(f/\sigma)(x) M_w(g)(x) dx \\
&\leq \frac{1}{\eta}[w]_{A_2} \int_{\mathbb{R}^n} M_\sigma(f/\sigma)(x) M_w(g)(x) dx
\end{aligned}$$

Prueba del Teorema A_2

Teorema (Cruz-Uribe, Martell, Pérez 2010)

Si $\mathscr{S}$ es una familia η-sparse diádica y $w \in A_2$, entonces,

$$\|A_{\mathscr{S}} f(x)\|_{L^2(w)} \leq c_n \frac{1}{\eta} [w]_{A_2} \|f\|_{L^2(w)}.$$

Llamemos $\sigma = w^{-1}$. Por dualidad, basta ver que
$|\int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{A}_{\mathscr{S}} f(x) g(x) w(x) dx| \leq c_n \frac{1}{\eta} [w]_{A_2} \|f\|_{L^2(w)} \|g\|_{L^2(w)}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{A}_{\mathscr{S}} f(x) g(x) w(x) dx = \sum_{Q \in \mathscr{S}} \frac{1}{|Q|} \int_Q f dy \int_Q g w dy$$

$$\leq \frac{1}{\eta} [w]_{A_2} \sum_{Q \in \mathscr{S}} \left(\frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q \frac{f}{\sigma} \sigma dy \right) \left(\frac{1}{w(Q)} \int_Q g w dy \right) |E_Q|$$

$$\leq \frac{1}{\eta} [w]_{A_2} \sum_{Q \in \mathscr{S}} \int_{E_Q} M_\sigma(f/\sigma)(x) M_w(g)(x) dx$$

$$\leq \frac{1}{\eta} [w]_{A_2} \int_{\mathbb{R}^n} M_\sigma(f/\sigma)(x) M_w(g)(x) \sigma^{\frac{1}{2}}(x) w^{\frac{1}{2}}(x) dx$$

Prueba del Teorema A_2

Teorema (Cruz-Uribe, Martell, Pérez 2010)

Si $\mathscr{S}$ es una familia η-sparse diádica y $w \in A_2$, entonces,

$$\|A_{\mathscr{S}} f(x)\|_{L^2(w)} \leq c_n \frac{1}{\eta} [w]_{A_2} \|f\|_{L^2(w)}.$$

Llamemos $\sigma = w^{-1}$. Por dualidad, basta ver que $\left|\int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{A}_{\mathscr{S}} f(x) g(x) w(x) dx\right| \leq c_n \frac{1}{\eta} [w]_{A_2} \|f\|_{L^2(w)} \|g\|_{L^2(w)}$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{A}_{\mathscr{S}} f(x) g(x) w(x) dx &= \sum_{Q \in \mathscr{S}} \frac{1}{|Q|} \int_Q f dy \int_Q g w dy \\
&\leq \frac{1}{\eta} [w]_{A_2} \sum_{Q \in \mathscr{S}} \left(\frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q \frac{f}{\sigma} \sigma dy \right) \left(\frac{1}{w(Q)} \int_Q g w dy \right) |E_Q| \\
&\leq \frac{1}{\eta} [w]_{A_2} \sum_{Q \in \mathscr{S}} \int_{E_Q} M_\sigma(f/\sigma)(x) M_w(g)(x) dx \\
&\leq \frac{1}{\eta} [w]_{A_2} \int_{\mathbb{R}^n} M_\sigma(f/\sigma)(x) M_w(g)(x) \sigma^{\frac{1}{2}}(x) w^{\frac{1}{2}}(x) dx \\
&\leq \frac{1}{\eta} [w]_{A_2} \|M_\sigma(f/\sigma)\|_{L^2(\sigma)} \|M_w(g)\|_{L^2(w)}
\end{aligned}$$

Prueba del Teorema A_2

Teorema (Cruz-Uribe, Martell, Pérez 2010)

Si $\mathscr{S}$ es una familia η-sparse diádica y $w \in A_2$, entonces,

$$\|A_{\mathscr{S}} f(x)\|_{L^2(w)} \leq c_n \frac{1}{\eta}[w]_{A_2}\|f\|_{L^2(w)}.$$

Llamemos $\sigma = w^{-1}$. Por dualidad, basta ver que
$|\int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{A}_{\mathscr{S}} f(x)g(x)w(x)dx| \leq c_n \frac{1}{\eta}[w]_{A_2}\|f\|_{L^2(w)}\|g\|_{L^2(w)}$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{A}_{\mathscr{S}} f(x)g(x)w(x)dx &= \sum_{Q\in\mathscr{S}} \frac{1}{|Q|}\int_Q fdy \int_Q gwdy \\
&\leq \frac{1}{\eta}[w]_{A_2} \sum_{Q\in\mathscr{S}} \left(\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q \frac{f}{\sigma}\sigma dy\right)\left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q gwdy\right)|E_Q| \\
&\leq \frac{1}{\eta}[w]_{A_2} \sum_{Q\in\mathscr{S}} \int_{E_Q} M_\sigma(f/\sigma)(x)M_w(g)(x)dx \\
&\leq \frac{1}{\eta}[w]_{A_2} \int_{\mathbb{R}^n} M_\sigma(f/\sigma)(x)M_w(g)(x)\sigma^{\frac{1}{2}}(x)w^{\frac{1}{2}}(x)dx \\
&\leq \frac{1}{\eta}[w]_{A_2}\|M_\sigma(f/\sigma)\|_{L^2(\sigma)}\|M_w(g)\|_{L^2(w)} \leq c_n\frac{1}{\eta}[w]_{A_2}\|f\|_{L^2(w)}\|g\|_{L^2(w)}
\end{aligned}$$

Ideas de las pruebas de los tipos fuertes

Ideas

- Reverse Hölder.
- Resultados análogos a la dominación sparse (Convex Body domination).

En el mundo matricial, la adaptación conocida de la dominación sparse es el siguiente tipo de resultado.

Teorema (Nazarov - Petermichl - Treil - Volberg)

Si T es un operador de Calderón-Zygmund y $\vec{f}:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^n$ es una función tal que $|\vec{f}|\in L^\infty_c$, existe una familia sparse $\mathscr{S}$ tal que que

$$T\vec{f}(x)\in c_{n,d,T}\sum_{Q\in\mathscr{S}}\langle\langle\vec{f}\rangle\rangle_Q\chi_Q(x)$$

donde cada

$$\langle\langle\vec{f}\rangle\rangle_Q=\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q\varphi_Q(x)\vec{f}(x):\|\varphi_Q\|_{L^\infty}\leq 1,\, sop\varphi_Q\subset Q\right\}$$

es un conjunto simétrico, convexo y acotado.

Ideas de las pruebas de los tipos fuertes

Ideas

- Reverse Hölder.
- Resultados análogos a la dominación sparse (Convex Body domination).

En el mundo matricial, la adaptación conocida de la dominación sparse es el siguiente tipo de resultado.

Teorema (Nazarov - Petermichl - Treil - Volberg)

Si T es un operador de Calderón-Zygmund y $\vec{f}:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^n$ es una función tal que $|\vec{f}|\in L^\infty_c$, existe una familia sparse $\mathscr{S}$ tal que que

$$T\vec{f}(x)\in c_{n,d,T}\sum_{Q\in\mathscr{S}}\langle\langle\vec{f}\rangle\rangle_Q\chi_Q(x)$$

donde cada

$$\langle\langle\vec{f}\rangle\rangle_Q=\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q\varphi_Q(x)\vec{f}(x)\,:\,\|\varphi_Q\|_{L^\infty}\leq 1,\ sop\varphi_Q\subset Q\right\}$$

es un conjunto simétrico, convexo y acotado.

Ideas de las pruebas de los tipos fuertes

Ideas

- Reverse Hölder.
- Resultados análogos a la dominación sparse (Convex Body domination).

En el mundo matricial, la adaptación conocida de la dominación sparse es el siguiente tipo de resultado.

Teorema (Nazarov - Petermichl - Treil - Volberg)

Si T es un operador de Calderón-Zygmund y $\vec{f}:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^n$ es una función tal que $|\vec{f}|\in L_c^\infty$, existe una familia sparse $\mathscr{S}$ tal que que

$$T\vec{f}(x)\in c_{n,d,T}\sum_{Q\in\mathscr{S}}\langle\langle\vec{f}\rangle\rangle_Q\chi_Q(x)$$

donde cada

$$\langle\langle\vec{f}\rangle\rangle_Q=\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q\varphi_Q(x)\vec{f}(x)\,:\,\|\varphi_Q\|_{L^\infty}\leq 1,\ sop\varphi_Q\subset Q\right\}$$

es un conjunto simétrico, convexo y acotado.

Convex body domination para integrales singulares rough y operadores $L^{r'}$-Hörmander

Siguiendo la línea de trabajos de Di Plinio, Hytönen y Li y de Culiuc, Di Plinio y Ou, pueden obtenerse los siguientes resultados.

