ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

Curso 2009/10

Aquellos ejercicios marcados con el símbolo $(*)$ tienen, a nuestro juicio, una dificultad mayor que aquéllos que no han sido marcados.

Lista número uno.

Sistemas de ecuaciones. El método de Gauss-Jordan

1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$a)\left\{\begin{array}{rcrcr} 3x & - & 2y & = & 6 \\ 9x & + & 4y & = & 108 \end{array}\right. \qquad b)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & 2z & = & 9 \\ 2x & - & y & + & 4z & = & 4 \\ 2x & - & y & + & 6z & = & -1 \end{array}\right.$$

2. Hallar la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ de la parábola que pasa por los puntos $P_1 = (-1, -10)$, $P_2 = (1, -6)$ y $P_3 = (2, -13)$.

3. Hierón, rey de Siracusa, había dado a un platero 7489 gramos de oro para hacer una corona que quería ofrecer a Júpiter. Como sospechaba de la honradez del orfebre y temía que remplazase oro por plata le pidió a Arquímedes que lo averiguara sin dañar la corona. Arquímedes sumergió completamente la corona en agua, y el agua desalojada pesó 467 g.. Se sabe que al sumergir el oro en agua, el agua desalojada pesa 52/1000 del peso del oro sumergido, mientras que al sumergir la plata en agua, el agua desalojada pesa 95/1000 del peso de la plata sumergida. Comprobar que el orfebre engañó al rey y hallar los gramos de oro y plata de la corona real.

4. Calcular las edades actuales de una madre y sus dos hijos, sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento, que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán entonces, y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.

5. Bajo ciertas condiciones se puede mezclar tolueno con ácido nítrico para obtener trinitrotolueno (también conocido como TNT) y agua. Ajustar la correspondiente reacción química: $x\, C_7H_8 + y\, HNO_3 \to z\, C_7H_5O_6N_3 + w\, H_2O$.

6. $(*)$ Sean x, y, z tres números enteros tales que los enteros $x+y+z, x-y-2z$ y $3x+4y-2z$ son múltiplos de 5. Demostrar que x, y y z son múltiplos de 5.

7. Resolver, por el método de Gauss-Jordan, los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$a)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & + & 5z & = & 0 \\ 2x & - & 4y & + & 2z & = & 0 \\ 5x & - & 11y & + & 9z & = & 0 \end{array}\right. \qquad b)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} x & - & 2y & + & 3z & + & 4t & + & 5u & = 0 \\ x & + & 4y & & & + & 7t & + & 2u & = 0 \\ 2x & + & 2y & + & 3z & + & 11t & + & 7u & = 0 \\ 3x & + & 6y & + & 3z & + & 18t & + & 9u & = 0 \end{array}\right.$$

$$c)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & iz & + & t & = & 0 \\ 2x & - & y & + & 2z & - & t & = & 1 \\ x & + & iy & - & z & + & it & = & 2 \\ x & + & y & + & z & - & t & = & 0 \end{array}\right.$$

8. Discutir, en función del parámetro m, los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$a)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ -x & + & & & 2z & = & 3 \\ 3x & + & 2y & + & mz & = & 1 \end{array}\right. \qquad b)\left\{\begin{array}{rcrcrcc} x & + & my & + & z & = & 1 \\ mx & + & y & + & (m-1)z & = & m \\ x & + & y & + & z & = & m+1 \end{array}\right.$$

9. (∗) ¿Tiene solución el sistema $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\sin\alpha & - & \cos\beta & + & 3\tan\gamma & = & 3 \\ 4\sin\alpha & + & 2\cos\beta & - & 2\tan\gamma & = & 10 \\ 6\sin\alpha & - & 3\cos\beta & + & \tan\gamma & = & 9 \end{array}\right.$?

10. (∗) Discutir en función del valor de los números reales α y β, y resolver cuando sea posible, los siguientes sistemas de ecuaciones lineales

$$a)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \alpha x & + & y & + & z & = & 1 \\ \alpha x & + & \alpha y & + & z & = & \beta \\ \alpha x & + & \alpha y & + & \alpha z & = & \beta \\ \beta x & + & y & + & z & = & 1 \end{array}\right. \qquad b)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & y & + & \alpha z & = & 0 \\ x & - & y & - & z & = & 0 \\ \beta x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & \beta y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$$

11. Estudiar para qué valores del número complejo λ el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} \lambda x & + & y & = & \lambda^3 \\ x & + & \lambda y & = & 1 \end{array}\right.$$

carece de solución, para qué valores la solución es única y para qué valores existen infinitas soluciones.

Lista número dos.

Matrices. Teorema de Rouché-Frobenius.

1. (∗) Una matriz B cuyas filas son todas no nulas se dice que es *escalonada* si el primer coeficiente no nulo de cada una de sus filas posterior a la primera está situado en una columna de índice estrictamente mayor que el índice de la columna que contiene al primer coeficiente no nulo de la fila anterior. En general una matriz A es escalonada si o bien es nula o bien admite una escritura del tipo

$$A = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}$$

tal que todas las filas de B son no nulas y B es escalonada.

(1) Decir cuáles de las siguientes matrices son escalonadas:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 7 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) Demostrar que el rango de una matriz escalonada es igual al número de filas no nulas.

Esto nos proporciona un nuevo método para calcular el rango de una matriz A, pues basta con encontrar una matriz escalonada N equivalente por filas a A y contar el número de filas no nulas de N.

(3) Calcular por este procedimiento el rango de las matrices del apartado (1).

2. *a*) Decir cuáles de las siguientes matrices son equivalentes por filas hallando su forma escalonada reducida por filas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 & -4 \\ -1 & 3 & -10 & -4 \\ 2 & -6 & 20 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & -6 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

   b) Encontrar la forma escalonada reducida por columnas de las matrices anteriores y decir cuáles son equivalentes por columnas.

   c) Hallar, si existen, las soluciones de los sistemas cuyas matrices ampliadas son las anteriores.

3. Calcular el rango de cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -6 & 5 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Comprobar para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 3 & 2 & -3 & -3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 & 9 \end{pmatrix},$$

que el rango por columnas coincide con el rango por filas.

5. Hallar el rango de la siguiente matriz según los valores del parámetro a: $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 2 & a & a^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Demostrar que si una matriz A de tamaño $m \times n$ tiene rango m, entonces cualquier submatriz con n columnas también tiene rango máximo.

7. Discutir según los valores de a y b el sistema con coeficientes reales:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} ax & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & b \\ x & + & y & + & az & = & b^2 \end{array}\right.$$

8. Estudiar los sistemas de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & - & 6x_5 & = & b_1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & b_2 \\ x_1 & - & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 10x_4 & - & 19x_5 & = & b_3 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & - & 3x_5 & = & b_4 \end{array}\right.$$

en los casos en que los términos independientes son

$$(b_1, b_2, b_3, b_4) = (-1, 4, -7, 0) \quad \text{y} \quad (b_1, b_2, b_3, b_4) = (0, 2, 1, 1).$$

9. $(*)$ ¿Qué deben cumplir los números reales a, b y c para que el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{l} y^2 + z^2 = 2a^2 + \frac{1}{2}x^2 \\ x^2 + z^2 = 2b^2 + \frac{1}{2}y^2 \\ x^2 + y^2 = 2c^2 + \frac{1}{2}z^2 \end{array}\right.$$

tenga una solución en la que x, y y z sean números reales?

10. $(*)$ Sean $n \geq 2$ un entero positivo y $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ distintos dos a dos.

(1) Calcular los rangos de las matrices

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & n & n & \cdots & n & n \\ n & 2 & n & \cdots & n & n \\ n & n & 3 & \cdots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ n & n & n & \cdots & n-1 & n \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{pmatrix} \text{ y } A(a_1, \ldots, a_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

(2) Discutir el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & nx_2 & + & nx_3 & + & \cdots & + & nx_{n-1} & = & n \\ nx_1 & + & 2x_2 & + & nx_3 & + & \cdots & + & nx_{n-1} & = & n \\ nx_1 & + & nx_2 & + & 3x_3 & + & \cdots & + & nx_{n-1} & = & n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ nx_1 & + & nx_2 & + & nx_3 & + & \cdots & + & (n-1)x_{n-1} & = & n \\ nx_1 & + & nx_2 & + & nx_3 & + & \cdots & + & nx_{n-1} & = & n \end{array}\right.$$

Lista número tres.

Operaciones con matrices.

1. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$. Calcular:

$$A^2 \text{ y } B^2 \quad ; \quad (A^t)^2 + AA^t + A^tA - 3I_3 \quad \text{y} \quad (A^t)^2 + A^tB + B^tA.$$

¿Existe alguna matriz no nula X tal que $XA = BX^t$?

2. Consideramos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

¿Existe alguna matriz no nula X que cumpla $XA = BX^t$?

3. Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hallar las matrices X e Y que son soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$a)\left\{\begin{array}{ccccc} 3X & + & 2Y & = & A \\ 2X & + & Y & = & B \end{array}\right. \quad : \quad b)\left\{\begin{array}{ccccc} 2X & + & Y & = & C \\ X & - & 3Y & = & D \end{array}\right.$$

4. *a*) Encontrar todas las matrices cuadradas de orden 3 que conmutan con la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   b) ($*$) Encontrar todas las matrices cuadradas de orden n que conmutan con la matriz diagonal de orden n en cuya diagonal están los números $1, \dots, n$.

   c) ($*$) Encontrar todas las matrices cuadradas de orden n que conmutan con todas las matrices diagonales de orden n.

5. ($*$) Sean m, n y p tres enteros positivos y dos matrices $A \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$ y $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$. Encontrar una condición necesaria y suficiente para que exista una matriz $C \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ tal que $B = CA$. Aplicar esa condición cuando

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. ($*$) Recordamos que las operaciones elementales por filas que podemos aplicar a una matriz A son:

   (i) Multiplicar una fila por un escalar no nulo.

   (ii) Sumar a una fila otra multiplicada por un escalar no nulo.

   (iii) Intercambiar dos filas.

   Comprobar que el resultado de aplicar cualquiera de estas operaciones elementales a la matriz A es el mismo que el de multiplicar la matriz A por la izquierda por la matriz E que se obtiene al aplicar a la matriz identidad I dicha operación elemental. A una tal matriz E se le denomina *matriz elemental*.
   Demostrar que cada matriz elemental es invertible y que su inversa es de nuevo una matriz elemental, y que una matriz es invertible si y sólo si es producto de matrices elementales.

7. $(*)$ Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 & -4 \\ -1 & 3 & -10 & -4 \\ 2 & -6 & 20 & 2 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & -6 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

a) Encontrar una matriz E_A producto de matrices elementales de forma que $H_A = E_A A$, donde H_A representa la forma escalonada reducida por filas de A. Hacer lo mismo para las restantes matrices.

b) Encontrar una matriz E'_A producto de matrices elementales de forma que $H^c_A = AE'_A$, donde H^c_A representa la forma escalonada reducida por columnas de A. Hacer lo mismo para las restantes matrices.

