

Algunas contribuciones matemáticas del Profesor José María Montesinos Amilibia

María Teresa Lozano Imízcoz

IUMA-Universidad de Zaragoza, RSME

Homenaje J.M. Montesinos UCM
Madrid 8 de Septiembre 2015

Resumen

- 1 Variedades de dimensión 3
 - Cubiertas dobles de S^3 ramificadas sobre enlaces: Enlaces de Montesinos
 - Las 3-variedades como cubiertas de S^3 : Cubiertas irregulares de 3 hojas, Nudos universales, Grupo universal
- 2 Geometría en variedades cónicas y orbifolds
- 3 Dimensión 4
- 4 Libros
 - Variedades de mosaicos
 - Aplicaciones pseudo-periódicas y degeneración de Superficies de Riemann
- 5 Formas cuadráticas

Cubiertas dobles de S^3 ramificadas sobre enlaces

Reimpreso del BOLETIN DE LA SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA, VOL. 18, NO. 1, 1973
Printed in U.S.A.

VARIETADES DE SEIFERT QUE SON RECUBRIDORES CICLICOS RAMIFICADOS DE DOS HOJAS

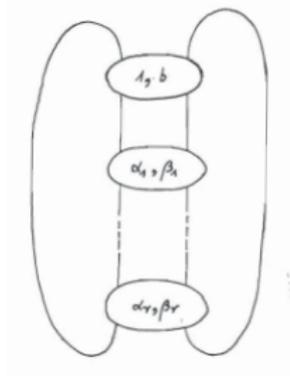
Por JOSÉ M. MONTESINOS

Teorema

Las variedades de Seifert con base S^2 o base no orientable son recubridores cíclicos de dos hojas de S^3 ramificados sobre un enlace especial. ("de Montesinos")

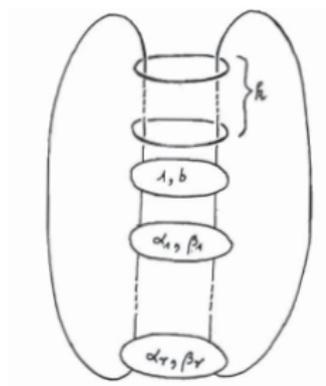
Cubiertas dobles de S^3 ramificadas sobre enlaces

$$(Oo0|b; (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_n, \beta_n))$$



Base la esfera S^2 .

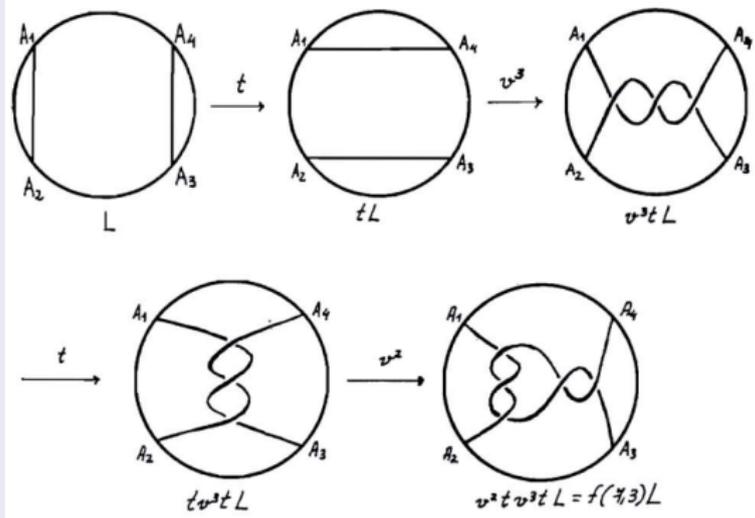
$$(Onk|b; (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_n, \beta_n))$$



Base una superficie no orientable.