Teorema (Muller, R-R)

Existen familias sparse dependientes de $\vec{f}$, $\vec{g}$ y de los operadores tales que si

1. *T es un operador $L^{r'}$-Hörmander entonces*

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}\langle T\vec{f},\vec{g}\rangle\right| \leq c_{n,d,T}\sum_{Q\in\mathscr{S}}\langle\langle\vec{f}\rangle\rangle_{Q,r}\langle\langle\vec{g}\rangle\rangle_{Q}|Q|$$

2. *T_Ω es una integral singular rough con $\Omega\in L^\infty(\mathbb{S}^{d-1})$*

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}\langle T_\Omega\vec{f},\vec{g}\rangle\right| \leq c_{n,d}r'\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{d-1})}\sum_{Q\in\mathscr{S}}\langle\langle\vec{f}\rangle\rangle_{Q}\langle\langle\vec{g}\rangle\rangle_{Q,r}|Q|$$

En todos los casos $\langle\langle h\rangle\rangle_{Q,r}=\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q\varphi_Q(x)\vec{h}(x)dx : \|\varphi_Q\|_{L^{r'}}\leq 1, sop\varphi_Q\subset Q\right\}$ es un conjunto simétrico, convexo y acotado, y

$$\langle\langle\vec{h}_1\rangle\rangle_{Q,s}\langle\langle\vec{h}_2\rangle\rangle_{Q,r}=\sup\{\langle\vec{v}_1,\vec{v}_2\rangle : \vec{v}_1\in\langle\langle\vec{h}_1\rangle\rangle_{Q,s},\ \vec{v}_2\in\langle\langle\vec{h}_2\rangle\rangle_{Q,r}\}.$$

Prueba de la estimación A_2 para CZO

Observamos primero que

$$\begin{aligned} &\|T\vec{f}\|_{L^2(W)} \lesssim [W]_{A_2}^{\frac{3}{2}} \|\vec{f}\|_{L^2(W)}. \\ \iff &\|W^{\frac{1}{2}} T(W^{-\frac{1}{2}}\vec{f})\|_{L^2} \lesssim [W]_{A_2}^{\frac{3}{2}} \|\vec{f}\|_{L^2} \end{aligned}$$

Usando la dominación sparse,

$$\begin{aligned} \left|\int \langle W^{\frac{1}{2}} T(W^{-\frac{1}{2}}\vec{f}), \vec{g}\rangle dx\right| &= \left|\int \langle T(W^{-\frac{1}{2}}\vec{f}), W^{\frac{1}{2}}\vec{g}\rangle dx\right| \\ &\lesssim \sum_{Q\in\mathscr{S}} \langle\langle W^{-\frac{1}{2}}\vec{f}\rangle\rangle_{1,Q} \langle\langle W^{\frac{1}{2}}\vec{g}\rangle\rangle_{1,Q} |Q| \end{aligned}$$

de manera que basta demostrar que

$$\sum_{Q\in\mathscr{S}} \langle\langle W^{-\frac{1}{2}}\vec{f}\rangle\rangle_{1,Q} \langle\langle W^{\frac{1}{2}}\vec{g}\rangle\rangle_{1,Q} |Q| \lesssim [W]_{A_2}^{\frac{3}{2}} \|\vec{f}\|_{L^2} \|\vec{g}\|_{L^2}$$

Prueba de la estimación A_2 para CZO

Observamos primero que

$$\|T\vec{f}\|_{L^2(W)} \lesssim [W]_{A_2}^{\frac{3}{2}} \|\vec{f}\|_{L^2(W)}.$$

$$\iff \|W^{\frac{1}{2}} T(W^{-\frac{1}{2}}\vec{f})\|_{L^2} \lesssim [W]_{A_2}^{\frac{3}{2}} \|\vec{f}\|_{L^2}$$

Usando la dominación sparse,

$$\begin{aligned} \left| \int \langle W^{\frac{1}{2}} T(W^{-\frac{1}{2}}\vec{f}), \vec{g} \rangle dx \right| &= \left| \int \langle T(W^{-\frac{1}{2}}\vec{f}), W^{\frac{1}{2}}\vec{g} \rangle dx \right| \\ &\lesssim \sum_{Q\in\mathscr{S}} \langle\langle W^{-\frac{1}{2}}\vec{f}\rangle\rangle_{1,Q} \langle\langle W^{\frac{1}{2}}\vec{g}\rangle\rangle_{1,Q} |Q| \end{aligned}$$

de manera que basta demostrar que

$$\sum_{Q\in\mathscr{S}} \langle\langle W^{-\frac{1}{2}}\vec{f}\rangle\rangle_{1,Q} \langle\langle W^{\frac{1}{2}}\vec{g}\rangle\rangle_{1,Q} |Q| \lesssim [W]_{A_2}^{\frac{3}{2}} \|\vec{f}\|_{L^2} \|\vec{g}\|_{L^2}$$

Prueba de la estimación A_2 para CZO

Observamos primero que

$$\|T\vec{f}\|_{L^2(W)} \lesssim [W]_{A_2}^{\frac{3}{2}} \|\vec{f}\|_{L^2(W)}.$$

$$\iff \|W^{\frac{1}{2}} T(W^{-\frac{1}{2}}\vec{f})\|_{L^2} \lesssim [W]_{A_2}^{\frac{3}{2}} \|\vec{f}\|_{L^2}$$

Usando la dominación sparse,

$$\begin{aligned} \left|\int \langle W^{\frac{1}{2}} T(W^{-\frac{1}{2}}\vec{f}), \vec{g}\rangle dx\right| &= \left|\int \langle T(W^{-\frac{1}{2}}\vec{f}), W^{\frac{1}{2}}\vec{g}\rangle dx\right| \\ &\lesssim \sum_{Q\in\mathscr{S}} \langle\langle W^{-\frac{1}{2}}\vec{f}\rangle\rangle_{1,Q} \langle\langle W^{\frac{1}{2}}\vec{g}\rangle\rangle_{1,Q} |Q| \end{aligned}$$

de manera que basta demostrar que

$$\sum_{Q\in\mathscr{S}} \langle\langle W^{-\frac{1}{2}}\vec{f}\rangle\rangle_{1,Q} \langle\langle W^{\frac{1}{2}}\vec{g}\rangle\rangle_{1,Q} |Q| \lesssim [W]_{A_2}^{\frac{3}{2}} \|\vec{f}\|_{L^2} \|\vec{g}\|_{L^2}$$

Vemos que

$$
\begin{aligned}
&\langle\langle W^{-\frac{1}{2}}\vec{f}\rangle\rangle_{1,Q}\langle\langle W^{\frac{1}{2}}\vec{g}\rangle\rangle_{1,Q}\\
=&\sup_{\|\varphi\|_{L^\infty}\leq 1,\|\phi\|_{L^\infty}\leq 1}\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q\frac{1}{|Q|}\int_Q\langle W^{-\frac{1}{2}}(x)\vec{f}(x)\varphi(x),W^{\frac{1}{2}}(y)\vec{g}(y)\psi(y)\rangle dxdy\right\}\\
\leq&\frac{1}{|Q|}\int_Q\frac{1}{|Q|}\int_Q|\langle W^{-\frac{1}{2}}(x)\vec{f}(x),W^{\frac{1}{2}}(y)\vec{g}(y)\rangle|dxdy\\
\leq&\frac{1}{|Q|}\int_Q\frac{1}{|Q|}\int_Q|\langle \mathscr{W}_{2,Q}'\mathscr{W}_{2,Q}'^{-1}W^{-\frac{1}{2}}(x)\vec{f}(x),\mathscr{W}_{2,Q}\mathscr{W}_{2,Q}^{-1}W^{\frac{1}{2}}(y)\vec{g}(y)\rangle|dxdy\\
=&\frac{1}{|Q|}\int_Q\frac{1}{|Q|}\int_Q|\langle \mathscr{W}_{2,Q}\mathscr{W}_{2,Q}'\mathscr{W}_{2,Q}'^{-1}W^{-\frac{1}{2}}(x)\vec{f}(x),\mathscr{W}_{2,Q}^{-1}W^{\frac{1}{2}}(y)\vec{g}(y)\rangle|dxdy\\
\leq&\frac{1}{|Q|}\int_Q\frac{1}{|Q|}\int_Q\|\mathscr{W}\mathscr{W}_{2,Q}'\|_{op}\|\mathscr{W}_{2,Q}'^{-1}W^{-\frac{1}{2}}(x)\|_{op}|\vec{f}(x)|\|\mathscr{W}_{2,Q}^{-1}W^{\frac{1}{2}}(y)\|_{op}|\vec{g}(y)|dxdy\\
\leq&\sup_Q|\mathscr{W}_{2,Q}\mathscr{W}_{2,Q}'|_{op}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\|\mathscr{W}_{2,Q}'^{-1}W^{-\frac{1}{2}}\|_{op}|\vec{f}|\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\|\mathscr{W}_{2,Q}^{-1}W^{\frac{1}{2}}\|_{op}|\vec{g}|\right)\\
\leq&[W]_{A_2}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\|\mathscr{W}_{2,Q}'^{-1}W^{-\frac{1}{2}}\|_{op}|\vec{f}|\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\|\mathscr{W}_{2,Q}^{-1}W^{\frac{1}{2}}\|_{op}|\vec{g}|\right)
\end{aligned}
$$