8. $(*)$ Se llama *forma canónica equivalente* de una matriz a la matriz escalonada reducida por columnas de su matriz escalonada reducida por filas. Comprobar que una matriz X y su forma canónica equivalente $\mathcal{C}_X$ tienen el mismo rango. Probar que existen productos P y Q de matrices elementales tales que $\mathcal{C}_X = PXQ$. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 14 \\ 4 & 9 & 3 & 24 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

hallar y su forma canónica equivalente y su rango. Hallar productos Q y P de matrices elementales tales que $\mathcal{C}_A = PAQ$. Proceder análogamente con las matrices B y C.

9. $(*)$ Demostrar que si todas las filas de una matriz A suman α y todas las filas de una matriz B suman β, entonces todas las filas de su producto suman $\alpha\beta$.

10. Calcular, por el método de Gauss, el rango de la matriz A. Utilizar el mismo método para encontrar la matriz inversa de B.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

11. Hallar la inversa de cada una de las siguientes matrices:

$$a) \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad c) \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. $(*)$ Dadas dos matrices, $K \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ y $L \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ cuyo producto $KL = I_n$ es la matriz identidad, decimos que K (resp. L) tiene inversa por la derecha (resp. por la izquierda). Esto generaliza la noción de matriz invertible. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) K tiene inversa por la derecha.

(ii) $\mathrm{rg}(AK) = \mathrm{rg}(A)$ para cualquier matriz A con n columnas.

(iii) $\mathrm{rg}(K) = n$.

¿Qué se puede decir de la unicidad de la inversa de K por la derecha si admite alguna? Formular y probar la caracterización análoga para la inversa por la izquierda.

13. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Demostrar que para cada entero $k \geq 1$ se cumple:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \cos(k\alpha) & -\operatorname{sen}(k\alpha) \\ \operatorname{sen}(k\alpha) & \cos(k\alpha) \end{pmatrix}.$$

Lista número cuatro.

Determinantes.

1. Calcular los siguientes determinantes:

$$a)\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & 4 \\ -2 & 3 & 4 & -5 \\ 3 & -4 & -5 & 6 \\ -4 & 5 & 6 & -7 \end{vmatrix}, \quad b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad c)\begin{vmatrix} 1+i & 1 & 2 & 0 \\ 2+i & 3 & 4 & 3 \\ 4+i & 2 & 3 & 2 \\ 1-i & 2 & 4 & 6 \end{vmatrix},$$

$$d)\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{vmatrix}, \quad e)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix},$$

$$f)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 9 & 2 & -7 & 7 \\ 5 & -6 & 0 & 1 & 8 \\ 8 & 7 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad g)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & 4 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & 4 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \cdots & 0 \end{vmatrix},$$

2. *a*) $(*)$ Dados escalares $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$, calcular el determinante

$$D_n = \det \begin{pmatrix} a_1+b_1 & b_1 & b_1 & \cdots & b_1 \\ b_2 & a_2+b_2 & b_2 & \cdots & b_2 \\ b_3 & b_3 & a_3+b_3 & \cdots & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & b_n & b_n & \cdots & a_n+b_n \end{pmatrix}.$$

   b) Suponemos $n = 6, a_1 = \cdots = a_6 = 1$ y cada $b_k = x^k$. Para qué valor del entero x se cumple que $D_6 = 1093$.

3. $(*)$ Calcular, para cada entero $n \geq 2$, el determinante

$$\Delta_n = \det \begin{pmatrix} 1^2 & 2^2 & \cdots & n^2 \\ 2^2 & 3^2 & \cdots & (n+1)^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^2 & (n+1)^2 & \cdots & (2n-1)^2 \end{pmatrix}.$$

4. $(*)$ Sea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ una matriz mágica de orden 3, esto es, sus coeficientes son números enteros y la suma de los elementos de cada fila coincide con la suma de los elementos de cada columna y coincide también con lo que suma cada una de las diagonales. Demostrar que el determinante de A es múltiplo entero de la suma de los coeficientes de A.

5. $(*)$ Consideremos la siguiente disposición del triángulo de Tartaglia

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots & \\ 1 & 3 & 6 & 10 & \ldots & & \\ 1 & 4 & 10 & \ldots & & & \\ 1 & 5 & \ldots & & & & \\ 1 & \ldots & & & & & \end{array}$$

   Calcular el determinante de la matriz cuadrada de orden n que forman los n^2 coeficientes de la esquina superior izquierda.

6. Determinar para qué valores de $a \in \mathbb{C}$ tiene inversa la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ 2 & 0 & a \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix},$$

y calcularla.

7. *a*) Probar que $\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \cos 2x \\ \cos x & \cos 2x & \cos 3x \\ \cos 2x & \cos 3x & \cos 4x \end{vmatrix} = 0$ para todo número real x.

   b) ¿Por qué $x = 2$ es solución de la ecuación $\begin{vmatrix} x & 4 & 2 \\ 3-x & x & 1 \\ 1 & 1+x & x \end{vmatrix} = 0$? Hallarlas todas.

8. $(*)$ Sean n un número entero mayor que 1 y u, v dos números reales. Discutir, en función de los valores de estos dos últimos, el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} u\,x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + \cdots + & x_n & = & 1 \\ x_1 & + & u\,x_2 & + & x_3 & + \cdots + & x_n & = & v \\ x_1 & + & x_2 & + & u\,x_3 & + \cdots + & x_n & = & v^2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + \cdots + & u\,x_n & = & v^{n-1}. \end{array} \right.$$

9. $(*)$ Encontrar todas las ternas de números complejos a, b, c que satisfacen las igualdades

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a & + & b & + & c & = & 3 \\ a^2 & + & b^2 & + & c^2 & = & 3 \\ a^3 & + & b^3 & + & c^3 & = & 3 \end{array} \right.$$

10. Comprobar que para cualquier matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ se cumple

$$A^2 - (a+d)A + \det(A)I_2 = 0.$$

Deducir que si A es invertible, entonces $\mathsf{Adj}(A) = (a+d)I_2 - A$, y obtener una fórmula de cálculo de A^{-1}. ¿Cuándo es A su propia inversa?

Lista número cinco.

Espacios vectoriales.

1. Consideremos el conjunto $\mathbb{R}^2$ con la operación interna:
$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'),$$
y una de las siguientes operaciones externas:
$$\lambda(x, y) = (\lambda x, 0), \quad \text{o } (\lambda x, \lambda y), \quad \text{o } (\lambda + \lambda x - 1, \lambda + \lambda y - 1), \quad \text{o } (\lambda y, \lambda x).$$
Decidir en cada caso si las operaciones definen una estructura de espacio vectorial en $\mathbb{R}^2$.

2. En $\mathbb{R}^3$ definimos las operaciones suma $\perp$ y producto por escalares $\star$ como sigue:
$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) \perp (y_1, y_2, y_3) &= (x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2 - 1, x_3 + y_3 + 3), \\ \lambda \star (x_1, x_2, x_3) &= (\lambda x_1 + \lambda - 1, \lambda x_2 - \lambda + 1, \lambda x_3 + 3\lambda - 3). \end{aligned}$$
Estudiar si $(\mathbb{R}^3, \perp, \star)$ es o no un espacio vectorial real.

3. $(*)$ Sean V_1 y V_2 dos subespacios vectoriales del espacio vectorial E, ambos distintos de E. Demostrar que $V_1 \cup V_2 \neq E$.

4. Sea E el espacio vectorial de las aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Demostrar que los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales de E:
$$E_1 = \{f \in E : f(3) = 0\}; \; E_2 = \{f \in E; f(7) = f(1)\} \text{ y } E_3 = \{f \in E : f(-x) = -f(x)\}$$

5. Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos V del espacio vectorial E son subespacios vectoriales.
   (1) $E = \mathbb{R}^5$ y $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 + 2x_3 - x_4 = x_2 + 3x_3 - 4x_5 = 0\}$.
   (2) $E = \mathbb{R}^n$ y $V = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + \cdots + x_n = 3\}$.
   (3) $E = \mathbb{R}^3$ y $V = \{(1 + a + b, 1 - a, 1 - b) \in \mathbb{R}^3 : a, b \in \mathbb{R}\}$.
   (4) $E = \mathbb{R}^n$ y $V = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \leq 0, \; 1 \leq i \leq n\}$.
   (5) $E = \mathbb{R}^3$ y $V = \{(t, t^2, t^3) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\}$.

6. $(*)$ ¿Es el conjunto $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$? ¿Qué subespacios de $\mathbb{R}^3$ contienen a T?

7. Estudiar la dependencia lineal de los vectores:
   (1) $u_1 = (1, 2, 1, 0), \; u_2 = (-1, 3, 4, 1), \; u_3 = (3, 1, 0, 4), \; u_4 = (5, 1, 2, 1)$ en $\mathbb{R}^4$.
   (2) $f_1 = T^3, \; f_2 = T^2 + T^3, \; f_3 = 2 + T + T^3, \; f_4 = 6 + 3T + T^2 + 6T^3$ en $\mathbb{C}[T]$.

8.
   a) Determinar los valores de los números reales a y b para que el vector $(1, 4, a, b)$ sea combinación lineal de los vectores $(1, 2, -1, 2)$ y $(0, 1, 2, 1)$.
   b) Demostrar que para cada terna de números reales a, b y c los vectores $(1, a, b)$, $(0, 1, c)$ y $(0, 0, 1)$ son linealmente independientes.
   c) ¿Para qué valores de los números reales a y b son linealmente independientes los vectores
   $$(1, 1, 0, a), (3, -1, b, -1) \text{ y } (-3, 5, a, -4)?$$

9. Hallar tres polinomios $P_1(X)$, $P_2(X)$ y $P_3(X)$ en $\mathbb{R}_5[X]$ linealmente independientes tales que $P_i(0) = 1$, $P_i(1) = 0$ y $P_i(2) = -5$ $(i = 1, 2, 3)$.

10. Escribir la matriz $E = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ como combinación lineal de de las matrices:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

11. Sean $\{u_1, \ldots, u_n\}$ vectores linealmente independientes en un espacio vectorial E. Se definen nuevos vectores
$$v_1 = u_1, v_j = u_1 - \sum_{i=2}^{j} u_i, \quad \text{para} \quad 2 \leq j \leq n.$$
Estudiar si los vectores $\{v_1, \ldots, v_n\}$ son también linealmente independientes.

12. Sean u_1, u_2, u_3 y u_4 vectores de $\mathbb{K}^n$ tales que las ternas de vectores
$$\{u_1, u_2, u_3\}, \quad \{u_1, u_2, u_4\}, \quad \{u_1, u_3, u_4\}, \quad \{u_2, u_3, u_4\}$$
son linealmente independientes. ¿Se puede asegurar que también son linealmente independientes los vectores $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$?

13. Sean $a, b, c \in \mathbb{C}$ y considérense los tres vectores
$$u_1 = (a, a^2, a^3), \ u_2 = (b, b^2, b^3), \ u_3 = (c, c^2, c^3).$$
¿Qué debe cumplirse para que sean linealmente independientes?