Cubiertas dobles de S^3 ramificadas sobre enlaces

Ovillo racional



Ejemplo: $\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$

Cubiertas dobles de S^3 ramificadas sobre enlaces

New Geometric Splittings of Classical Knots
and
the Classification and Symmetries of
Arborescent Knots

Francis Bonahon & Laurence C. Siebenmann

Department of Mathematics
University of Southern California
Los Angeles, CA 90089-2532, U.S.A.

Mathématique, Bâtiment 425
Université de Paris-Sud
91405 Orsay Cedex, France

Version: June 12, 2010

Preface to the 30-th year edition

*Dedicated to José Montesinos
on the occasion of his 65-th birthday*

We began writing this monograph in 1979. It originally started as an article for the conference proceedings [BroT], but it soon developed into a book project of its own

...

A large part of the mathematics in this book can be traced back to a series of lectures that José Montesinos gave at Orsay in the spring of 1976. In particular, the first author fondly remembers the many meetings that he had with José in the *Jardin du Luxembourg* in Paris, where José suggested as a possible research topic the classification of what we call here Montesinos knots. This became the dissertation [Bon₁], and consequently

...

Cubiertas dobles de S^3 ramificadas sobre enlaces

SURGERY ON LINKS AND DOUBLE BRANCHED COVERS OF S^3

José M. Montesinos

L. P. Neuwirth (editor). *Knots, groups and 3-manifolds*, Annals of Mathematical studies 84, PUP, 227-259.

Relación entre cubiertas de dos hojas ramificadas sobre un enlace de S^3 y variedades obtenidas por cirugía en un enlace de S^3 .

cirugía generalizada

Sustituye cada toro de un conjunto de toros sólidos disjuntos de S^3 por sendas variedades de grafo cuyo borde es un toro.

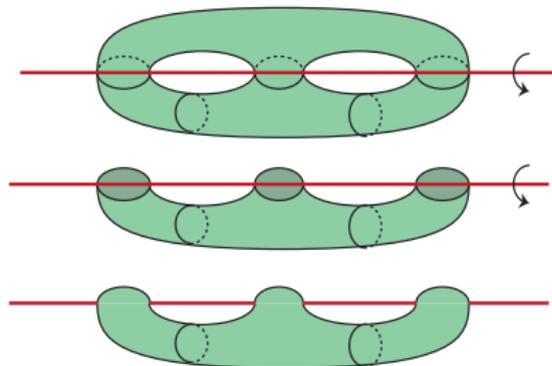
Las 3-variedades como cubiertas ramificadas de S^3

Uno de los métodos utilizados para construir todas las 3-variedades cerradas y orientables es cubierta ramificada sobre un enlace o nudo en S^3 .

Método introducido para 3-variedades por Alexander en 1920, JMMA ha alcanzado los mejores resultados en dos direcciones: mínimo número de hojas y lugar común de ramificación más simple.

Superficies

Toda superficie cerrada y orientable F_g es cubierta de **dos hojas** de la esfera S^2 ramificada sobre $2g + 2$ puntos.



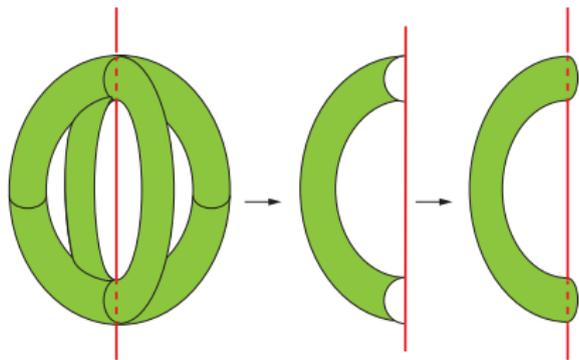
Las 3-variedades como cubiertas ramificadas de S^3

Uno de los métodos utilizados para construir todas las 3-variedades cerradas y orientables es cubierta ramificada sobre un enlace o nudo en S^3 .

Método introducido para 3-variedades por Alexander en 1920, JMMA ha alcanzado los mejores resultados en dos direcciones: mínimo número de hojas y lugar común de ramificación más simple.