Vemos que

$$
\begin{aligned}
&\langle\langle W^{-\frac{1}{2}}\vec{f}\rangle\rangle_{1,Q}\langle\langle W^{\frac{1}{2}}\vec{g}\rangle\rangle_{1,Q} \\
=&\sup_{\|\varphi\|_{L^\infty}\leq 1,\|\phi\|_{L^\infty}\leq 1}\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q\frac{1}{|Q|}\int_Q\langle W^{-\frac{1}{2}}(x)\vec{f}(x)\varphi(x),W^{\frac{1}{2}}(y)\vec{g}(y)\psi(y)\rangle dxdy\right\} \\
\leq&\frac{1}{|Q|}\int_Q\frac{1}{|Q|}\int_Q|\langle W^{-\frac{1}{2}}(x)\vec{f}(x),W^{\frac{1}{2}}(y)\vec{g}(y)\rangle|dxdy \\
\leq&\frac{1}{|Q|}\int_Q\frac{1}{|Q|}\int_Q|\langle \mathscr{W}'_{2,Q}\mathscr{W}'^{-1}_{2,Q}W^{-\frac{1}{2}}(x)\vec{f}(x),\mathscr{W}_{2,Q}\mathscr{W}^{-1}_{2,Q}W^{\frac{1}{2}}(y)\vec{g}(y)\rangle|dxdy \\
=&\frac{1}{|Q|}\int_Q\frac{1}{|Q|}\int_Q|\langle \mathscr{W}_{2,Q}\mathscr{W}'_{2,Q}\mathscr{W}'^{-1}_{2,Q}W^{-\frac{1}{2}}(x)\vec{f}(x),\mathscr{W}^{-1}_{2,Q}W^{\frac{1}{2}}(y)\vec{g}(y)\rangle|dxdy \\
\leq&\frac{1}{|Q|}\int_Q\frac{1}{|Q|}\int_Q\|\mathscr{W}\mathscr{W}'_{2,Q}\|_{op}\|\mathscr{W}'^{-1}_{2,Q}W^{-\frac{1}{2}}(x)\|_{op}|\vec{f}(x)|\|\mathscr{W}^{-1}_{2,Q}W^{\frac{1}{2}}(y)\|_{op}|\vec{g}(y)|dxdy \\
\leq&\sup_Q|\mathscr{W}_{2,Q}\mathscr{W}'_{2,Q}|_{op}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\|\mathscr{W}'^{-1}_{2,Q}W^{-\frac{1}{2}}\|_{op}|\vec{f}|\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\|\mathscr{W}^{-1}_{2,Q}W^{\frac{1}{2}}\|_{op}|\vec{g}|\right) \\
\leq&[W]_{A_2}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\|\mathscr{W}'^{-1}_{2,Q}W^{-\frac{1}{2}}\|_{op}|\vec{f}|\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\|\mathscr{W}^{-1}_{2,Q}W^{\frac{1}{2}}\|_{op}|\vec{g}|\right)
\end{aligned}
$$

Vemos que

$$
\begin{aligned}
&\langle\langle W^{-\frac{1}{2}}\vec{f}\rangle\rangle_{1,Q}\langle\langle W^{\frac{1}{2}}\vec{g}\rangle\rangle_{1,Q}\\
=&\sup_{\|\varphi\|_{L^\infty}\leq 1,\|\phi\|_{L^\infty}\leq 1}\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q\frac{1}{|Q|}\int_Q\langle W^{-\frac{1}{2}}(x)\vec{f}(x)\varphi(x),W^{\frac{1}{2}}(y)\vec{g}(y)\psi(y)\rangle dxdy\right\}\\
\leq&\frac{1}{|Q|}\int_Q\frac{1}{|Q|}\int_Q|\langle W^{-\frac{1}{2}}(x)\vec{f}(x),W^{\frac{1}{2}}(y)\vec{g}(y)\rangle|dxdy\\
\leq&\frac{1}{|Q|}\int_Q\frac{1}{|Q|}\int_Q|\langle \mathscr{W}'_{2,Q}\mathscr{W}'^{-1}_{2,Q}W^{-\frac{1}{2}}(x)\vec{f}(x),\mathscr{W}_{2,Q}\mathscr{W}^{-1}_{2,Q}W^{\frac{1}{2}}(y)\vec{g}(y)\rangle|dxdy\\
=&\frac{1}{|Q|}\int_Q\frac{1}{|Q|}\int_Q|\langle \mathscr{W}_{2,Q}\mathscr{W}'_{2,Q}\mathscr{W}'^{-1}_{2,Q}W^{-\frac{1}{2}}(x)\vec{f}(x),\mathscr{W}^{-1}_{2,Q}W^{\frac{1}{2}}(y)\vec{g}(y)\rangle|dxdy\\
\leq&\frac{1}{|Q|}\int_Q\frac{1}{|Q|}\int_Q\|\mathscr{W}\mathscr{W}'_{2,Q}\|_{op}\|\mathscr{W}'^{-1}_{2,Q}W^{-\frac{1}{2}}(x)\|_{op}|\vec{f}(x)|\|\mathscr{W}^{-1}_{2,Q}W^{\frac{1}{2}}(y)\|_{op}|\vec{g}(y)|dxdy\\
\leq&\sup_Q|\mathscr{W}_{2,Q}\mathscr{W}'_{2,Q}|_{op}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\|\mathscr{W}'^{-1}_{2,Q}W^{-\frac{1}{2}}\|_{op}|\vec{f}|\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\|\mathscr{W}^{-1}_{2,Q}W^{\frac{1}{2}}\|_{op}|\vec{g}|\right)\\
\leq&[W]^{\frac{1}{2}}_{A_2}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\|\mathscr{W}'^{-1}_{2,Q}W^{-\frac{1}{2}}\|_{op}|\vec{f}|\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\|\mathscr{W}^{-1}_{2,Q}W^{\frac{1}{2}}\|_{op}|\vec{g}|\right)
\end{aligned}
$$

Vemos que

$$
\begin{aligned}
&\langle\langle W^{-\frac{1}{2}}\vec{f}\rangle\rangle_{1,Q}\langle\langle W^{\frac{1}{2}}\vec{g}\rangle\rangle_{1,Q}\\
=&\sup_{\|\varphi\|_{L^\infty}\leq 1,\|\phi\|_{L^\infty}\leq 1}\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q\frac{1}{|Q|}\int_Q\langle W^{-\frac{1}{2}}(x)\vec{f}(x)\varphi(x),W^{\frac{1}{2}}(y)\vec{g}(y)\psi(y)\rangle dxdy\right\}\\
\leq&\frac{1}{|Q|}\int_Q\frac{1}{|Q|}\int_Q|\langle W^{-\frac{1}{2}}(x)\vec{f}(x),W^{\frac{1}{2}}(y)\vec{g}(y)\rangle|dxdy\\
\leq&\frac{1}{|Q|}\int_Q\frac{1}{|Q|}\int_Q|\langle\mathscr{W}'_{2,Q}\mathscr{W}'^{-1}_{2,Q}W^{-\frac{1}{2}}(x)\vec{f}(x),\mathscr{W}_{2,Q}\mathscr{W}^{-1}_{2,Q}W^{\frac{1}{2}}(y)\vec{g}(y)\rangle|dxdy\\
=&\frac{1}{|Q|}\int_Q\frac{1}{|Q|}\int_Q|\langle\mathscr{W}_{2,Q}\mathscr{W}'_{2,Q}\mathscr{W}'^{-1}_{2,Q}W^{-\frac{1}{2}}(x)\vec{f}(x),\mathscr{W}^{-1}_{2,Q}W^{\frac{1}{2}}(y)\vec{g}(y)\rangle|dxdy\\
\leq&\frac{1}{|Q|}\int_Q\frac{1}{|Q|}\int_Q\|\mathscr{W}\mathscr{W}'_{2,Q}\|_{op}\|\mathscr{W}'^{-1}_{2,Q}W^{-\frac{1}{2}}(x)\|_{op}|\vec{f}(x)|\|\mathscr{W}^{-1}_{2,Q}W^{\frac{1}{2}}(y)\|_{op}|\vec{g}(y)|dxdy\\
\leq&\sup_Q|\mathscr{W}_{2,Q}\mathscr{W}'_{2,Q}|_{op}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\|\mathscr{W}'^{-1}_{2,Q}W^{-\frac{1}{2}}\|_{op}|\vec{f}|\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\|\mathscr{W}^{-1}_{2,Q}W^{\frac{1}{2}}\|_{op}|\vec{g}|\right)\\
\leq&[W]^{\frac{1}{2}}_{A_2}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\|\mathscr{W}'^{-1}_{2,Q}W^{-\frac{1}{2}}\|_{op}|\vec{f}|\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\|\mathscr{W}^{-1}_{2,Q}W^{\frac{1}{2}}\|_{op}|\vec{g}|\right)
\end{aligned}
$$

Vemos que

$$
\begin{aligned}
&\langle\langle W^{-\frac{1}{2}}\vec{f}\rangle\rangle_{1,Q}\langle\langle W^{\frac{1}{2}}\vec{g}\rangle\rangle_{1,Q}\\
=&\sup_{\|\varphi\|_{L^\infty}\leq 1,\|\phi\|_{L^\infty}\leq 1}\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q\frac{1}{|Q|}\int_Q\langle W^{-\frac{1}{2}}(x)\vec{f}(x)\varphi(x),W^{\frac{1}{2}}(y)\vec{g}(y)\psi(y)\rangle dxdy\right\}\\
\leq&\frac{1}{|Q|}\int_Q\frac{1}{|Q|}\int_Q|\langle W^{-\frac{1}{2}}(x)\vec{f}(x),W^{\frac{1}{2}}(y)\vec{g}(y)\rangle|dxdy\\
\leq&\frac{1}{|Q|}\int_Q\frac{1}{|Q|}\int_Q|\langle \mathscr{W}'_{2,Q}\mathscr{W}'^{-1}_{2,Q}W^{-\frac{1}{2}}(x)\vec{f}(x),\mathscr{W}_{2,Q}\mathscr{W}^{-1}_{2,Q}W^{\frac{1}{2}}(y)\vec{g}(y)\rangle|dxdy\\
=&\frac{1}{|Q|}\int_Q\frac{1}{|Q|}\int_Q|\langle \mathscr{W}_{2,Q}\mathscr{W}'_{2,Q}\mathscr{W}'^{-1}_{2,Q}W^{-\frac{1}{2}}(x)\vec{f}(x),\mathscr{W}^{-1}_{2,Q}W^{\frac{1}{2}}(y)\vec{g}(y)\rangle|dxdy\\
\leq&\frac{1}{|Q|}\int_Q\frac{1}{|Q|}\int_Q\|\mathscr{W}\mathscr{W}'_{2,Q}\|_{op}\|\mathscr{W}'^{-1}_{2,Q}W^{-\frac{1}{2}}(x)\|_{op}|\vec{f}(x)|\|\mathscr{W}^{-1}_{2,Q}W^{\frac{1}{2}}(y)\|_{op}|\vec{g}(y)|dxdy\\
\leq&\sup_Q|\mathscr{W}_{2,Q}\mathscr{W}'_{2,Q}|_{op}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\|\mathscr{W}'^{-1}_{2,Q}W^{-\frac{1}{2}}\|_{op}|\vec{f}|\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\|\mathscr{W}^{-1}_{2,Q}W^{\frac{1}{2}}\|_{op}|\vec{g}|\right)\\
\leq&[W]^{\frac{1}{2}}_{A_2}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\|\mathscr{W}'^{-1}_{2,Q}W^{-\frac{1}{2}}\|_{op}|\vec{f}|\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\|\mathscr{W}^{-1}_{2,Q}W^{\frac{1}{2}}\|_{op}|\vec{g}|\right)
\end{aligned}
$$