14. En el espacio vectorial $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ formado por todas las funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se consideran las siguientes

$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to 1;$ $\quad f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \operatorname{sen} x;$ $\quad f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \cos x;$
$f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \operatorname{sen}^2 x;$ $\quad f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \operatorname{sen}(x+2);$ $\quad f_6 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \cos^2 x.$

¿Cuál es el máximo número de ellas linealmente independientes?

15. Consideremos el espacio vectorial real formado por las funciones continuas reales de variable real, y para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ el subconjunto
$$E_\lambda = \{f \in E : f(0) = \lambda\}.$$
¿Para qué valores de λ es E_λ un subespacio vectorial de E?

Lista número seis.

Espacios vectoriales de tipo finito.

1. ($*$) En el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales se considera la estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{Q}$ de los números racionales, en la que la suma de elementos de $\mathbb{R}$ es la habitual, y el producto del escalar $\lambda \in \mathbb{Q}$ por el vector $u \in \mathbb{R}$ es el producto usual λu de λ y u como números reales. Comprobar que esto define efectivamente en $\mathbb{R}$ una estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$ y decidir si se trata o no de un espacio vectorial de tipo finito.

2. Sea $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ una base del espacio vectorial E. Estudiar si los vectores

   $v_1 = u_1 - u_3 + 2u_4$, $v_2 = 2u_1 + 3u_2 + u_3 + u_4$, $v_3 = u_1 + 3u_2 + 2u_3 - u_4$ y $v_4 = u_1 + u_2 + u_4$

   son linealmente independientes. Extraer de ellos el mayor número posible que lo sean, y construir una base de E que contenga a esos elegidos.

3. Estudiar si los conjuntos siguientes son base del espacio vectorial dado:

   a) $\{1, X+3, (X+3)^2, (X+3)^3\}$ en $\mathbb{R}_3[X]$.

   b) $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}$ en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   c) $\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

4. *a*) Demostrar que los conjuntos siguientes son bases de $\mathbb{R}^4$:

   $$\begin{aligned}\mathcal{B}_1 &= \{(1,1,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,1), (0,0,0,1)\},\\ \mathcal{B}_2 &= \{(1,2,0,0), (0,1,2,-1), (1,-1,-1,-1), (0,1,1,0)\}.\end{aligned}$$

   b) Encontrar las coordenadas del vector $u = (1,2,-1,-2)$ respecto de cada una de las bases anteriores.

5. Estudiar si son dependientes o independientes los siguientes conjuntos de vectores y encontrar una base del subespacio vectorial que generan:

   a) $\{(2,3,1), (1,0,1), (0,3,-1)\}$;

   b) $\{(2,3,1,0,1), (0,1,2,1,4), (0,0,1,4,5), (0,0,0,3,1)\}$;

   c) $\{(1,2,1), (2,4,1), (-3,-6,-3)\}$.

6. En $\mathbb{K}^3$ se consideran los subespacios $E_1 = L[(1,2,1), (1,3,2)]$ y $E_2 = L[(1,1,0), (3,8,5)]$. Comprobar que $E_1 = E_2$.

7. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix}$. Probar que el conjunto

   $$H = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \,:\, XA = AX\}$$

   es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ y calcular su dimensión.

8. En el espacio vectorial $\mathbb{K}^5$ consideramos el subespacio vectorial L de ecuaciones implícitas:

   $$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x & + & 2y & - & z & & & & & = & 0\\ & & y & + & 2z & - & t & + & w & = & 0\\ 3x & + & 4y & - & 7z & + & 2t & - & 2w & = & 0\end{array}\right.$$

   a) Comprobar que los vectores $u_1 = (1,0,1,1,-1)$ y $v_1 = (0,0,0,1,1)$ pertenecen a L.

   b) ¿Son linealmente independientes los vectores u_1 y v_1?

   c) Prolongar $\{u_1, v_1\}$ hasta una base $\mathcal{B}_1$ de L.

d) Prolongar $\{u_1\}$ hasta una base $\mathcal{B}_2$ de L, que no contenga a ningún múltiplo de v_1.

e) Escribir las coordenadas de los vectores: $(2,-1,0,0,1)$, $(1,1,3,5,-2)$ respecto de las bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$.

9. ¿Es $\{(2,1,1),(-2,1,3),(1,3,1)\}$ una base de $\mathbb{K}^3$? Obtener las coordenadas de $(1,1,1)$ respecto de dicha base. Hallar la matriz del cambio de base respecto a la base estándar.

10. Sea $\mathbb{K}_3[T]$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3. Probar que $\{(1+T)^3, T(1+T)^2, T^2(1+T), T^3\}$ es una base de $\mathbb{K}_3[T]$ y hallar las coordenadas de los polinomios $1, T, T^2, T^3$. respecto de esta base. Calcular las matrices de cambio de base correspondientes.

11. Dados los conjuntos de vectores

$$\mathcal{B} = \{(3,2,5),(2,1,3),(1,0,2)\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}' = \{(-2,1,3),(-2,1,2),(1,-1,3)\} :$$

a) Demostrar que son bases de $\mathbb{K}^3$ y hallar las matrices del cambio de base en los dos sentidos.

b) Hallar las coordenadas respecto de la base $\mathcal{B}'$ del vector $v \in \mathbb{K}^3$ cuyas coordenadas respecto de $\mathcal{B}$ son $v_{\mathcal{B}} = (2,-1,-4)$.

c) Hallar las coordenadas respecto de la base $\mathcal{B}$ del vector $w \in \mathbb{K}^3$ cuyas coordenadas respecto de $\mathcal{B}'$ son de $w_{\mathcal{B}'} = (0,1,5)$.

d) Escribir las coordenadas de v y w respecto de la base estandar.

12. Sea $W = L[v_1, v_2, v_3, v_4] \subset \mathbb{R}[T]$, donde $v_1 = T^3 - 2T^2 + 4T + 1$, $v_2 = 2T^3 - 3T^2 + 9T - 1$, $v_3 = T^3 + 6T - 5$ y $v_4 = 2T^3 - 5T^2 + 7T + 5$. Hallar una base y la dimensión de W.

13. Hallar la dimensión y una base del subespacio V de $\mathbb{K}^5$ cuyas ecuaciones implícitas son:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & + & 3x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & 8x_3 & + & x_4 & + & 5x_5 & = & 0 \end{array}\right.$$

14. Hallar una base, su dimensión y unas ecuaciones implícitas del subespacio V de $\mathbb{K}^4$ descrito con respecto de la base estándar por las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$V : \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & = & 2\lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & + & \lambda_4 \\ x_2 & = & \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & + & \lambda_4 \\ x_3 & = & 3\lambda_1 & & & + & 3\lambda_3 & + & 2\lambda_4 \\ x_4 & = & -\lambda_1 & + & 5\lambda_2 & + & 4\lambda_3 & + & \lambda_4 \end{array}\right.$$

15. Sea V el subespacio de $\mathbb{K}^5$ descrito con respecto de la base estándar mediante las siguientes ecuaciones implícitas:

$$V : \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 3x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & 4x_5 & = & 0 \\ x_1 & & & - & x_3 & + & 2x_4 & & & = & 0 \end{array}\right.$$

Encontrar ecuaciones implícitas de V respecto de la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^5$ formada por los vectores

$$u_1 = e_1, u_2 = e_1 + e_2, u_3 = e_1 + e_2 + e_3, u_4 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \text{ y } u_5 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5$$

16. Hallar un sistema de ecuaciones homogéneas cuyo espacio de soluciones sea el mínimo subespacio que contiene a los vectores $(-1,0,1,0,0)$, $(0,-1,1,1,0)$ y al subespacio de soluciones del sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & & & = 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & - & x_5 & = 0 \\ & & x_2 & & & + & x_4 & - & x_5 & = 0 \end{array}\right.$$

Lista número siete.

Operaciones con subespacios.

1. Dado un subconjunto linealmente independiente $\{u_1, u_2, u_3\}$ de un espacio vectorial E, se consideran los subespacios $H_1 = L[u_1 + u_2, u_2 + u_3]$ y $H_2 = L[u_1 + u_2 + u_3, u_2 - u_3]$. ¿Cuál es la dimensión de $H_1 \cap H_2$?

2. Sea $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ una base del espacio vectorial E y sean: (i) V el subespacio de E de ecuaciones $x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0$, y (ii) W el subespacio de E generado por los vectores $w_1 = u_1 + u_2$, $w_2 = u_1 + u_3$ y $w_3 = u_1 + u_4$. Calcular las dimensiones de los subespacios V, W, $V \cap W$ y $V + W$.

3. Para cada uno de los siguientes pares de subespacios U, W de $\mathbb{K}^4$, hallar una base, la dimensión y ecuaciones implícitas y paramétricas de U, de W, de $U + W$ y de $U \cap W$:

   a) $U = L[(1, 1, 0, -1), (1, 2, 3, 0)]$, $W = L[(1, 2, 2, -2), (2, 3, 2, -3), (1, 3, 4, -3)]$.

   b) $U = \{x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$, $W = \{x_1 + x_2 = 0, x_3 - 2x_4 = 0\}$.

   c) $U = L[(1, 2, 1, 3), (0, 1, 2, 1), (6, 11, 4, 17)]$, $W : 4x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$.

   ¿Es directa alguna de las sumas $U + W$?

4. $(*)$ En un espacio vectorial E se consideran tres subespacios vectoriales V_1, V_2, V_3, y las igualdades siguientes:

$$V_1 \cap (V_2 + V_3) = V_1 \cap V_2 + V_1 \cap V_3, \quad V_1 + V_2 \cap V_3 = (V_1 + V_2) \cap (V_1 + V_3),$$

   Estudiar si son ciertas y, si no, modificarlas para que lo sean.

5. $(*)$ Sea V un subespacio vectorial propio de un espacio vectorial E de tipo finito. ¿Cuál es el subespacio vectorial de E generado por el complementario $E \setminus V$?

6. Para cada escalar $a \in \mathbb{K}$ se considera el subespacio vectorial de $\mathbb{K}^3$ definido por

$$H_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 : ax - y + z = 0\}.$$

   Sea $u = (1, 1, 1)$. ¿Para qué valores de a se cumple la igualdad $\mathbb{K}^3 = H_a \oplus L[u]$?

7. $(*)$ Sean V_1 y V_2 dos subespacios vectoriales del espacio vectorial E de tipo finito, ambos distintos de E. Supongamos que $\dim(V_1) = \dim(V_2)$. Probar que tienen un suplementario común: existe un subespacio $W \subset E$ tal que $V_1 \oplus W = E = V_2 \oplus W$.

8. Sean a y b números reales y consideremos los subespacios H y L de $\mathbb{R}^4$ cuyas ecuaciones implícitas son

$$H : \left\{ \begin{array}{rcl} bx_1 - bx_2 + x_4 & = & 0 \\ x_3 & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{y } L : \left\{ \begin{array}{rcl} (a-1)(2x_1 - x_2) - 2x_3 & = & 0 \\ 2bx_1 - (a+b)x_2 + 2x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

   a) Calcular la dimensión de H y L. ¿Existen valores de a y b para los que $H = L$?

   b) ¿Cómo han de ser a y b para que $H + L \neq \mathbb{R}^4$?