Superficies

Toda superficie cerrada y orientable F_g es cubierta de la esfera S^2 ramificada sobre **4 puntos**.



Cubiertas irregulares de 3 hojas

Mejor resultado respecto al número de hojas

BULLETIN OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 80, Number 5, September 1974

A REPRESENTATION OF CLOSED, ORIENTABLE 3-MANIFOLDS AS 3-FOLD BRANCHED COVERINGS OF S^3

BY JOSÉ M. MONTESINOS

Communicated by William Browder, April 5, 1974

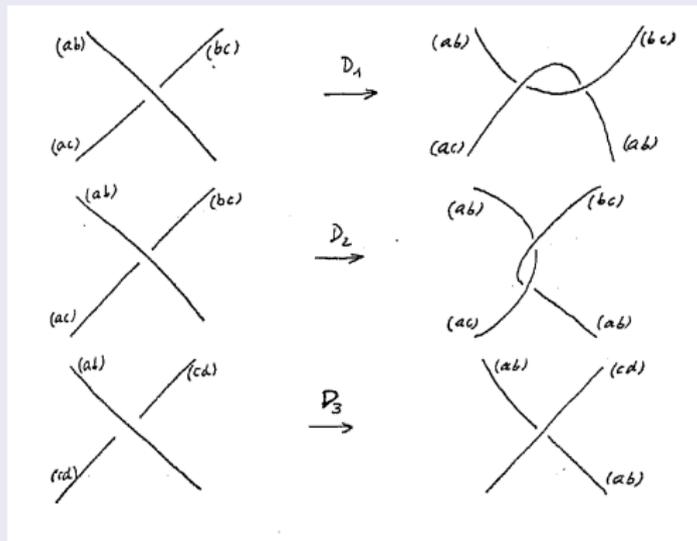
Teorema

Toda 3-variedad cerrada y orientable es cubierta irregular de tres hojas de S^3 ramificada sobre un nudo

Mismo resultado casi simultáneamente por M. Hilden.

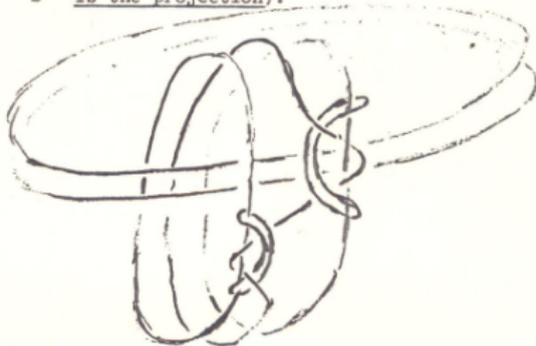
Cubiertas irregulares de 3 hojas

Jugadas de Montesinos



Nudos universales

Theorem C. There is a link $L_1 \subset S^3$ (shown below) such that every closed oriented three-manifold M is a branched covering of S^3 over L_1 with branching index 1 or 2 for each component of $p^{-1}(L_1)$ in M .
(where $p: M \rightarrow S^3$ is the projection).



A universally branching link.

Questions. Is there a universal knot? Is the figure-eight knot universal? Is the Whitehead link a universally branching link?

Nudos universales, HLM

Teorema

Existen nudos universales. Bull. AMS 1983

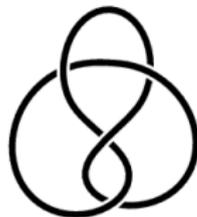
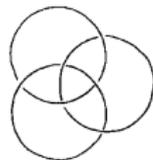
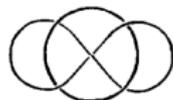
Teorema

The Whitehead link, the Borromean rings and the knot 9_{46} are universal. Collect. Math. 1983

Teorema

El nudo Ocho 4_1 es universal. On knots that are universal. Topology, 1985

Este es el mejor resultado posible en cuanto a lugar ramificación más simple.