Vemos que

$$
\begin{aligned}
&\langle\langle W^{-\frac{1}{2}}\vec{f}\rangle\rangle_{1,Q}\langle\langle W^{\frac{1}{2}}\vec{g}\rangle\rangle_{1,Q}\\
=&\sup_{\|\varphi\|_{L^\infty}\leq 1,\|\phi\|_{L^\infty}\leq 1}\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q\frac{1}{|Q|}\int_Q\langle W^{-\frac{1}{2}}(x)\vec{f}(x)\varphi(x),W^{\frac{1}{2}}(y)\vec{g}(y)\psi(y)\rangle dxdy\right\}\\
\leq&\frac{1}{|Q|}\int_Q\frac{1}{|Q|}\int_Q|\langle W^{-\frac{1}{2}}(x)\vec{f}(x),W^{\frac{1}{2}}(y)\vec{g}(y)\rangle|dxdy\\
\leq&\frac{1}{|Q|}\int_Q\frac{1}{|Q|}\int_Q|\langle\mathscr{W}_{2,Q}'\mathscr{W}_{2,Q}'^{-1}W^{-\frac{1}{2}}(x)\vec{f}(x),\mathscr{W}_{2,Q}\mathscr{W}_{2,Q}^{-1}W^{\frac{1}{2}}(y)\vec{g}(y)\rangle|dxdy\\
=&\frac{1}{|Q|}\int_Q\frac{1}{|Q|}\int_Q|\langle\mathscr{W}_{2,Q}\mathscr{W}_{2,Q}'\mathscr{W}_{2,Q}'^{-1}W^{-\frac{1}{2}}(x)\vec{f}(x),\mathscr{W}_{2,Q}^{-1}W^{\frac{1}{2}}(y)\vec{g}(y)\rangle|dxdy\\
\leq&\frac{1}{|Q|}\int_Q\frac{1}{|Q|}\int_Q\|\mathscr{W}\mathscr{W}_{2,Q}'\|_{op}\|\mathscr{W}_{2,Q}'^{-1}W^{-\frac{1}{2}}(x)\|_{op}|\vec{f}(x)|\|\mathscr{W}_{2,Q}^{-1}W^{\frac{1}{2}}(y)\|_{op}|\vec{g}(y)|dxdy\\
\leq&\sup_Q|\mathscr{W}_{2,Q}\mathscr{W}_{2,Q}'|_{op}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\|\mathscr{W}_{2,Q}'^{-1}W^{-\frac{1}{2}}\|_{op}|\vec{f}|\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\|\mathscr{W}_{2,Q}^{-1}W^{\frac{1}{2}}\|_{op}|\vec{g}|\right)\\
\leq&[W]_{A_2}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\|\mathscr{W}_{2,Q}'^{-1}W^{-\frac{1}{2}}\|_{op}|\vec{f}|\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\|\mathscr{W}_{2,Q}^{-1}W^{\frac{1}{2}}\|_{op}|\vec{g}|\right)
\end{aligned}
$$

Vemos que

$$
\begin{aligned}
&\langle\langle W^{-\frac{1}{2}}\vec{f}\rangle\rangle_{1,Q}\langle\langle W^{\frac{1}{2}}\vec{g}\rangle\rangle_{1,Q}\\
=&\sup_{\|\varphi\|_{L^\infty}\leq 1,\|\phi\|_{L^\infty}\leq 1}\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q\frac{1}{|Q|}\int_Q\langle W^{-\frac{1}{2}}(x)\vec{f}(x)\varphi(x),W^{\frac{1}{2}}(y)\vec{g}(y)\psi(y)\rangle dxdy\right\}\\
\leq&\frac{1}{|Q|}\int_Q\frac{1}{|Q|}\int_Q|\langle W^{-\frac{1}{2}}(x)\vec{f}(x),W^{\frac{1}{2}}(y)\vec{g}(y)\rangle|dxdy\\
\leq&\frac{1}{|Q|}\int_Q\frac{1}{|Q|}\int_Q|\langle\mathscr{W}'_{2,Q}\mathscr{W}'^{-1}_{2,Q}W^{-\frac{1}{2}}(x)\vec{f}(x),\mathscr{W}_{2,Q}\mathscr{W}^{-1}_{2,Q}W^{\frac{1}{2}}(y)\vec{g}(y)\rangle|dxdy\\
=&\frac{1}{|Q|}\int_Q\frac{1}{|Q|}\int_Q|\langle\mathscr{W}_{2,Q}\mathscr{W}'_{2,Q}\mathscr{W}'^{-1}_{2,Q}W^{-\frac{1}{2}}(x)\vec{f}(x),\mathscr{W}^{-1}_{2,Q}W^{\frac{1}{2}}(y)\vec{g}(y)\rangle|dxdy\\
\leq&\frac{1}{|Q|}\int_Q\frac{1}{|Q|}\int_Q\|\mathscr{W}\mathscr{W}'_{2,Q}\|_{op}\|\mathscr{W}'^{-1}_{2,Q}W^{-\frac{1}{2}}(x)\|_{op}|\vec{f}(x)|\|\mathscr{W}^{-1}_{2,Q}W^{\frac{1}{2}}(y)\|_{op}|\vec{g}(y)|dxdy\\
\leq&\sup_Q|\mathscr{W}_{2,Q}\mathscr{W}'_{2,Q}|_{op}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\|\mathscr{W}'^{-1}_{2,Q}W^{-\frac{1}{2}}\|_{op}|\vec{f}|\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\|\mathscr{W}^{-1}_{2,Q}W^{\frac{1}{2}}\|_{op}|\vec{g}|\right)\\
\leq&[W]^{\frac{1}{2}}_{A_2}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\|\mathscr{W}'^{-1}_{2,Q}W^{-\frac{1}{2}}\|_{op}|\vec{f}|\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\|\mathscr{W}^{-1}_{2,Q}W^{\frac{1}{2}}\|_{op}|\vec{g}|\right)
\end{aligned}
$$

Teniendo en cuenta el slide anterior,

$$\sum_{Q\in\mathscr{S}_j} \langle\langle W^{-\frac{1}{2}}\vec{f}\rangle\rangle_{1,Q}\langle\langle W^{\frac{1}{2}}\vec{g}\rangle\rangle_{1,Q}|Q|$$

$$\leq [W]_{A_2}^{\frac{1}{2}} \sum_{Q\in\mathscr{S}_j}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \|\mathscr{W}_{2,Q}'^{-1}W^{-\frac{1}{2}}\|_{op}|\vec{f}|\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \|\mathscr{W}_{2,Q}^{-1}W^{\frac{1}{2}}\|_{op}|\vec{g}|\right)|Q|$$

$$\lesssim [W]_{A_2}^{\frac{1}{2}} \sum_{Q\in\mathscr{S}_j}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \|\mathscr{W}_{2,Q}'^{-1}W^{-\frac{1}{2}}\|_{op}|\vec{f}|\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \|\mathscr{W}_{2,Q}^{-1}W^{\frac{1}{2}}\|_{op}|\vec{g}|\right)|E_Q|$$

$$\leq [W]_{A_2}^{\frac{1}{2}} \sum_{Q\in\mathscr{S}_j}\inf_{z\in Q} M_1(|\vec{f}|)\inf_{z\in Q} M_2(|\vec{g}|)|E_Q| \leq [W]_{A_2}^{\frac{1}{2}}\sum_{Q\in\mathscr{S}_j}\int_{E_Q} M_1(|\vec{f}|)M_2(|\vec{g}|)$$

$$\leq [W]_{A_2}^{\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}^d} M_1(|\vec{f}|)M_2(|\vec{g}|) \leq [W]_{A_2}^{\frac{1}{2}}\|M_1(|\vec{f}|)\|_{L^2}\|M_2(|\vec{g}|)\|_{L^2}$$