9. Sea $H \subset \mathbb{R}^4$ el subespacio definido como $H = \{x - y + z - 2t = x - 2y + z - t = 0\}$. Hallar las ecuaciones implícitas de un subespacio $L \subset \mathbb{R}^4$ tal que $\mathbb{R}^4 = L \oplus H$.

10. $(*)$ Sean n un entero positivo, $E = \mathbb{K}_n[T]$ el espacio vectorial formado por los polinomios de grado menor o igual que n con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{K}$.

    (1) Dado un polinomio no constante $f \in E$, demostrar que

$$V_f = \{P \in E : P \text{ es múltiplo de } f\}$$

    es un subespacio vectorial de E. Hallar una base de V_f y otra de un suplementario suyo.

    (2) Dados dos subespacios V_f y V_g del tipo anterior, describir su intersección.

    (3) Sean $n = 2$, $f = -T + T^2$ y $g = 6 - 5T + T^2$. Calcular $V_f + V_g$.

11. Se consideran las matrices $\begin{pmatrix} \lambda+\mu & -\mu \\ \mu & \lambda-\mu \end{pmatrix}$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

(1) Mostrar que todas esas matrices constituyen un subespacio vectorial V de $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Hallar una base suya y su dimensión.

(2) Demostrar que si $M \in V$, entonces $M^n \in V$ para cada $n \geq 0$.

(3) Encontrar un suplementario vectorial W de V en E que también tenga la propiedad (2) y otro W' que no la tenga.

12. Sean $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ una base del espacio vectorial E, $v = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$ y L el subespacio vectorial del que unas ecuaciones implícitas respecto de $\mathcal{B}$ son

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & 3x_2 & - & 2x_3 & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

Obtener una base del espacio vectorial cociente E/L y calcular las coordenadas, respecto de dicha base, de la clase $[v]$.

13. Sean $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 : x - y = z + t = 0\}$ y $L = L[(2, 1, 1, 1), (0, 1, -1, -1), (1, 0, 1, 1)]$ subespacios vectoriales de $\mathbb{K}^4$.

a) Hallar una base de H y las ecuaciones implícitas de L.

b) Hallar $H \cap L$ y $H + L$. ¿Es $H + L$ suma directa?

c) Si $U = L[(0, 2, 1, 0), (0, 0, 0, 1)]$ hallar $H + U$ y $L + U$. ¿Se trata de sumas directas?

d) Encontrar una base y la dimensión de los espacios cociente: $\mathbb{K}^4/H$, $\mathbb{K}^4/L$, $\mathbb{K}^4/(H \cap L)$, $\mathbb{K}^4/(H + L)$, $H/(H \cap L)$ y $(H + L)/L$.

14. Sean $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ una base del espacio vectorial E y $L = L[v_1, v_2]$, donde

$$v_1 = u_1 + u_3, v_2 = u_1 + u_2 - u_3 - u_4$$

(1) Encontrar en $E \setminus L$ dos vectores independientes cuyas clases sean (resp. no sean) independientes en el cociente E/L.

(2) Encontrar cuatro vectores linealmente independientes en E cuyas clases en E/L no sumen 0 y de modo que existan vectores proporcionales a ellos cuyas clases sí lo sumen.

15. Sea $E = \mathbb{K}_n[T]$ el espacio vectorial de los polinomios de grado $\leq n$.

(1) Mostrar que para cualesquiera $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{K}$ distintos dos a dos, el conjunto $V_a \subset E$ formado por los polinomios que se anulan en todos los a_i es un subespacio vectorial de E. ¿De qué dimensión?

(2) Sean $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{K}$ y $b_1, \ldots, b_s \in \mathbb{K}$ dos colecciones de escalares, en ambos casos distintos dos a dos. Estudiar cuándo $V_a + V_b = E$. Interpretar el resultado obtenido.

Lista número ocho.

Aplicaciones lineales.

1. Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones $\mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ son lineales:

$$f_1((x,y)) = (y,x); \quad f_2((x,y)) = (0,x); \quad f_3((x,y)) = (1, x+y); \quad f_4((x,y)) = (x^2, y^2).$$

2. Sea $f : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^3$ la aplicación lineal determinada por las condiciones $f((1,0)) = (1,1,1)$ y $f((0,1)) = (1,0,0)$. Calcular $f((2,-1))$ y hallar el núcleo y la imagen de f.

3. Encontrar las ecuaciones de la aplicación lineal $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ que cumple:

$$f(1,0,1) = (1,0,-1), \quad f(2,1,0) = (0,3,1), \quad f(-1,0,-2) = (0,1,1).$$

   Calcular la imagen y la imagen inversa del subespacio V generado por $(1,0,0)$ y $(0,1,1)$.

4. Sea $f : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^3$ la aplicación lineal dada por

$$f(x,y,z,t) = (x+z+t, x+y+2z+t, y+z).$$

   a) Encontrar bases de $\mathrm{im}(f)$, $\ker(f)$ y del espacio vectorial cociente $\mathbb{K}^4/\ker(f)$.
   b) Encontrar matrices, respecto de bases adecuadas, de las aplicaciones lineales que intervienen en la factorización canónica de f. Comprobar, mediante el producto adecuado de estas matrices, que la aplicación f se factoriza en la composición de las otras tres.
   c) Calcular bases tales que las matrices de la factorización canónica respecto de ellas tengan ceros y unos en su diagonal principal, y ceros fuera de ella.

5. Considérense los vectores de $\mathbb{K}^3$: $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,0,1)$, $v_3 = (1,1,0)$ y $v_4 = (1,0,1)$. Sean w_1 y w_2 dos vectores cualesquiera de $\mathbb{K}^2$.

   a) ¿Existe alguna aplicación lineal f de $\mathbb{K}^3$ en $\mathbb{K}^2$ tal que $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2$, $f(v_3) = w_1 + w_2$, $f(v_4) = w_1 - w_2$?
   b) Demostrar que existe una única aplicación lineal g de $\mathbb{K}^3$ en $\mathbb{K}^2$ tal que $g(v_1) = w_1$, $g(v_2) = w_2$, $g(v_3) = w_1 - w_2$, $g(v_4) = w_1 + w_2$.
   c) ¿Cuáles son las posibles dimensiones del núcleo de g?

6. $(*)$ Calcular la matriz respecto de la base estándar de la aplicación lineal $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ que cumple las cuatro condiciones siguientes:

   i) La recta generada por $(1,0,0)$ tiene por imagen la recta $x = z = y$.
   ii) La imagen del vector $(0,1,0)$ es el vector $(-2,1,1)$.
   iii) El núcleo de f está generado por el vector $(1,1,1)$.
   iv) La imagen inversa del plano $y + z = 0$ contiene al vector $(0,0,1)$.

7. Encontrar una aplicación lineal $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ que cumpla las tres condiciones siguientes:

$$i)\ f((1,0,0)) \in L[(0,0,1)], \quad ii)\ f^2 = f \quad \text{y} \quad iii)\ \ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 : x+z = 0\}.$$

8. (i) ¿Existe alguna aplicación lineal $\mathbb{K}^{1991} \to \mathbb{K}^{1991}$ cuya imagen coincida con su núcleo?

   (ii) ¿Existen una aplicación lineal inyectiva $f : E \to F$ y otra suprayectiva $g : F \to E$ tales que $\dim(F) = 357$ e $\mathrm{im}(f) = \ker(g)$?

9. $(*)$ Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto y$ la aplicación lineal dada por $y^t = Ax^t$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ a & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

   y consideremos el vector $u = (1-b, b, 1+b)$.

   (1) Determinar a y b para que $u \in \mathrm{im}(f) \neq \mathbb{R}^3$. Obtener una base y unas ecuaciones implícitas y paramétricas de $\mathrm{im}(f)$ y $\ker(f)$.

   (2) Encontrar un subespacio vectorial $L \subset \mathbb{R}^3$ de dimensión mínima entre los que cumplen $f(L) = \mathrm{im}(f)$.

10. Sean $\mathcal{E}$ la base estándar de $\mathbb{K}^4$ y $u_1 = (1,0,1,0)$, $u_2 = (0,1,0,1)$ vectores de $\mathbb{K}^4$. Se pide:

   a) Construir un subespacio W de $\mathbb{K}^4$ tal que $\mathbb{K}^4 = W \oplus L[u_1, u_2]$.

   b) Construir una aplicación lineal $f : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^4$ tal que $\ker(f) = L[u_1, u_2]$ e $\operatorname{im}(f) = W$.

   c) Decidir si existe alguna aplicación lineal $g : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^4$ tal que $\ker(g) = L[e_1, e_2]$ e $\operatorname{im}(g) = L[e_1, e_3, u_2]$.

11. (1) Sean $f : E \to F$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales y V un subespacio vectorial de E. Probar que $f^{-1}(f(V)) = V$ si y sólo si V contiene al núcleo de f.

    (2) Sean $f : E \to E$ una aplicación lineal y $u \in E$ un vector que no está en su núcleo. Se consideran las siguientes igualdades:

$$\operatorname{im}(f) = L[f(u)] \qquad \text{y} \qquad E = L[u] \oplus \ker(f).$$

    ¿Es cierto que la primera implica la segunda? ¿Y el recíproco?

12. (∗) Sea $f : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^4 : x \mapsto y$ la aplicación lineal dada por $y^t = Ax^t$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

    Hallar un subespacio vectorial V de $\mathbb{K}^4$ cuya dimensión sea mayor que la de $f(V)$ y menor que la de $f^{-1}(f(V))$.

13. Sean $E = \mathbb{C}_3[T]$ (polinomios de grado ≤ 3), y $F = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Se consideran las bases $\mathcal{B} = \{1, T, T^2, T^3\}$ de E y

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

    de F. Para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ fijo, consideramos la aplicación lineal $\varphi : E \to F$

$$\varphi(a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + a_3 T^3) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + a_3 A^3, \ \text{ donde } A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix};$$

    denotamos M la matriz de φ respecto de las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$. Se pide:

    (1) Calcular, en función de λ, las dimensiones del núcleo y de la imagen de φ.

    (2) Comprobar que $W = \{D \in \operatorname{im}(\varphi) : \operatorname{tr}(D) = 0\}$ es un subespacio vectorial de F, y calcular su dimensión.

    (3) Sea $f : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4 : x \mapsto y$ la aplicación lineal definida por $y^t = Mx^t$. ¿Para qué valores de λ es $\ker(f) \cap \operatorname{im}(f) \neq \{0\}$?

14. (∗) Sean $E = \mathbb{K}_3[T]$ el espacio vectorial formado por los polinomios de grado menor o igual que 3 cuyos coeficientes pertenecen al cuerpo $\mathbb{K}$ y L el subespacio generado por los polinomios

$$P_1(T) = 3 + 2T + T^2, \quad P_2(T) = -2 - 3T + T^3, \quad P_3(T) = 1 - T + T^2 + T^3.$$

    Consideramos el espacio cociente $F = E/L$ y la proyección canónica $\pi : E \to F$ y sean $f, g : E \to \mathbb{K}$ las aplicaciones lineales definidas, respectivamente, por:

$$f : P(T) \mapsto 2P(0) - P(1), \quad g : P(T) \mapsto P'(-2).$$

    ¿Existen aplicaciones lineales $\varphi, \psi : F \to \mathbb{K}$ tales que $f = \varphi \circ \pi$ y $g = \psi \circ \pi$?