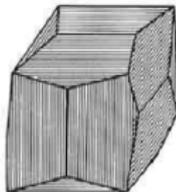
Grupo universal, HLMW

Definición

Un grupo U es **universal** si para cada 3-variedad cerrada y orientable M existe un subgrupo de índice finito G de U , tal que $M = H^3/G$.

Teorema (Invent. Math. 1987)

El grupo \mathbb{U} de isometrías hiperbólicas conservando la orientación que tiene como dominio fundamental un dodecaedro regular hiperbólico con ángulos diedrales de 90° y cuyo cociente es S^3 con los anillos de Borromeo como singularidad de orden 4, es universal.



Teorema

Cada 3-variedad M es un orbifold hiperbólico que es cubierta finita del orbifold hiperbólico $S^3 = H^3/\mathbb{U}$.

Variedad de caracteres

JMMA-González-Acuña, Math. Z. 1993

Nueva demostración elemental, del resultado de M. Culler and P. B. Shalen de que **la variedad de caracteres $X(G)$ de las representaciones de un grupo G en $SL(2; \mathbb{C})$ es un conjunto algebraico cerrado**. Se dan explícitamente un conjunto de polinomios que lo definen.

HLM, 1992-2005

Métodos de cálculo de la **componente excelente** de la variedad de caracteres del grupo **de algunas clases de nudos hiperbólicos**: nudos de 2 puentes, nudos y enlaces periódicos, nudos con número de túnel 1, nudos con una presentación 4-net...

Obtención de nuevos polinomios invariantes asociados al nudo: **los polinomios periféricos**, que definen la componente excelente de la variedad de caracteres y que están relacionados con el polinomio A definido por Cooper y Long en 1996.

Orbifolds aritméticos

Concepto

Un orbifold hiperbólico de dimensión 3 es aritmético si es el cociente del espacio hiperbólico H^3 por la acción de un subgrupo aritmético de $SL(2; \mathbb{C})$. La caracterización y el estudio de estos grupos es un campo de interés porque proporciona subgrupos discretos de $SL(2; \mathbb{C})$ de covolumen finito, y por tanto orbifolds hiperbólicos, por procedimientos puramente aritméticos.

Resultados HLM, 1990-1995

Una **caracterización** en términos bastante elementales de esos subgrupos. La **obtención de todos los orbifolds aritméticos** cuyo espacio subyacente es la esfera S^3 y cuya singularidad es **el nudo Ocho, o los anillos de Borromeo, o un nudo hiperbólico racional**.

Variedades cónicas geométricas

Concepto

Las variedades cónicas geométricas aparecen como generalización natural de los orbifolds, permitiendo que el **ángulo en torno a la singularidad tenga un valor que no sea divisor de 360°** . Se estudian así familias continuas de variedades cónicas que contienen a los orbifolds con el mismo conjunto singular como subconjunto discreto.

Resultados HLM, 1995-1996

Nuevos invariantes de nudos hiperbólicos: h-polinomio y límite de hiperbolicidad.

Fórmula de Schläfli para invariante de Chern-Simon.

Método de obtención de invariantes como el volumen y el invariante de Chern-Simon de orbifold y variedades mediante fórmulas de integración y cubiertas.

Dimensión 4

Concepto

Una macla (twin) en la esfera S^4 es un conjunto de dos 2-nudos que se intersecan transversalmente en dos puntos.