Y para terminar la prueba bastaría ver que

$$\|M_i(h)\|_{L^2} \lesssim [W]_{A_2}^{\frac{1}{2}}\|h\|_{L^2}.$$

Teniendo en cuenta el slide anterior,

$$\sum_{Q\in\mathscr{S}_j} \langle\langle W^{-\frac{1}{2}}\vec{f}\rangle\rangle_{1,Q}\langle\langle W^{\frac{1}{2}}\vec{g}\rangle\rangle_{1,Q}|Q|$$
$$\leq [W]_{A_2}^{\frac{1}{2}} \sum_{Q\in\mathscr{S}_j}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \|\mathscr{W}_{2,Q}'^{-1}W^{-\frac{1}{2}}\|_{op}|\vec{f}|\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \|\mathscr{W}_{2,Q}^{-1}W^{\frac{1}{2}}\|_{op}|\vec{g}|\right)|Q|$$
$$\lesssim [W]_{A_2}^{\frac{1}{2}} \sum_{Q\in\mathscr{S}_j}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \|\mathscr{W}_{2,Q}'^{-1}W^{-\frac{1}{2}}\|_{op}|\vec{f}|\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \|\mathscr{W}_{2,Q}^{-1}W^{\frac{1}{2}}\|_{op}|\vec{g}|\right)|E_Q|$$
$$\leq [W]_{A_2}^{\frac{1}{2}} \sum_{Q\in\mathscr{S}_j}\inf_{z\in Q} M_1(|\vec{f}|)\inf_{z\in Q} M_2(|\vec{g}|)|E_Q| \leq [W]_{A_2}^{\frac{1}{2}}\sum_{Q\in\mathscr{S}_j}\int_{E_Q} M_1(|\vec{f}|)M_2(|\vec{g}|)$$
$$\leq [W]_{A_2}^{\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}^d} M_1(|\vec{f}|)M_2(|\vec{g}|) \leq [W]_{A_2}^{\frac{1}{2}}\|M_1(|\vec{f}|)\|_{L^2}\|M_2(|\vec{g}|)\|_{L^2}$$

Y para terminar la prueba bastaría ver que

$$\|M_i(h)\|_{L^2} \lesssim [W]_{A_2}^{\frac{1}{2}}\|h\|_{L^2}.$$

Teniendo en cuenta el slide anterior,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{Q\in\mathscr{S}_j} \langle\langle W^{-\frac{1}{2}}\vec{f}\rangle\rangle_{1,Q}\langle\langle W^{\frac{1}{2}}\vec{g}\rangle\rangle_{1,Q}|Q| \\
&\leq [W]_{A_2}^{\frac{1}{2}} \sum_{Q\in\mathscr{S}_j}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \|\mathscr{W}'^{-1}_{2,Q}W^{-\frac{1}{2}}\|_{op}|\vec{f}|\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \|\mathscr{W}^{-1}_{2,Q}W^{\frac{1}{2}}\|_{op}|\vec{g}|\right)|Q| \\
&\lesssim [W]_{A_2}^{\frac{1}{2}} \sum_{Q\in\mathscr{S}_j}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \|\mathscr{W}'^{-1}_{2,Q}W^{-\frac{1}{2}}\|_{op}|\vec{f}|\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \|\mathscr{W}^{-1}_{2,Q}W^{\frac{1}{2}}\|_{op}|\vec{g}|\right)|E_Q| \\
&\leq [W]_{A_2}^{\frac{1}{2}} \sum_{Q\in\mathscr{S}_j}\inf_{z\in Q} M_1(|\vec{f}|)\inf_{z\in Q} M_2(|\vec{g}|)|E_Q| \leq [W]_{A_2}^{\frac{1}{2}}\sum_{Q\in\mathscr{S}_j}\int_{E_Q} M_1(|\vec{f}|)M_2(|\vec{g}|) \\
&\leq [W]_{A_2}^{\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}^d} M_1(|\vec{f}|)M_2(|\vec{g}|) \leq [W]_{A_2}^{\frac{1}{2}}\|M_1(|\vec{f}|)\|_{L^2}\|M_2(|\vec{g}|)\|_{L^2}
\end{aligned}
$$

Y para terminar la prueba bastaría ver que

$$\|M_i(h)\|_{L^2} \lesssim [W]_{A_2}^{\frac{1}{2}}\|h\|_{L^2}.$$

Teniendo en cuenta el slide anterior,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{Q\in\mathscr{S}_j} \langle\langle W^{-\frac{1}{2}}\vec{f}\rangle\rangle_{1,Q}\langle\langle W^{\frac{1}{2}}\vec{g}\rangle\rangle_{1,Q}|Q| \\
&\leq [W]_{A_2}^{\frac{1}{2}} \sum_{Q\in\mathscr{S}_j}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \|\mathscr{W}_{2,Q}^{\prime -1} W^{-\frac{1}{2}}\|_{op}|\vec{f}|\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \|\mathscr{W}_{2,Q}^{-1} W^{\frac{1}{2}}\|_{op}|\vec{g}|\right)|Q| \\
&\lesssim [W]_{A_2}^{\frac{1}{2}} \sum_{Q\in\mathscr{S}_j}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \|\mathscr{W}_{2,Q}^{\prime -1} W^{-\frac{1}{2}}\|_{op}|\vec{f}|\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \|\mathscr{W}_{2,Q}^{-1} W^{\frac{1}{2}}\|_{op}|\vec{g}|\right)|E_Q| \\
&\leq [W]_{A_2}^{\frac{1}{2}} \sum_{Q\in\mathscr{S}_j} \operatorname{ínf}_{z\in Q} M_1(|\vec{f}|)\operatorname{ínf}_{z\in Q} M_2(|\vec{g}|)|E_Q| \leq [W]_{A_2}^{\frac{1}{2}} \sum_{Q\in\mathscr{S}_j}\int_{E_Q} M_1(|\vec{f}|)M_2(|\vec{g}|) \\
&\leq [W]_{A_2}^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} M_1(|\vec{f}|)M_2(|\vec{g}|) \leq [W]_{A_2}^{\frac{1}{2}} \|M_1(|\vec{f}|)\|_{L^2}\|M_2(|\vec{g}|)\|_{L^2}
\end{aligned}
$$

Y para terminar la prueba bastaría ver que

$$\|M_i(h)\|_{L^2} \lesssim [W]_{A_2}^{\frac{1}{2}}\|h\|_{L^2}.$$

Teniendo en cuenta el slide anterior,

$$\begin{aligned}
&\sum_{Q\in\mathscr{S}_j}\langle\langle W^{-\frac12}\vec{f}\rangle\rangle_{1,Q}\langle\langle W^{\frac12}\vec{g}\rangle\rangle_{1,Q}|Q|\\
&\leq [W]_{A_2}^{\frac12}\sum_{Q\in\mathscr{S}_j}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\|\mathscr{W}_{2,Q}'^{-1}W^{-\frac12}\|_{op}|\vec{f}|\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\|\mathscr{W}_{2,Q}^{-1}W^{\frac12}\|_{op}|\vec{g}|\right)|Q|\\
&\lesssim [W]_{A_2}^{\frac12}\sum_{Q\in\mathscr{S}_j}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\|\mathscr{W}_{2,Q}'^{-1}W^{-\frac12}\|_{op}|\vec{f}|\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\|\mathscr{W}_{2,Q}^{-1}W^{\frac12}\|_{op}|\vec{g}|\right)|E_Q|\\
&\leq [W]_{A_2}^{\frac12}\sum_{Q\in\mathscr{S}_j}\inf_{z\in Q}M_1(|\vec{f}|)\inf_{z\in Q}M_2(|\vec{g}|)|E_Q|\leq [W]_{A_2}^{\frac12}\sum_{Q\in\mathscr{S}_j}\int_{E_Q}M_1(|\vec{f}|)M_2(|\vec{g}|)\\
&\leq [W]_{A_2}^{\frac12}\int_{\mathbb{R}^d}M_1(|\vec{f}|)M_2(|\vec{g}|)\leq [W]_{A_2}^{\frac12}\|M_1(|\vec{f}|)\|_{L^2}\|M_2(|\vec{g}|)\|_{L^2}
\end{aligned}$$

Y para terminar la prueba bastaría ver que

$$\|M_i(h)\|_{L^2}\lesssim [W]_{A_2}^{\frac12}\|h\|_{L^2}.$$

Teniendo en cuenta el slide anterior,

$$\begin{aligned}
&\sum_{Q\in\mathscr{S}_j}\langle\langle W^{-\frac{1}{2}}\vec{f}\rangle\rangle_{1,Q}\langle\langle W^{\frac{1}{2}}\vec{g}\rangle\rangle_{1,Q}|Q|\\
&\leq [W]_{A_2}^{\frac{1}{2}}\sum_{Q\in\mathscr{S}_j}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\|\mathscr{W}_{2,Q}^{\prime\,-1}W^{-\frac{1}{2}}\|_{op}|\vec{f}|\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\|\mathscr{W}_{2,Q}^{-1}W^{\frac{1}{2}}\|_{op}|\vec{g}|\right)|Q|\\
&\lesssim [W]_{A_2}^{\frac{1}{2}}\sum_{Q\in\mathscr{S}_j}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\|\mathscr{W}_{2,Q}^{\prime\,-1}W^{-\frac{1}{2}}\|_{op}|\vec{f}|\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\|\mathscr{W}_{2,Q}^{-1}W^{\frac{1}{2}}\|_{op}|\vec{g}|\right)|E_Q|\\
&\leq [W]_{A_2}^{\frac{1}{2}}\sum_{Q\in\mathscr{S}_j}\inf_{z\in Q}M_1(|\vec{f}|)\inf_{z\in Q}M_2(|\vec{g}|)|E_Q|\leq [W]_{A_2}^{\frac{1}{2}}\sum_{Q\in\mathscr{S}_j}\int_{E_Q}M_1(|\vec{f}|)M_2(|\vec{g}|)\\
&\leq [W]_{A_2}^{\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}^d}M_1(|\vec{f}|)M_2(|\vec{g}|)\leq [W]_{A_2}^{\frac{1}{2}}\|M_1(|\vec{f}|)\|_{L^2}\|M_2(|\vec{g}|)\|_{L^2}
\end{aligned}$$