Lista número nueve.

Espacio dual.

1. En $E = \mathbb{K}^3$ se considera la base $\mathcal{B}$ consistente en los vectores $(1,0,1), (0,1,-2)$ y $(-1,-1,0)$.

   (1) Encontrar las fórmulas de los elementos de la base dual $\mathcal{B}^*$ de $\mathcal{B}$.

   (2) Calcular las coordenadas respecto de $\mathcal{B}^*$ de las siguientes formas lineales

   $$h_1(x,y,z) = x + 2y + z, \quad h_2(x,y,z) = 7x + 14z, \quad h_3(x,y,z) = 3x + y + z.$$

   Deducir que h_1, h_2, h_3 forman una base del espacio dual E^*.

   (3) Calcular las coordenadas de los vectores de la base de E de la que $\{h_1, h_2, h_3\}$ es dual.

2. Se consideran en $E = \mathbb{K}^4$ los vectores $u_1 = (1,0,0,1)$, $u_2 = (0,3,1,0)$ y $u_3 = (1,0,1,2)$.

   (1) Probar que u_1, u_2, u_3 son independientes y encontrar una base $\mathcal{B}$ de E que los contenga. Determinar la base dual $\mathcal{B}^*$ de $\mathcal{B}$.

   (2) Determinar el subconjunto X de E^* consistente en las formas que se anulan en u_1 y en u_2, pero no en u_3. ¿Es X subespacio vectorial de E^*? ¿Qué subespacio de E^* genera X?

3. Sean $E = \mathbb{K}^5$ y w_1, w_2, w_3, w_4 los elementos de E^* definidos por:

   $$\begin{gathered} w_1(x,y,z,s,t) = x + y + z, \quad w_2(x,y,z,s,t) = x + s + t, \\ w_3(x,y,z,s,t) = t, \quad w_4(x,y,z,s,t) = x + y + 2z + s + t; \end{gathered}$$

   ¿existe una base de E^* que contenga a w_1, w_2, w_3, w_4?

4. Hallar las coordenadas de la forma lineal $w : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}$ definida por $w(x,y,z,t) = 3x - 5y + 4z + t$, respecto de la base dual de la base estandar $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, y de la base dual de la base $\mathcal{B} = \{(1,1,1,1), (1,1,1,0), (1,1,0,0), (1,0,0,0)\}$.

5. Se consideran en $\mathbb{K}^3$ y $\mathbb{K}^4$ sus bases estándar $\mathcal{E}_3$ y $\mathcal{E}_4$, respectivamente. Se pide:

   a) Hallar las matrices respecto de $\mathcal{E}_3$ y $\mathcal{E}_4$ de todas las aplicaciones lineales $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^4$ que cumplen que $f(e_1) = (-1,1,-1,0)$, $L[f(e_2)] = L[(1,0,2,1)]$ y

   $$\ker(f) : \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

   b) $(*)$ Consideramos las formas lineales

   $$\begin{array}{rcc} h: \mathbb{K}^4 & \to & \mathbb{K} \\ (x_1,x_2,x_3,x_4) & \mapsto & -2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \end{array} \ \text{y} \ \begin{array}{rcc} k: \mathbb{K}^3 & \to & \mathbb{K} \\ (y_1,y_2,y_3) & \mapsto & 2y_1 - y_2 + \frac{1}{2}y_3 \end{array}$$

   De todas las aplicaciones lineales obtenidas en *a*), calcular la matriz respecto de $\mathcal{E}_3$ y $\mathcal{E}_4$ de aquélla cuya aplicación lineal dual $f^* : (\mathbb{K}^4)^* \to (\mathbb{K}^3)^*$ transforma h en k.

   c) Sea f la aplicación lineal determinada en el apartado *b*). Encontrar bases en los espacios vectoriales $\mathbb{K}^3$, $\mathbb{K}^3/\ker(f)$, $\mathrm{im}(f)$ y $\mathbb{K}^4$ de forma que las matrices, respecto de dichas bases, de las aplicaciones lineales que proporcionan la factorización canónica de f, tienen ceros y unos en sus diagonales principales y ceros fuera de ellas. Determinar esas matrices.

6. Sea $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ la aplicación lineal dada por $f(x,y,z) = (x - 2y - 2z, -x + z, x - y - 2z)$.

   a) Demostrar que f es una simetría, es decir, que $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

   b) Determinar la base de la simetría: $U = \{u \in \mathbb{K}^3 : f(u) = u\}$ y la dirección de la simetría: $W = \{u \in \mathbb{K}^3 : f(u) = -u\}$, calculando bases de U y de W.

   c) Encontrar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^3$ tal que $M_f(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

d) Sea $\mathcal{B}^*$ la base de $(\mathbb{K}^3)^*$ dual de la base $\mathcal{B} = \{(2,-1,1),(1,1,0),(1,0,1)\}$ de $\mathbb{K}^3$. Escribir la matriz de cambio de base $\mathcal{C}(\mathcal{B}^*, \mathcal{E}_3^*)$, donde $\mathcal{E}_3^*$ es la base de $(\mathbb{K}^3)^*$ dual de la base estándar de $\mathbb{K}^3$.

e) Construir una aplicación lineal $g : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ tal que $\ker(g) = U$ e $\operatorname{im}(g) = W$.

7. ($*$) Sean $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base del espacio vectorial real E y para cada $a \in \mathbb{R}$ consideramos la aplicación lineal $f : E \to E$ cuya matriz respecto de la base $\mathcal{B}$ es

$$M(a) = M_f(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Sea L el subespacio de E generado por el vector $u = u_1 + u_2 + u_3$.

(1) ¿Cuál es la dimensión de $\ker(f) \cap \operatorname{im}(f)$?

(2) Hallar una base del subespacio $f^{-1}(L)$ y calcular su dimensión.

(3) Sea $\mathcal{B}^* = \{h_1, h_2, h_3\}$ la base dual de $\mathcal{B}$. Se consideran las formas lineales

$$k = h_1 + h_2 - ah_3 \quad \text{y} \quad \ell = ah_1 + h_2 - 3h_3$$

y la proyección canónica $\pi : E \to F = E/f^{-1}(L)$. Determinar para qué valores de a existen elementos φ y ψ en el espacio dual de F tales que $k = \varphi \circ \pi$ y $\ell = \psi \circ \pi$. ¿Es en tal caso $\{\varphi, \psi\}$ una base del dual de F?

8. Sean $E = \mathbb{R}_2[T]$ (polinomios de grado ≤ 2) y las formas lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in E^*$ definidas por

$$\varphi_i : E \to \mathbb{R} : P(T) \mapsto \int_0^1 t^{i-1} P(t)dt.$$

Demostrar que $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ es una base de E^*, y determinar de qué base de E es dual.

9. ($*$) Sean V el subespacio de $\mathbb{K}^4$ generado por los vectores $(1,1,1,1)$ y $(1,0,-1,1)$, y W un subespacio suplementario de V. Denotamos $p : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^4$ la proyección lineal sobre W en la dirección de V. Calcular la imagen de la aplicación lineal

$$p^* : (\mathbb{K}^4)^* \to (\mathbb{K}^4)^* : \alpha \mapsto \alpha \circ p,$$

y decidir si la forma lineal

$$\beta : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K} : x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto x_1 - x_2 + x_3 - x_4$$

pertenece o no a ella.

10. Sean a, b y c tres números reales y consideramos el subespacio vectorial L de $\mathbb{R}^3$ cuyas ecuaciones implícitas respecto de la base estándar son $x - z = y - az = 0$. Sean f y g las formas lineales sobre $\mathbb{R}^3$ definidas por

$$f(x,y,z) = bx + y + cz \qquad \text{y} \qquad g(x,y,z) = (1+c)x - bz,$$

y sea $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3/L$ la proyección canónica. Obtener los valores de a, b y c sabiendo que tanto f como g factorizan a través del cociente $\mathbb{R}^3/L$ y que dichas factorizaciones no constituyen una base del espacio dual de $\mathbb{R}^3/L$.

Lista número diez.

Polinomio característico. Subespacios invariantes.

1. *a*) Sea f un endomorfismo no diagonalizable de $\mathbb{C}^2$ de traza 2. Calcular $\det(f)$.

   b) Sea A una matriz cuadrada de orden dos con traza 5 y determinante 4. ¿Es diagonalizable?

2. ¿Existe alguna matriz regular de orden 7 con coeficientes reales, cuyo polinomio característico sea $-X^7 + X^3 - X$?

3. ¿Existe algún endomorfismo $f : \mathbb{K}^9 \to \mathbb{K}^9$ con dos subespacios propios H, L tales que $\dim(H) - \dim(L) = 6$ y $\dim(\mathcal{L}(H, L)) = 16$?

4. ¿Existe algún endomorfismo f de $\mathbb{K}^4$ tal que los subespacios

$$W_1 : \begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad W_2 : \begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

   sean los subespacios propios asociados a dos valores propios?

5. Se consideran los siguientes subespacios de $\mathbb{K}^4$:

$$H : \begin{cases} x - y + z - t &= 0 \\ x + y + z + t &= 0 \end{cases} \qquad L : \begin{cases} x + y + z &= 0 \\ x + 2z &= 0 \end{cases}$$

   Probar que existe un único endomorfismo f de $\mathbb{K}^4$ cuyos valores propios son 1, 2, H es el subespacio propio asociado a 1 y L es el subespacio propio asociado a 2.

6. Hallar la matriz respecto de la base estándar del endomorfismo f de $\mathbb{K}^4$ que cumple $f(1, 0, 1, 0) = (2, 1, -1, 0)$, $L[(0, 1, -1, 0)]$ es el subespacio de vectores propios de f para el valor propio -1 y $H = \{x + z = x - y + t = 0\}$ es el subespacio de vectores propios de f para el valor propio 2.

7. ¿Para qué valores de $a, b \in \mathbb{C}$ es diagonalizable, como matriz con coeficientes complejos, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 2 & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}?$$

8. Sean a y b dos números complejos. Consideramos el endomorfismo f de $\mathbb{C}^3$ cuya matriz respecto de la base estándar es

$$\begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

   ¿Para qué valores de a y b el núcleo de f tiene dimensión 1 y f no es diagonalizable?

9. Hallar los valores de a y b para que la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$ sea diagonalizable en $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Encontrar, para esos valores de a y b, una matriz $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

10. Consideremos los subespacios W y L de $\mathbb{K}^4$ cuyas ecuaciones implícitas respecto de la base estándar $\mathcal{E}_4$ son

$$W : x = t, y = z \quad \text{y} \quad L : y = z = t.$$

   ¿Existen endomorfismos f de $\mathbb{K}^4$ cuyo núcleo sea W y cuya imagen sea L? ¿Existe alguno diagonalizable?