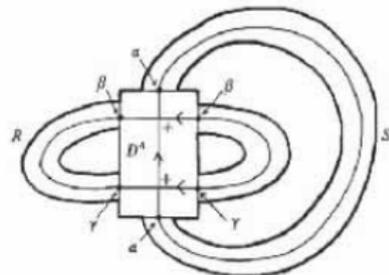
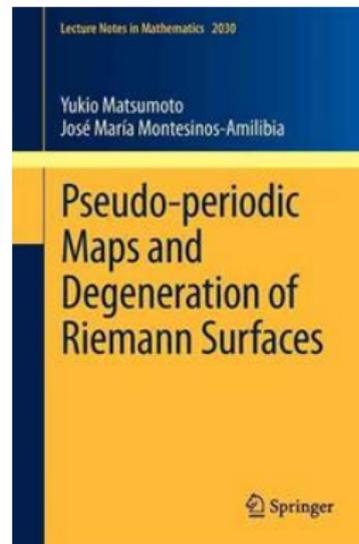
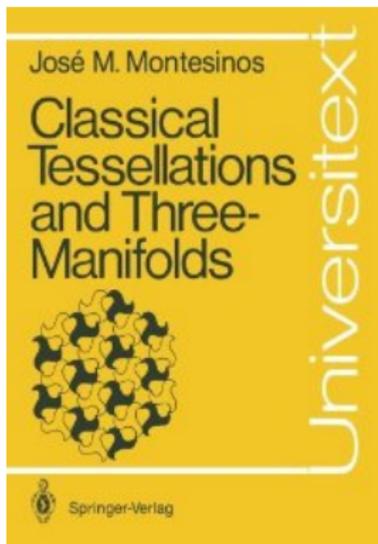


FIG. 3.1

Resultados M, *Quart. J. Math.* 1983-1984

Definición del concepto y estudio de su complemento. Se estudian problemas de fibración en ese contexto dando nuevas demostraciones de resultados de Zeeman y Litherland.

Libros



Variedades de mosaicos

Classical tessellations and three-manifold, Springer 1987

Estudia las 3-variedades de **posiciones de los mosaicos bidimensionales**. Estos mosaicos son esféricos, planos o hiperbólicos.

Los mosaicos han sido utilizados frecuentemente en arte: La Alhambra, Escher,.... En este libro se utilizan como introducción natural a las **variedades de Seifert**.

Cada uno de los 17 posibles patrones de mosaicos en el plano da lugar a una 3-variedad, considerando una posición fija del mosaico como punto de partida, se traslada o gira y cada una de las nuevas posiciones define un punto de la variedad. En ocasiones dos posiciones corresponden al mismo punto porque los patrones coinciden. La variedad resultante está definida por un conjunto de invariantes que la clasifican.

Versión previa en español, y traducción al japonés

Aplicaciones pseudo-periódicas y degeneración de Superficies de Riemann

Pseudo-periodic maps and degeneration of Riemann surfaces, Springer 2011

Escrito en colaboración con Yukio Matsumoto ha sido publicado en 2011, aunque la primera memoria fue escrita en 1991.

En la primera parte se completa el estudio iniciado por Nielsen en 1944 sobre aplicaciones pseudo-periódicas dando un conjunto completo de invariantes de la clase de conjugación de tales aplicaciones.

La segunda parte contiene aplicaciones de los resultados de la primera parte a la teoría de degeneración de superficies de Riemann.

Formas cuadráticas

Clasificación de formas cuadráticas enteras, 2013 →

Ha definido los conceptos de **conmensurables, proyectivamente equivalentes y Bianchi equivalentes** en el conjunto de formas cuadráticas racionales, los ha relacionado entre sí y con el concepto clásico de racionalmente equivalentes.

En sus trabajos sobre el tema estudia **invariantes para las correspondientes clases de equivalencia**.

La teoría de formas cuadráticas enteras tiene también un interés geométrico, porque algunas están relacionadas con modelos de geometrías no euclídeas. El grupo de automorfismos de la forma constituye el grupo de isometrías de la geometría correspondiente y sus subgrupos propiamente discontinuos definen orbifolds.

Otras aportaciones

Topología diferencial
versus
Topología PL



Gracias José Mari por todas tus aportaciones
a las matemáticas,

Gracias José Mari por todas tus aportaciones
a las matemáticas,
y a los matemáticos.



Jarandilla de la Vera 1982

Fin