Y para terminar la prueba bastaría ver que

$$\|M_i(h)\|_{L^2}\lesssim [W]_{A_2}^{\frac{1}{2}}\|h\|_{L^2}.$$

Para $M_2(h)$, eligiendo $r = 1 + \frac{1}{\tau[W]_{A_2}}$ como $[|W^{\frac{1}{2}}(\cdot)\vec{e}|^2]_{A_2} \lesssim [W]_{A_2}$ uniformemente en $\vec{e}$,

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q \|\mathscr{W}_{2,Q}^{-1} W^{\frac{1}{2}}\|_{op} h \leq \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \|\mathscr{W}_{2,Q}^{-1} W^{\frac{1}{2}}\|_{op}^{2r}\right)^{\frac{1}{2r}} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q h^{(2r)'}\right)^{\frac{1}{(2r)'}}$$

$$\lesssim \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \|\mathscr{W}_{2,Q}^{-1} W^{\frac{1}{2}}\|_{op}^{2}\right)^{\frac{1}{2}} \inf_{z\in Q} M(h^{(2r)'})^{\frac{1}{(2r)'}}(z)$$

$$\simeq \|\mathscr{W}_{2,Q}^{-1}\mathscr{W}_{2,Q}\|_{op} \inf_{z\in Q} M(h^{(2r)'})^{\frac{1}{(2r)'}}(z)$$

$$\simeq \inf_{z\in Q} M(h^{(2r)'})^{\frac{1}{(2r)'}}(z)$$

Por tanto

$$\|M_2(h)\|_{L^2} \lesssim \|M(h^{(2r)'})^{\frac{1}{(2r)'}}\|_{L^2} \lesssim \left[\left(\frac{2}{(2r)'}\right)'\right]^{\frac{1}{(2r)'}} \|h\|_{L^2}.$$

Finalmente la estimación se sigue del hecho de que

$$\left[\left(\frac{2}{(2r)'}\right)'\right]^{\frac{1}{(2r)'}} \lesssim [W]_{A_2}^{\frac{1}{2}}.$$

Para $M_2(h)$, eligiendo $r = 1 + \frac{1}{\tau[W]_{A_2}}$ como $[|W^{\frac{1}{2}}(\cdot)\vec{e}|^2]_{A_2} \lesssim [W]_{A_2}$ uniformemente en $\vec{e}$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|}\int_Q \|\mathscr{W}_{2,Q}^{-1} W^{\frac{1}{2}}\|_{op} h &\leq \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \|\mathscr{W}_{2,Q}^{-1} W^{\frac{1}{2}}\|_{op}^{2r}\right)^{\frac{1}{2r}} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q h^{(2r)'}\right)^{\frac{1}{(2r)'}} \\
&\lesssim \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \|\mathscr{W}_{2,Q}^{-1} W^{\frac{1}{2}}\|_{op}^{2}\right)^{\frac{1}{2}} \inf_{z\in Q} M(h^{(2r)'})^{\frac{1}{(2r)'}}(z) \\
&\simeq \|\mathscr{W}_{2,Q}^{-1}\mathscr{W}_{2,Q}\|_{op} \inf_{z\in Q} M(h^{(2r)'})^{\frac{1}{(2r)'}}(z) \\
&\simeq \inf_{z\in Q} M(h^{(2r)'})^{\frac{1}{(2r)'}}(z)
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\|M_2(h)\|_{L^2} \lesssim \|M(h^{(2r)'})^{\frac{1}{(2r)'}}\|_{L^2} \lesssim \left[\left(\frac{2}{(2r)'}\right)'\right]^{\frac{1}{(2r)'}} \|h\|_{L^2}.$$

Finalmente la estimación se sigue del hecho de que

$$\left[\left(\frac{2}{(2r)'}\right)'\right]^{\frac{1}{(2r)'}} \lesssim [W]_{A_2}^{\frac{1}{2}}.$$

Para $M_2(h)$, eligiendo $r = 1 + \frac{1}{\tau[W]_{A_2}}$ como $[|W^{\frac{1}{2}}(\cdot)\vec{e}|^2]_{A_2} \lesssim [W]_{A_2}$ uniformemente en $\vec{e}$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|}\int_Q \|\mathscr{W}_{2,Q}^{-1} W^{\frac{1}{2}}\|_{op} h &\leq \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \|\mathscr{W}_{2,Q}^{-1} W^{\frac{1}{2}}\|_{op}^{2r}\right)^{\frac{1}{2r}} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q h^{(2r)'}\right)^{\frac{1}{(2r)'}} \\
&\lesssim \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \|\mathscr{W}_{2,Q}^{-1} W^{\frac{1}{2}}\|_{op}^{2}\right)^{\frac{1}{2}} \inf_{z\in Q} M(h^{(2r)'})^{\frac{1}{(2r)'}}(z) \\
&\simeq \|\mathscr{W}_{2,Q}^{-1}\mathscr{W}_{2,Q}\|_{op} \inf_{z\in Q} M(h^{(2r)'})^{\frac{1}{(2r)'}}(z) \\
&\simeq \inf_{z\in Q} M(h^{(2r)'})^{\frac{1}{(2r)'}}(z)
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\|M_2(h)\|_{L^2} \lesssim \|M(h^{(2r)'})^{\frac{1}{(2r)'}}\|_{L^2} \lesssim \left[\left(\frac{2}{(2r)'}\right)'\right]^{\frac{1}{(2r)'}} \|h\|_{L^2}.$$

Finalmente la estimación se sigue del hecho de que

$$\left[\left(\frac{2}{(2r)'}\right)'\right]^{\frac{1}{(2r)'}} \lesssim [W]_{A_2}^{\frac{1}{2}}.$$

Para $M_2(h)$, eligiendo $r = 1 + \frac{1}{\tau[W]_{A_2}}$ como $[|W^{\frac{1}{2}}(\cdot)\vec{e}|^2]_{A_2} \lesssim [W]_{A_2}$ uniformemente en $\vec{e}$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|}\int_Q \|\mathscr{W}_{2,Q}^{-1} W^{\frac{1}{2}}\|_{op} h &\leq \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \|\mathscr{W}_{2,Q}^{-1} W^{\frac{1}{2}}\|_{op}^{2r}\right)^{\frac{1}{2r}} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q h^{(2r)'}\right)^{\frac{1}{(2r)'}} \\
&\lesssim \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \|\mathscr{W}_{2,Q}^{-1} W^{\frac{1}{2}}\|_{op}^{2}\right)^{\frac{1}{2}} \inf_{z\in Q} M(h^{(2r)'})^{\frac{1}{(2r)'}}(z) \\
&\simeq \|\mathscr{W}_{2,Q}^{-1}\mathscr{W}_{2,Q}\|_{op} \inf_{z\in Q} M(h^{(2r)'})^{\frac{1}{(2r)'}}(z) \\
&\simeq \inf_{z\in Q} M(h^{(2r)'})^{\frac{1}{(2r)'}}(z)
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\|M_2(h)\|_{L^2} \lesssim \|M(h^{(2r)'})^{\frac{1}{(2r)'}}\|_{L^2} \lesssim \left[\left(\frac{2}{(2r)'}\right)'\right]^{\frac{1}{(2r)'}} \|h\|_{L^2}.$$

Finalmente la estimación se sigue del hecho de que

$$\left[\left(\frac{2}{(2r)'}\right)'\right]^{\frac{1}{(2r)'}} \lesssim [W]_{A_2}^{\frac{1}{2}}.$$

Para $M_2(h)$, eligiendo $r = 1 + \frac{1}{\tau[W]_{A_2}}$ como $[|W^{\frac{1}{2}}(\cdot)\vec{e}|^2]_{A_2} \lesssim [W]_{A_2}$ uniformemente en $\vec{e}$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|}\int_Q \|\mathscr{W}_{2,Q}^{-1} W^{\frac{1}{2}}\|_{op} h &\leq \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \|\mathscr{W}_{2,Q}^{-1} W^{\frac{1}{2}}\|_{op}^{2r}\right)^{\frac{1}{2r}} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q h^{(2r)'}\right)^{\frac{1}{(2r)'}} \\
&\lesssim \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \|\mathscr{W}_{2,Q}^{-1} W^{\frac{1}{2}}\|_{op}^{2}\right)^{\frac{1}{2}} \inf_{z\in Q} M(h^{(2r)'})^{\frac{1}{(2r)'}}(z) \\
&\simeq \|\mathscr{W}_{2,Q}^{-1}\mathscr{W}_{2,Q}\|_{op} \inf_{z\in Q} M(h^{(2r)'})^{\frac{1}{(2r)'}}(z) \\
&\simeq \inf_{z\in Q} M(h^{(2r)'})^{\frac{1}{(2r)'}}(z)
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\|M_2(h)\|_{L^2} \lesssim \|M(h^{(2r)'})^{\frac{1}{(2r)'}}\|_{L^2} \lesssim \left[\left(\frac{2}{(2r)'}\right)'\right]^{\frac{1}{(2r)'}} \|h\|_{L^2}.$$

Finalmente la estimación se sigue del hecho de que

$$\left[\left(\frac{2}{(2r)'}\right)'\right]^{\frac{1}{(2r)'}} \lesssim [W]_{A_2}^{\frac{1}{2}}.$$