11. Encontrar la potencia n-ésima de la matriz $A = \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}$.

12. $(*)$ En un criadero de conejos se denota por x_n e y_n el número de machos y hembras al cabo de n años. Sabiendo que $x_1 = 2$, $y_1 = 1$, y

$$\begin{cases} x_{n+1} &= 5x_n - 3y_n \\ y_{n+1} &= 6x_n - 4y_n \end{cases}$$

hallar el número total de conejos al cabo de 20 años.

13. $(*)$ Calcular el término general de la sucesión x_n que cumple

$$x_1 = 1, x_2 = -2 \quad \text{y} \quad x_n = -x_{n-1} + 2x_{n-2}.$$

14. Hallar el polinomio característico, los valores propios y los subespacios invariantes de los endomorfismos de $\mathbb{C}^n$ cuyas matrices respecto de la base estándar son las siguientes:

$$a) \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}; \quad b) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \quad c) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}; \quad d) \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

¿Cuáles de los anteriores endomorfismos son diagonalizables?

15. $(*)$ Denotemos $\mathbf{x} = (x, y, z, t)$ y sea $f : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^4$ el endomorfismo

$$f(\mathbf{x}) = (2x, -x - y + 2t, 2x - y - z, -3x + 2t).$$

Mostrar que los hiperplanos $x = 0$ y $x - 3y + 2t = 0$ son invariantes, y obtener todos los planos invariantes de f contenidos en los hiperplanos anteriores.

16. $(*)$ Calcular los subespacios invariantes de los endomorfismos siguientes:

   a) $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ dado por

$$f(x, y, z) = (-2x - 5z, x - y, x + 2z).$$

   b) $f : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^4$ de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

   c) $f : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^4$ de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

   d) $f : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^4$ definido por

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, 2x_2, 3x_3, 4x_4).$$

17. $(*)$ Denotemos $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ y sea $f : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ el endomorfismo definido por

$$f(\mathbf{x}) = (2x_1 - x_3, -2x_1 + 4x_2 + 2x_3, 4x_3 + x_4, 4x_4).$$

Calcular todos los autovectores de f, y obtener todos los planos invariantes de f en los que están contenidos.

Lista número once.

Formas de Jordan.

1. Demostrar que cualquier matriz cuadrada real de orden 2 cuyo determinante es negativo, es semejante en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ a una matriz diagonal.

2. Sea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ una matriz no diagonal con un único autovalor λ y que cumple la igualdad $(A-\lambda I)^2 = 0$. Calcular la forma de Jordan J_A de la matriz A.

3. Calcular $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{15}$.

4. Hallar la forma de Jordan de una matriz M de orden 13 con coeficientes complejos de la que se sabe que tiene un solo autovalor, el rango de $(M - 2I_{13})$ es ≥ 11 y el rango de $(M-2I_{13})^8$ es 1.

5. $(*)$ Hallar la forma de Jordan de un endomorfismo f de $\mathbb{C}^{2n}$ del que se sabe que $\ker(f) = \mathrm{im}(f)$.

6. ¿Existe algún endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ con un valor propio λ que satisfaga las igualdades

$$\dim(\mathrm{im}(f-\lambda\mathsf{Id}) = 2 \quad \text{y} \quad \dim(\mathrm{im}(f-\lambda\mathsf{Id})^2) = 0?$$

7. Sea a, b números complejos y f el endomorfismo de $\mathbb{C}^3$ cuya matriz respecto de la base estándar es

$$\begin{pmatrix} -1 & a-1 & -1 \\ 1 & b & a+1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

Hallar a y b sabiendo que $\mathrm{im}(f) = \ker(f \circ f)$, y obtener la forma de Jordan de f.

8. Determinar qué condiciones deben cumplir los números complejos α y β para que la forma de Jordan de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha\beta \\ 0 & 1 & \alpha^2\beta \\ 0 & \alpha(1+\beta) & 1 \end{pmatrix} \quad \text{sea} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Hallar la forma de Jordan de un endomorfismo f de $\mathbb{C}^3$ tal que $\ker(f) = \mathrm{im}(f^2)$.

10. Hallar una base $\mathcal{B}$ del espacio vectorial de los polinomios con coeficientes complejos de grado ≤ 4 tal que la matriz respecto de la base $\mathcal{B}$ del endomorfismo definido por $f(p(X)) = p(X+1)$ sea una matriz de Jordan.

11. Calcular en función de $a, b \in \mathbb{C}$ la forma de Jordan de $\begin{pmatrix} 2a & -1 & 0 \\ b & 2 & 0 \\ 4 & 0 & b \end{pmatrix}$.

12. De un endomorfismo f de $\mathbb{C}^5$ se sabe que su polinomio característico es $(2-X)^3(X-3)^2$. Determinar todas las formas de Jordan posibles de f.

13. Discutir según los valores de a, b, c la expresión del polinomio mínimo de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$(*)$ ¿Es cierto que si los polinomios mínimo y característico de un endomorfismo coinciden (salvo signo), entonces el endomorfismo es diagonalizable?

14. $(*)$ El polinomio mínimo de un endomorfismo de $\mathbb{C}^n$ es X^n. ¿Cuál es su forma de Jordan?

15. Para cada una de las matrices siguientes hallar: los polinomios característico y mínimo, la forma canónica de Jordan, la base de Jordan correspondiente y también una matriz P tal que $P^{-1}MP$ sea la forma de Jordan de M:

$$a)\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad c)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$d)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 6 & -3 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad e)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 6 & -7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}, \quad f)\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & 4 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -5 & 7 \\ 4 & 2 & -6 & 7 \end{pmatrix},$$

$$g)\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad h)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad i)\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$j)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad k)\begin{pmatrix} 2 & -2 & -9 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -4 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

16. ¿Es diagonalizable un endomorfismo f de $\mathbb{C}^2$ tal que f^k es la identidad de $\mathbb{C}^2$ para cierto entero $k \geq 1$?

17. Determinar la forma de Jordan de $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y la suma $\sum_{n=0}^{2000}(-1)^n M^n$.

18. Encontrar los polinomios característico y mínimo de un endomorfismo f de $\mathbb{C}^8$ del que se sabe lo siguiente:

   a) sus valores propios son: 1, -1 e $i = \sqrt{-1}$,

   b) la matriz de Jordan correspondiente al valor propio 1 tiene dimensión 3 y dos cajas,

   c) la del valor propio -1 tiene dimensión 1,

   d) y la del valor propio i tiene dos cajas elementales de la misma dimensión.

Lista número doce.

Clasificación de formas bilineales.

1. ¿Cuáles de las siguientes funciones son formas bilineales sobre $\mathbb{R}^n$?

   a) $\varphi((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) = x_1|y_1| + \cdots + x_n|y_n|$.

   b) $\varphi((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) = |x_1y_1 + \cdots + x_ny_n|$.

   c) $\varphi((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) = (x_1 + \cdots + x_n)(y_1 + \cdots + y_n)$.

   d) $\varphi((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) = \sqrt{x_1^2y_1^2 + \cdots + x_n^2y_n^2}$.

   e) $\varphi((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) = x_1y_1 + \cdots + x_ky_k$ donde k es un número natural fijo tal que $1 \leq k \leq n$.

   En los casos de respuesta afirmativa, estudiar si son simétricas o antisimétricas y calcular la matriz de φ respecto de la base estándar de $\mathbb{R}^n$.

2. Sean $f, g : E \to \mathbb{K}$ dos formas lineales sobre un espacio vectorial E de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Probar que la función $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ definida por $\varphi(u,v) = f(u)g(v)$, para todos los vectores $u, v \in E$, es una forma bilineal. Si $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ es una base de E, calcular $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ en función de las matrices de f y g respecto de $\mathcal{B}$.

3. Demostrar que la función

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R} \\ (p,q) & \mapsto & \int_0^1 p(t)q(t)dt \end{array}$$

   es una forma bilineal simétrica y calcular su matriz respecto de la base $\{1, X, X^2\}$ de $\mathbb{R}_2[X]$. Calcular $\varphi(p,q)$ para $p(X) = 1 + X$ y $q(X) = 2X - X^2$.

4. Determinar cuáles de las siguientes funciones $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ son formas bilineales:

$$a)\ \varphi(A,B) = \mathsf{tr}(A^tB); \quad b)\ \varphi(A,B) = \mathsf{tr}(A)\mathsf{tr}(B).$$

5. Sea $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ una base del espacio vectorial E y sea φ la forma bilineal sobre E definida por $\varphi(u,v) = u_1v_1 - u_1v_2 + 3u_2v_2$, donde

$$u = u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3 \quad \text{y} \quad v = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3.$$

   Hallar la matriz de φ respecto de la base $\mathcal{B}' = \{e_1', e_2', e_3'\}$, donde $e_1' = e_1+e_2+e_3$, $e_2' = -e_2$ y $e_3' = e_1 - e_3$. Calcular también $\varphi(u,v)$ para $u = 2e_1' + e_3'$ y $v = -e_2' + 2e_3'$.

6. Dada la forma bilineal $\varphi : \mathbb{R}_1[X] \times \mathbb{R}_1[X] \to \mathbb{R}$ de la que se sabe que es simétrica y que $\varphi(X+1, X+1) = 8$, $\varphi(X+2, X+2) = 11$ y $\varphi(X,X) = 3$, calcular su matriz respecto de la base estándar $\{1, X\}$ de $\mathbb{R}_1[X]$.

7. Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la forma bilineal dada por

$$\varphi((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = 2x_1y_1 - 4x_1y_2 + 5x_2y_1 + \lambda x_2y_2.$$

   Determinar λ para que φ sea degenerada. Para este valor de λ hallar bases de los subespacios vectoriales:

$$U = \{u \in \mathbb{R}^2 : \varphi(u,v) = 0\ \forall v \in \mathbb{R}^2\} \quad \text{y} \quad V = \{v \in \mathbb{R}^2 : \varphi(u,v) = 0\ \forall u \in \mathbb{R}^2\}$$

8. Probar que la función $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x,y) = x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_2y_2$, donde $x = (x_1,x_2)$ e $y = (y_1,y_2)$ es una forma bilineal y escribirla como suma de una forma bilineal simétrica y otra antisimétrica. Escribir la expresión analítica de la forma cuadrática asociada a φ y clasificarla.

9. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

hallar dos matrices regulares X e Y en $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ tales que X^tAX e Y^tBY sean diagonales.

10. Determinar cuáles de las siguientes formas bilineales simétricas son equivalentes $i)$ sobre $\mathbb{R}^3$ y $ii)$ sobre $\mathbb{C}^3$:

    a) $\varphi_1((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = x_1y_1 - \frac{1}{2}x_1y_3 - \frac{1}{2}x_3y_1$,
    b) $\varphi_2((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = \frac{1}{2}x_1y_2 + \frac{1}{2}x_2y_1 - x_3y_3$,
    c) $\varphi_3((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = \frac{1}{2}x_1y_2 + \frac{1}{2}x_2y_1 + x_3y_3$.

11. ¿Es la función $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x^4 + y^4$ una forma cuadrática sobre $\mathbb{R}^2$?

12. Para cada una de las siguientes formas cuadráticas $q : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ determinar la forma bilineal simétrica asociada φ_q y una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$ tal que la matriz $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ sea diagonal:

    a) $q(v) = ix^2 - 2y^2$ para todo $v = (x,y) \in \mathbb{C}^2$,
    b) $q(v) = 4x^2 - 9xy + 5y^2$ para todo $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$,
    c) $q(v) = 6xy$ para todo $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$,
    d) $q(v) = 2xy + y^2 - 2xz$ para todo $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,
    e) $q(v) = -x^2 - 4xy + 3y^2 + 2z^2$ para todo $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,
    f) $q(v) = xy + yz + zt$ para todo $v = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$,

13. Se considera la función $q : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$ definida por $q(p) = \int_0^1 p(t)^2 dt$. Se pide:

    a) Probar que q es una forma cuadrática.
    b) Calcular la matriz de q respecto de la base $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$ de $\mathbb{R}_2[X]$, y determinar su rango y su signatura.

14. Dada la forma bilineal $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_2 - x_3y_1 + 2x_3y_3$$

hallar su forma cuadrática asociada q_f, la matriz de q_f respecto de alguna base de $\mathbb{R}^3$ y su signatura.

15. Sea $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Demostrar que la función $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(A,B) = \mathsf{tr}(A^tMB)$ es una forma bilineal simétrica y calcular su su rango y su signatura.

16. Clasificar las siguientes formas cuadráticas sobre $\mathbb{R}^3$:

    a) $\phi(x,y,z) = x^2 - z^2 - 2xy + xz$; *b*) $\phi(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 5z^2 - 2xy - 2yz + 6xz$
    c) $\phi(x,y,z) = -x^2 - 2y^2 - z^2 + 2xy + 2yz$.

17. Sean $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{K})$ la matriz cuyo coeficiente de la fila i y la columna j es $i - j$ y M la matriz antisimétrica de orden 4 cuyo coeficiente de la fila i y la columna j, con $i < j$, es $i + j$. ¿Son A y M congruentes? Encontrar las formas canónicas de A y M.

Lista número trece.

Espacios vectoriales euclídeos.

1. Demostrar que la expresión
$$\langle u, v\rangle = 10x_1y_1 + 3(x_1y_2 + x_2y_1) + 2x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_3y_3,$$
donde $u = (x_1, x_2, x_3)$ y $v = (y_1, y_2, y_3)$, define un producto escalar en $\mathbb{R}^3$. Hallar una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ respecto a dicho producto escalar.

2. Si $u = (x_1, x_2, x_3)$ y $v = (y_1, y_2, y_3)$, ¿definen las siguientes expresiones productos escalares en $\mathbb{R}^3$?
   a) $\langle u, v\rangle = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2$.
   b) $\langle u, v\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2$.

3. ¿A qué intervalo debe pertenecer el número real a para que la forma cuadrática $q(x, y) = 2x^2 + axy + 6y^2$ sobre $\mathbb{R}^2$ sea definida positiva?

4. Hallar una base ortonormal de los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$ respecto del producto ecalar usual:
$$V_1 = L[(2,0,0,1),(1,2,2,3),(5,2,2,5)] \quad V_2 = L[(-1,0,1,1),(2,1,1,1),(0,1,3,6)]$$
$$V_3 = L[(1,1,-1,1),(2,1,1,2),(3,1,1,1)]$$
$$V_4 = L[(0,1,0,1),(2,1,0,1),(-1,0,0,1),(0,0,1,0)]$$

5. Sea $W = \{x + y + z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$. Calcular la proyección ortogonal sobre W del vector $u = (1, 1, 0)$. Calcular también su proyección sobre $W^\perp$.

6. Sea $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^2$ sobre $W = L[(3, 4)]$. Se pide hallar:
   a) la matriz de p respecto de la base estándar de $\mathbb{R}^2$,
   b) una base del complemento ortogonal de W, y
   c) una base ortonormal $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que la matriz de p respecto de $\mathcal{B}$ sea $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7. $(*)$ Probar que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^tA)$ para toda matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

8. Demostrar que el producto vectorial cumple la siguiente igualdad:
$$\|u \times v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2 - \langle u, v\rangle^2.$$
Deducir que el producto vectorial no depende de la base salvo producto por ± 1, y que esta ambigüedad se resuelve mediante la condición de signo
$$\det\{u \times v, u, v\} > 0.$$

9. $(*)$ Demostrar la siguiente propiedad del producto vectorial:
$$u \times (v \times w) = \langle u, w\rangle v - \langle u, v\rangle w.$$
¿Es este producto asociativo?

10. $(*)$ La Universidad organiza una fiesta, al comienzo del curso académico, a la que están invitados todos los estudiantes del programa Erasmus. En ella, dos de un mismo país no se saludan, pues ya se conocen, mientras que dos de países distintos pueden saludarse o no, pero en el primer caso una única vez. A la fiesta asisten, en total, m estudiantes de n países diferentes. Demostrar que el número total de saludos no excede de $\frac{1}{2n}m^2(n-1)$. ¿Qué ha de suceder para que alcance ese valor máximo?

Lista número catorce.

Endomorfismos de espacios vectoriales euclídeos.

1. La matriz de una rotación vectorial f respecto de una base $\{u, v\}$ de $\mathbb{R}^2$ que define la misma orientación que la base estándar es

$$\begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ 2/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinar el ángulo de rotación, el ángulo que forman u y v y la razón $\dfrac{\|v\|}{\|u\|}$.

2. Sea f una simetría axial de $\mathbb{R}^2$ de eje $L[u]$. Probar que para cada vector $v \in \mathbb{R}^2$ el ángulo que forman los vectores v y $f(v)$ es el doble del que forman v y u.

3. Dada la base $\mathcal{B} = \{u_1 = (1,1,0), u_2 = (1,0,1), u_3 = (1,2,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y los endomorfismos f, g y h de $\mathbb{R}^3$ cuyas las matrices respecto de $\mathcal{B}$ son

$$a) \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

respectivamente, decidir cuáles son ortogonales.

4. $(*)$ Describir geométricamente el endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz respecto de la base estándar es

$$\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & \sqrt{6}/4 \\ 1/4 & 3/4 & -\sqrt{6}/4 \\ -\sqrt{6}/4 & \sqrt{6}/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

5. Hallar el eje y el ángulo de giro de la rotación vectorial de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz respecto de la base estándar es

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

6. Escribir la matriz de la rotación vectorial de $\mathbb{R}^3$ de ángulo $\alpha = \frac{\pi}{4}$ en torno al eje $L[u_1]$, donde $u_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$, eligiendo como orientación para $L[u_1]^\perp$ la inducida por u_1.

7. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

la matriz, respecto de la base estándar, de un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$. Comprobar que se trata de una simetría y calcular su dirección y su base. ¿Es f una simetría ortogonal respecto del producto escalar usual?

8. Encontrar las ecuaciones de la simetría especular respecto del plano $2x + y + z = 0$.

9. Dada la matriz con coeficientes reales $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, encontrar una matriz ortogonal C tal que $C^t A C$ sea diagonal.

10. $a)$ ¿Existe algún endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ que sea autoadjunto respecto del producto escalar usual, y cuyos subespacios propios sean los subespacios W y U de ecuaciones implícitas:

$$W : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \quad , \quad U : x - 2y = 0?$$

11. Sea ϕ la forma bilineal simétrica de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz respecto de la base estándar es

$$M_\phi(\mathcal{E}_3) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Encontrar una base ortonormal $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $M_\phi(\mathcal{B})$ sea diagonal.

12. Sea ϕ la forma bilineal simétrica de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz respecto de la base estándar es

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Demostrar que ϕ es un producto escalar y encontrar el complemento ortogonal de la recta: $x - y = 0, y - z = 0$ en el espacio vectorial euclídeo $(\mathbb{R}^3, \phi)$,

b) Consideramos el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$

$$f(x, y, z) = \Big(\frac{1}{2}(3x + y), \frac{1}{2}(x + 3y), \frac{1}{2}(x + y + 2z)\Big).$$

Comprobar que todos los vectores del plano: $x + y = 0$ son vectores fijos de f.

c) Encontrar, si es posible, una base ortonormal de $(\mathbb{R}^3, \phi)$ formada por vectores propios de f. ¿Es f un endomorfismo autoadjunto de $(\mathbb{R}^3, \phi)$?

13. Sean $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ dos sucesiones de números reales que satisfacen las siguientes condiciones:

$$x_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_n - y_n), \quad y_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_n + y_n),$$

con $x_1 = -1$, $y_1 = 3$. Calcular x_{34}, y_{34}; x_{84}, y_{84}; x_{1747}, y_{1747}; x_{40000}, y_{40000}.

14. Calcular

$$\begin{pmatrix} -7/9 & 4/9 & 4/9 \\ 4/9 & -1/9 & 8/9 \\ 4/9 & 8/9 & -1/9 \end{pmatrix}^{2001}, \quad \begin{pmatrix} 1/9 & 8/9 & -4/9 \\ -4/9 & 4/9 & 7/9 \\ 8/9 & 1/9 & 4/9 \end{pmatrix}^{1999}.$$

15. (∗) Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ cuya matriz respecto de la base estándar $\mathcal{E}_4$ es

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Encontrar una base ortonormal $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ tal que la matriz $N = M_f(\mathcal{B})$ sea diagonal, y hallar una matriz invertible P tal que $N = P^{-1}MP$.

b) Sea F la forma bilineal simétrica sobre $\mathbb{R}^4$ cuya matriz respecto de la base estándar es M. Demostrar que F define un producto escalar en $\mathbb{R}^4$, y encontrar una base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^4$ tal que la matriz $\mathcal{M}_F(\mathcal{B}')$ sea diagonal. Encontrar además una base que sea ortogonal respecto del producto escalar F y respecto del producto escalar usual.

c) Encontrar un endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ distinto de $\pm\mathrm{Id}$ que sea simultáneamente ortogonal respecto de F y respecto del producto escalar usual.

16. Clasificar, según los valores del parámetro real a, las formas cuadráticas reales

$$f_a(x, y, z) = x^2 + y^2 + (a+1)z^2 + 2ayz + 2xz \quad \text{y} \quad g_a(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy + 2ayz.$$

.

Lista número quince.

Subvariedades afines.

1. ¿Es afínmente independiente el conjunto de puntos de $\mathbb{K}^3$: $\{(1,2,3),(-1,3,1),(7,-1,9)\}$?

2. Demostrar que los conjuntos de puntos

$$\{(1,-1,2),(2,0,2),(2,-2,2),(1,-1,3)\} \quad \text{y} \quad \{(0,1,1),(1,1,2),(1,1,0),(0,2,1)\}$$

son referencias afines de $\mathbb{K}^3$. Construir, para cada uno de ellos, la referencia cartesiana asociada; encontrar la matriz de cambio de referencia, y obtener las coordenadas del punto $(0,1,1)$ respecto de cada uno de dichos sistemas de referencia.