Para $M_2(h)$, eligiendo $r = 1 + \frac{1}{\tau[W]_{A_2}}$ como $[|W^{\frac{1}{2}}(\cdot)\vec{e}|^2]_{A_2} \lesssim [W]_{A_2}$ uniformemente en $\vec{e}$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|}\int_Q \|\mathscr{W}_{2,Q}^{-1} W^{\frac{1}{2}}\|_{op} h &\le \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \|\mathscr{W}_{2,Q}^{-1} W^{\frac{1}{2}}\|_{op}^{2r}\right)^{\frac{1}{2r}} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q h^{(2r)'}\right)^{\frac{1}{(2r)'}} \\
&\lesssim \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \|\mathscr{W}_{2,Q}^{-1} W^{\frac{1}{2}}\|_{op}^{2}\right)^{\frac{1}{2}} \inf_{z\in Q} M(h^{(2r)'})^{\frac{1}{(2r)'}}(z) \\
&\simeq \|\mathscr{W}_{2,Q}^{-1}\mathscr{W}_{2,Q}\|_{op} \inf_{z\in Q} M(h^{(2r)'})^{\frac{1}{(2r)'}}(z) \\
&\simeq \inf_{z\in Q} M(h^{(2r)'})^{\frac{1}{(2r)'}}(z)
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\|M_2(h)\|_{L^2} \lesssim \|M(h^{(2r)'})^{\frac{1}{(2r)'}}\|_{L^2} \lesssim \left[\left(\frac{2}{(2r)'}\right)'\right]^{\frac{1}{(2r)'}} \|h\|_{L^2}.$$

Finalmente la estimación se sigue del hecho de que

$$\left[\left(\frac{2}{(2r)'}\right)'\right]^{\frac{1}{(2r)'}} \lesssim [W]_{A_2}^{\frac{1}{2}}.$$

Desigualdades de tipo Coifman-Fefferman

Estimaciones de tipo Coifman-Fefferman

En el caso escalar, la clásica desigualdad Coifman-Fefferman afirma que si T es un operador de Calderon-Zygmund, $0 < p < \infty$ y $w \in A_\infty$ entonces

$$\|Tf\|_{L^p(w)} \lesssim c_w \|Mf\|_{L^p(w)}$$

donde $c_w = [w]_{A_\infty}$.

- Si T es un operador $L^{r'}$-Hörmander

$$\|Tf\|_{L^p(w)} \lesssim [w]_{A_\infty} \|f\|_{L^p(w)}$$

- Si $\Omega \in L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$ con $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega = 0$ entonces

$$\|T_\Omega f\|_{L^p(w)} \lesssim \|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})} [w]_{A_\infty}^2 \|f\|_{L^p(w)}.$$

Desigualdades de tipo Coifman-Fefferman

Estimaciones de tipo Coifman-Fefferman

En el caso escalar, la clásica desigualdad Coifman-Fefferman afirma que si T es un operador de Calderon-Zygmund, $0 < p < \infty$ y $w \in A_\infty$ entonces

$$\|Tf\|_{L^p(w)} \lesssim c_w \|Mf\|_{L^p(w)}$$

donde $c_w = [w]_{A_\infty}$.

- Si T es un operador $L^{r'}$-Hörmander

$$\|Tf\|_{L^p(w)} \lesssim [w]_{A_\infty} \|f\|_{L^p(w)}$$

- Si $\Omega \in L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$ con $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega = 0$ entonces

$$\|T_\Omega f\|_{L^p(w)} \lesssim \|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})} [w]_{A_\infty}^2 \|f\|_{L^p(w)}.$$

Desigualdades de tipo Coifman-Fefferman

Estimaciones de tipo Coifman-Fefferman

En el caso escalar, la clásica desigualdad Coifman-Fefferman afirma que si T es un operador de Calderon-Zygmund, $0 < p < \infty$ y $w \in A_\infty$ entonces

$$\|Tf\|_{L^p(w)} \lesssim c_w \|Mf\|_{L^p(w)}$$

donde $c_w = [w]_{A_\infty}$.

- Si T es un operador $L^{r'}$-Hörmander

$$\|Tf\|_{L^p(w)} \lesssim [w]_{A_\infty} \|f\|_{L^p(w)}$$

- Si $\Omega \in L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$ con $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega = 0$ entonces

$$\|T_\Omega f\|_{L^p(w)} \lesssim \|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})} [w]^2_{A_\infty} \|f\|_{L^p(w)}.$$

Recordamos que $|\mathscr{W}_{p,Q}\vec{e}| \simeq \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |W^{\frac{1}{p}}(x)\vec{e}|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \qquad p \geq 1$

Teorema

(Muller - R-R) Sea $p > 1$. Entonces

- *Si $W \in A^{sc}_{\infty,p}$ y T es un operador $L^{r'}$-Hörmander y $p > r \geq 1$ entonces*

$$\||W^{\frac{1}{p}}T(W^{-\frac{1}{p}}\vec{f})|\|_{L^p} \lesssim [W]^{\frac{1}{p}}_{A^{sc}_{\infty,\frac{p}{r}}} \left\|\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |\mathscr{W}^{\frac{1}{r}}_{\frac{p}{r},Q} W^{-\frac{1}{p}}\vec{f}|^r\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_{L^p}.$$

- *Si $W \in A^{sc}_{\infty,p}$ y $\Omega \in L^\infty(\mathbb{S}^{d-1})$ con $\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\Omega = 0$*

$$\||W^{\frac{1}{p}}T_\Omega(W^{-\frac{1}{p}}\vec{f})|\|_{L^p} \lesssim [W]^{1+\frac{1}{p}}_{A^{sc}_{\infty,p}} \left\|\sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q |\mathscr{W}_{p,Q} W^{-\frac{1}{p}}\vec{f}|\right\|_{L^p}.$$

Donde $[W]_{A^{sc}_{\infty,p}} = \sup_{\vec{e}\neq 0}\left[|W^{\frac{1}{p}}(\cdot)\vec{e}|^p\right]_{A_\infty}$.

Observación

- La dependencia pareciera mejor que la del caso escalar, pero no necesariamente lo es.
- La no linealidad de la función maximal, que lleva a estudiar versiones con pesos, hace razonables estas desigualdades.

Recordamos que $|\mathscr{W}_{p,Q}\vec{e}| \simeq \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |W^{\frac{1}{p}}(x)\vec{e}|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \qquad p \geq 1$

Teorema

(Muller - R-R) Sea $p > 1$. Entonces

- *Si $W \in A^{sc}_{\infty,p}$ y T es un operador $L^{r'}$-Hörmander y $p > r \geq 1$ entonces*

$$\||W^{\frac{1}{p}}T(W^{-\frac{1}{p}}\vec{f})|\|_{L^p} \lesssim [W]^{\frac{1}{p}}_{A^{sc}_{\infty,\frac{p}{r}}} \left\| \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |\mathscr{W}^{\frac{1}{r}}_{\frac{p}{r},Q} W^{-\frac{1}{p}}\vec{f}|^r\right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^p}.$$

- *Si $W \in A^{sc}_{\infty,p}$ y $\Omega \in L^\infty(\mathbb{S}^{d-1})$ con $\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Omega = 0$*

$$\||W^{\frac{1}{p}}T_\Omega(W^{-\frac{1}{p}}\vec{f})|\|_{L^p} \lesssim [W]^{1+\frac{1}{p}}_{A^{sc}_{\infty,p}} \left\| \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q |\mathscr{W}_{p,Q} W^{-\frac{1}{p}}\vec{f}| \right\|_{L^p}.$$

Donde $[W]_{A^{sc}_{\infty,p}} = \sup_{\vec{e}\neq 0}\left[|W^{\frac{1}{p}}(\cdot)\vec{e}|^p\right]_{A_\infty}$.

Observación

- La dependencia pareciera mejor que la del caso escalar, pero no necesariamente lo es.
- La no linealidad de la función maximal, que lleva a estudiar versiones con pesos, hace razonables estas desigualdades.

Recordamos que $|\mathscr{W}_{p,Q}\vec{e}| \simeq \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |W^{\frac{1}{p}}(x)\vec{e}|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \qquad p \geq 1$

Teorema

(Muller - R-R) Sea $p > 1$. Entonces

- *Si $W \in A^{sc}_{\infty,p}$ y T es un operador $L^{r'}$-Hörmander y $p > r \geq 1$ entonces*

$$\| |W^{\frac{1}{p}} T(W^{-\frac{1}{p}}\vec{f})| \|_{L^p} \lesssim [W]^{\frac{1}{p}}_{A^{sc}_{\infty,\frac{p}{r}}} \left\| \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |\mathscr{W}^{\frac{1}{r}}_{\frac{p}{r},Q} W^{-\frac{1}{p}}\vec{f}|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^p}.$$

- *Si $W \in A^{sc}_{\infty,p}$ y $\Omega \in L^\infty(\mathbb{S}^{d-1})$ con $\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Omega = 0$*

$$\| |W^{\frac{1}{p}} T_\Omega(W^{-\frac{1}{p}}\vec{f})| \|_{L^p} \lesssim [W]^{1+\frac{1}{p}}_{A^{sc}_{\infty,p}} \left\| \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |\mathscr{W}_{p,Q} W^{-\frac{1}{p}}\vec{f}| \right\|_{L^p}.$$

Donde $[W]_{A^{sc}_{\infty,p}} = \sup_{\vec{e}\neq 0} \left[|W^{\frac{1}{p}}(\cdot)\vec{e}|^p \right]_{A_\infty}$.

Observación

- La dependencia pareciera mejor que la del caso escalar, pero no necesariamente lo es.
- La no linealidad de la función maximal, que lleva a estudiar versiones con pesos, hace razonables estas desigualdades.

Contenidos

¿Qué estimaciones estudiar?

En el caso escalar las estimaciones pesadas en el extremo tienen la siguiente forma. Dado un operador G, es de tipo débil $(1,1)$ si

$$w\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d : |G\vec{f}(x)| > t\right\}\right) \leq c_{G,w} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\vec{f}(x)|}{t} w(x)dx.$$

Si considerásemos el tipo fuerte $(1,1)$ la estimación sería equivalente a la siguiente

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left|W(x)G\left(W^{-1}\vec{f}\right)(x)\right| dx \leq c_{G,W} \int_{\mathbb{R}^d} \left|\vec{f}(x)\right| dx.$$

Esto motiva el plantearse el estudio de las siguientes desigualdades

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^d : \left|W(x)G\left(W^{-1}\vec{f}\right)(x)\right| > t\right\}\right| \leq c_{G,W} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\left|\vec{f}(x)\right|}{t} dx.$$

Observación

- Autores con trabajos en esa dirección: Muckenhoupt, Wheeden, Sawyer, Cruz-Uribe, Martell, Pérez, Ombrosi, Recchi, Li, Carena, Berra, Pradolini, Picardi, Caldarelli.

¿Qué estimaciones estudiar?

En el caso escalar las estimaciones pesadas en el extremo tienen la siguiente forma. Dado un operador G, es de tipo débil $(1,1)$ si

$$w\left(\left\{x\in\mathbb{R}^d : |G\vec{f}(x)|>t\right\}\right)\leq c_{G,w}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\vec{f}(x)|}{t}w(x)dx.$$

Si considerásemos el tipo fuerte $(1,1)$ la estimación sería equivalente a la siguiente

$$\int_{\mathbb{R}^d}\left|W(x)G\left(W^{-1}\vec{f}\right)(x)\right|dx\leq c_{G,W}\int_{\mathbb{R}^d}\left|\vec{f}(x)\right|dx.$$

Esto motiva el plantearse el estudio de las siguientes desigualdades

$$\left|\left\{x\in\mathbb{R}^d : \left|W(x)G\left(W^{-1}\vec{f}\right)(x)\right|>t\right\}\right|\leq c_{G,W}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\left|\vec{f}(x)\right|}{t}dx.$$

Observación

- Autores con trabajos en esa dirección: Muckenhoupt, Wheeden, Sawyer, Cruz-Uribe, Martell, Pérez, Ombrosi, Recchi, Li, Carena, Berra, Pradolini, Picardi, Caldarelli.

¿Qué estimaciones estudiar?

En el caso escalar las estimaciones pesadas en el extremo tienen la siguiente forma. Dado un operador G, es de tipo débil $(1,1)$ si

$$w\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d : |G\vec{f}(x)| > t\right\}\right) \leq c_{G,w} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\vec{f}(x)|}{t} w(x)dx.$$

Si considerásemos el tipo fuerte $(1,1)$ la estimación sería equivalente a la siguiente

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left|W(x)G\left(W^{-1}\vec{f}\right)(x)\right| dx \leq c_{G,W} \int_{\mathbb{R}^d} \left|\vec{f}(x)\right| dx.$$

Esto motiva el plantearse el estudio de las siguientes desigualdades

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^d : \left|W(x)G\left(W^{-1}\vec{f}\right)(x)\right| > t\right\}\right| \leq c_{G,W} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\left|\vec{f}(x)\right|}{t} dx.$$

Observación

- Autores con trabajos en esa dirección: Muckenhoupt, Wheeden, Sawyer, Cruz-Uribe, Martell, Pérez, Ombrosi, Recchi, Li, Carena, Berra, Pradolini, Picardi, Caldarelli.

¿Qué estimaciones estudiar?

En el caso escalar las estimaciones pesadas en el extremo tienen la siguiente forma. Dado un operador G, es de tipo débil $(1,1)$ si

$$w\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d : |G\vec{f}(x)| > t\right\}\right) \leq c_{G,w} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\vec{f}(x)|}{t} w(x) dx.$$

Si considerásemos el tipo fuerte $(1,1)$ la estimación sería equivalente a la siguiente

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left| W(x) G\left(W^{-1}\vec{f}\right)(x) \right| dx \leq c_{G,W} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \vec{f}(x) \right| dx.$$

Esto motiva el plantearse el estudio de las siguientes desigualdades

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^d : \left| W(x) G\left(W^{-1}\vec{f}\right)(x) \right| > t\right\}\right| \leq c_{G,W} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\left|\vec{f}(x)\right|}{t} dx.$$

Observación

- Autores con trabajos en esa dirección: Muckenhoupt, Wheeden, Sawyer, Cruz-Uribe, Martell, Pérez, Ombrosi, Recchi, Li, Carena, Berra, Pradolini, Picardi, Caldarelli.

Estimaciones en el extremo conocidas

Teorema (Cruz-Uribe, Isralowitz, Moen, Pott, R-R / Muller, R-R)

Si $W \in A_1$, entonces

- *Si* $M_{W,1}\vec{f}(x) = \sup_{x\in Q} \frac{1}{|Q|}\int_Q \left|W(x)W^{-1}(y)\vec{f}(y)\right| dy$

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^d : \left|M_{W,1}\vec{f}(x)\right| > t\right\}\right| \leq c_{n,d}[W]_{A_1}^2 \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\left|\vec{f}(x)\right|}{t} dx.$$

- *Si T es un operador $L^{r'}$-Hörmander,*

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^d : \left|W(x)T(W^{-1}f)(x)\right| > t\right\}\right| \leq c_{n,d,T}[W]_{A_1}^{r+1} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\left|\vec{f}(x)\right|^r}{t^r} dx.$$

- *Si T_Ω es una integral singular rough con $\Omega \in L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$*

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^d : \left|W(x)T_\Omega(W^{-1}\vec{f})(x)\right| > t\right\}\right| \leq c_{n,d}\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})}[W]_{A_1}^3 \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\left|\vec{f}(x)\right|}{t} dx.$$

Estimaciones en el extremo conocidas

Teorema (Cruz-Uribe, Isralowitz, Moen, Pott, R-R / Muller, R-R)

Si $W \in A_1$, entonces

- *Si* $M_{W,1}\vec{f}(x) = \sup_{x\in Q} \frac{1}{|Q|}\int_Q \left|W(x)W^{-1}(y)\vec{f}(y)\right| dy$

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^d : \left|M_{W,1}\vec{f}(x)\right| > t\right\}\right| \leq c_{n,d}[W]_{A_1}^2 \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\left|\vec{f}(x)\right|}{t} dx.$$

- *Si T es un operador $L^{r'}$-Hörmander,*

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^d : |W(x)T(W^{-1}f)(x)| > t\right\}\right| \leq c_{n,d,T}[W]_{A_1}^{r+1} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\left|\vec{f}(x)\right|^r}{t^r} dx.$$

- *Si T_Ω es una integral singular rough con $\Omega \in L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$*

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^d : \left|W(x)T_\Omega(W^{-1}\vec{f})(x)\right| > t\right\}\right| \leq c_{n,d}\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})}[W]_{A_1}^3 \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\left|\vec{f}(x)\right|}{t} dx.$$

Estimaciones en el extremo conocidas

Teorema (Cruz-Uribe, Isralowitz, Moen, Pott, R-R / Muller, R-R)

Si $W \in A_1$, entonces

- *Si* $M_{W,1}\vec{f}(x) = \sup_{x\in Q} \frac{1}{|Q|}\int_Q \left|W(x)W^{-1}(y)\vec{f}(y)\right| dy$

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^d : \left|M_{W,1}\vec{f}(x)\right| > t\right\}\right| \leq c_{n,d}[W]_{A_1}^2 \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\left|\vec{f}(x)\right|}{t} dx.$$

- *Si T es un operador $L^{r'}$-Hörmander,*

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^d : |W(x)T(W^{-1}f)(x)| > t\right\}\right| \leq c_{n,d,T}[W]_{A_1}^{r+1} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\left|\vec{f}(x)\right|^r}{t^r} dx.$$

- *Si T_Ω es una integral singular rough con $\Omega \in L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$*

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^d : \left|W(x)T_\Omega(W^{-1}\vec{f})(x)\right| > t\right\}\right| \leq c_{n,d}\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})}[W]_{A_1}^3 \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\left|\vec{f}(x)\right|}{t} dx.$$


THANK
YOU
GRACIAS
ARIGATO
SHUKURIA
DANKSCHEEN
GRÀCIES
TASHAKKUR ATU
YAQHANYELAY
SUKSAMA
EKHMET
MEHRBANI
GRAZIE
MAAKE
KOMAPSUMNIDA
GOZAIMASHITA
EFCHARISTO
ESKERRIK ASKO
JUSPAXAR
BOLZÏN
MERCI
TACK
BİYAN
SHUKRIA
KIITOS
TINGKI
GRAZAS
PALDIES
SPASSIBO
SNACHALHUYA
NUHUN
CHALTU
WABEEJA
MAITEKA
YUSPAGARATAM
HUI
GUI
HATUR
UNALCHÉESH
SPASIBO
DENKAUJA
NENACHALHYA
MERSI
ATTO
DHANYABAAD
ANIHA
SANCO
MERASTAWHY
GAEJTHO
LAH
TAVTAPUCH
MEDAWAGSE
BAIIKA
AGUYJE
FAKAAUE
EKOJU
SIKOMO
MAKETAI
MINMONCHAR

- Muller, Pamela A.; Rivera-Ríos, Israel P.; Quantitative matrix weighted estimates for certain singular integral operators J. Math. Anal. Appl. 509 (2022), no. 1, Paper No. 125939. 42.
- Cruz-Uribe, David; Isralowitz, Joshua; Moen, Kabe; Pott, Sandra; Rivera-Ríos, Israel P. Weak endpoint bounds for matrix weights Rev. Mat. Iberoam.. 37 (2021), no. 4, 1513–1538.
- Isralowitz, Joshua; Pott, Sandra; Rivera-Ríos, Israel P. Sharp A_1 weighted estimates for vector valued operators J. Geom. Anal. 31 (2021), no. 3, 3085–3116.