3. Demostrar que

$$\mathcal{R} = \{p = (1,1,0); u_1 = (0,0,2), u_2 = (-1,1,1), u_3 = (-1,0,1)\}$$

es un sistema de referencia cartesiano de $\mathbb{K}^3$. Hallar las coordenadas respecto de $\mathcal{R}$ del punto $(1,1,1)$, y las ecuaciones respecto de $\mathcal{R}$ del subespacio afín que pasa por el punto $(1,-1,1)$ y cuya dirección es $W = L[(0,1,0),(1,0,1)]$.

4. Sea A un plano afín. Si las coordenadas de cierto punto $p \in A$ respecto del sistema de referencia $\mathcal{R}_1 = \{O; u_1, u_2\}$ son $(3,6)$ y respecto de $\mathcal{R}_2 = \{O'; v_1, v_2\}$ son $(-1,1)$, hallar las coordenadas de O' respecto de $\mathcal{R}_1$ sabiendo que $v_1 = 2u_1 - u_2$ y $v_2 = 3u_1$.

5. En el espacio afín de dimensión tres se considera la recta r de ecuaciones implícitas

$$r : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -1 \end{array} \right.$$

respecto de cierto sistema de referencia $\mathcal{R}_1 = \{p; e_1, e_2, e_3\}$. Encontrar unas ecuaciones de dicha recta respecto del sistema de referencia

$$\mathcal{R}_2 = \{q = p + 3e_1; u_1 = e_1 - e_2, u_2 = e_2 - e_3, u_3 = e_1 + e_3\}.$$

6. En el espacio afín de dimensión cinco se consideran los subespacios afines

$$M : \{x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0\} \quad \text{y} \quad N : \{x_1 = 0, x_2 = 1, x_5 = 5\}$$

Determinar la posición relativa de M y N. Obtener ecuaciones implícitas del menor subespacio afín $V(M,N)$ que contiene a $M \cup N$.

7. En el espacio afín de dimensión cinco, se consideran los subespacios afines de ecuaciones implícitas, respecto de cierto sistema de referencia,

$$M = \{x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 = 3,\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 1\}$$
$$N = \{x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 3,\ x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 2\}$$

a) Hallar la posición relativa de M y N, ecuaciones implícitas de $M \cap N$ y de $V(M,N)$, un conjunto de puntos afínmente independiente que genere $M \cap N$ y otro que genere $V(M,N)$.

b) Hallar un punto y el subespacio de dirección de $M \cap N$.

8. En el espacio afín real de dimensión cinco, se consideran los subespacios afines de ecuaciones implícitas, respecto de cierto sistema de referencia,

$$M = \{x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 3,\ x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 1\}$$
$$N = \{2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 3,\ x_2 - 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 2,\ x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$$

Calcular la posición relativa de ambos subespacios, las ecuaciones implícitas de $M \cap N$ y de $V(M,N)$, así como un conjunto de puntos afínmente independiente que genere $M \cap N$ y otro que genere $V(M,N)$.

9. En el espacio afín de dimensión 4 se consideran los planos afines

$$\pi_1 = \{x_1 = 1, x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -1\} \quad \text{y} \quad \pi_2 = \{x_1 + x_2 - x_3 = 0, 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -1\}.$$

   a) ¿Cuál es la posición relativa de π_1 y π_2?
   b) Calcular una ecuación o ecuaciones implícitas de $V(\pi_1, \pi_2)$ y un conjunto de puntos afínmente independientes que genere $V(\pi_1, \pi_2)$.
   c) Encontrar un plano π_3 que se cruce con π_1.

10. En el espacio afín de dimensión 4 se consideran los puntos $A = (1, 0, 0, 0)$ y $B = (1, 1, 1, 1)$, el hiperplano de ecuación $\eta : x - y + z - t = 2$ y el plano de ecuaciones paramétricas

$$\pi : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & = & 1+ & \lambda & - & \mu \\ y & = & \lambda & + & \mu \\ z & = & 2 & + & \lambda \\ t & = & = & -1 & + & \mu \end{array} \right.$$

Sea $\mathcal{R} = \{(1, -1, 0, 0); (1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\}$ otro sistema de referencia. Se pide:

   a) Hallar las coordenadas de los puntos A y B y las ecuaciones de η y π respecto de $\mathcal{R}$.
   b) Calcular, respecto del sistema de referencia $\mathcal{R}$, las ecuaciones implícitas del plano que pasa por los puntos A y B y es paralelo a la recta intersección de η y π.

11. Determinar la recta de $\mathbb{K}^4$ que es paralela a los hiperplanos afines

$$H_1 : 3x + 2y - z + 8t = 2 \quad \text{y} \quad H_2 : x - y - z = 3,$$

pasa por el punto $A = (1, 0, 1, 0)$ y corta al plano de ecuaciones: $2x - y = 0$, $y + z = 5$.

12. Consideramos el plano π y dos puntos P y Q de $\mathbb{K}^4$, cuyas ecuaciones y coordenadas respecto del sistema de referencia estándar son, respectivamente,

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} x + y = 0 \\ z + t = 1 \end{array} \right. , \quad P = (1, -1, 0, 1), \quad Q = (1, 0, 0, 0).$$

   a) Encontrar un plano π' tal que $\pi \cap \pi' = \{P\}$.
   b) Encontrar una recta r que pase por el punto Q y tal que $V(r, \pi) = \mathbb{K}^4$.
   c) ¿Existe una recta s tal que $P \in s$ y $V(s, \pi) = \mathbb{K}^4$?
   d) Hallar un sistema de referencia $\mathcal{R}$ de $\mathbb{K}^4$ tal que las ecuaciones de π respecto de $\mathcal{R}$ sean $x = 0, z = 0$.

13. En el espacio afín $\mathbb{K}^4$ se consideran los subespacios afines M y N de ecuaciones

$$M : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & = & & & \lambda & + & \mu \\ y & = & 1 & - & \lambda & + & \mu \\ z & = & -1 & + & \lambda & + & \mu \\ t & = & & - & \lambda \end{array} \right. \qquad N : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & - & 2y & - & 2z & + & t & = & 4 \\ x & & & - & 2z & - & t & = & -2 \\ x & - & y & - & 2z & & & = & 1 \end{array} \right.$$

   a) Estudiar la posición relativa de M y N.
   b) Encontrar una recta paralela a M y que esté contenida en N.
   c) ¿Existe algún sistema de referencia de $\mathbb{K}^4$ respecto del cual las ecuaciones de M sean $x = 0$, $y = 0$?

14. *a*) Encontrar unas ecuaciones implícitas de la recta de $\mathbb{K}^3$ que pasa por el punto $(0, 1, 0)$ y es paralela a los planos $\pi_1 : x + y + 2z = 4$ y $\pi_2 : x - y - z = 1$.
   b) Estudiar la posición relativa de las rectas

$$r : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & z & = & 1 \end{array} \right. \qquad \text{y} \quad s : \left\{ \begin{array}{ccccc} x & = & 1 & + & \lambda \\ y & = & 2 & + & \lambda \\ z & = & & + & \lambda \end{array} \right.$$

Lista número dieciseis.

Aplicaciones afines.

1. En cada uno de los siguientes casos hallar la matriz, respecto del sistema de referencia estándar, de la aplicación afín f de $\mathbb{K}^2$ que satisface las condiciones dadas. Encontrar además el conjunto de puntos fijos de f.

    a) $f(0,0) = (1,-1)$, $f(1,0) = (3,-1)$, $f(0,1) = (2,2)$;

    b) $f(2,1) = (1,2)$, $f(-1,-1) = (1,1)$, $f(0,1) = (2,-1)$;

    c) $f(\ell_1) = m_1$, $f(\ell_2) = m_2$, $f(\ell_3) = m_3$ donde

    $$\ell_1 : x = 1; \ell_2 : y = x; \ell_3 : y = -2; m_1 : 2x - y = 0; m_2 : x + y = 0; m_3 : 2x + y = 1.$$

2. Sean A_1 y A_2 dos espacios afines y $f : A_1 \to A_2$ una aplicación afín cuya matriz respecto de los sistemas de referencia $\mathcal{R}_1 = \{p; e_1, e_2, e_3\}$ de A_1 y $\mathcal{R}_2 = \{q; u_1, u_2\}$ de A_2 es

    $$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

    Determinar la matriz de f respecto de los sistemas de referencia cartesianos

    $$\mathcal{R}'_1 = \{p + e_1 + 2e_3; e_3, e_1 + e_2, e_2 + e_3\} \quad \text{y} \quad \mathcal{R}'_2 = \{q + 2u_1; u_1 + u_2, -u_2\}.$$

3. $(*)$ Hallar la matriz, respecto del sistema de referencia estándar, de la aplicación afín f de $\mathbb{K}^2$ que deja invariantes todas las rectas que pasan por el punto $(2,1)$ y tal que $f(1,0) = (4,3)$.

4. $(*)$ Hallar la matriz, respecto del sistema de referencia estándar, de la aplicación afín f de $\mathbb{K}^2$ que cumple que toda recta r es paralela a $f(r)$, el punto $(1,3)$ permanece fijo y $f(2,1) = (4,-3)$.

5. Sean las rectas $r_1 : x - 2y = -2$, $r_2 : x + y = 1$ y $r_3 : x + 4y = -2$ de $\mathbb{K}^2$. Escribir la matriz respecto del sistema de referencia estándar de la aplicación afín f de $\mathbb{K}^2$ que transforma r_1, r_2 y r_3 en r_3, r_2 y r_1 respectivamente.

6. $(*)$ Sean $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{K}^2$ las rectas de ecuaciones $x + y = 1$ y $x - y = 1$ respectivamente. ¿Existe alguna aplicación afín f de $\mathbb{K}^2$ del que ℓ_1 y ℓ_2 sean rectas invariantes, de modo que $f|\ell_1$ sea una simetría central y $f|\ell_2$ sea una homotecia de razón 3? ¿Es f único? En caso afirmativo,

    a) ¿cuáles son las rectas de $\mathbb{K}^2$ invariantes por f?

    b) ¿cuáles son los puntos fijos de f?

    c) ¿cuál es la matriz de f respecto del sistema de referencia cartesiano estándar?

7. Hallar la imagen por la aplicación afín f de $\mathbb{K}^3$ cuya matriz respecto del sistema de referencia estándar es

    $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

    del plano de ecuación $x - y + 2z = 1$. Describir el subespacio de puntos fijos de f.

8. Hallar el centro y la matriz respecto del sistema de referencia estándar de la homotecia f de $\mathbb{K}^4$ de razón 2 tal que $f(2,0,1,0) = (-1,0,1,1)$.

9. Hallar la matriz respecto del sistema de referencia estándar del endomorfismo afín f de $\mathbb{K}^3$ que deja fijos todos los puntos del plano $S : x + 3y + 2z + 5 = 0$ y que transforma el punto $P = (0,0,0)$ en el punto $Q = (-5,5,-5)$. Demostrar que $f|_T$ es una traslación para cada plano T paralelo a S.

10. Consideremos los subespacios

$$M = \{x_1 + x_2 + x_3 = 1\} \quad \text{y} \quad N = \{x_1 = 0, x_2 + x_3 = 0\},$$

de $\mathbb{K}^3$, el punto $P = (0,2,1)$ y la aplicación afín f de $\mathbb{K}^3$ cuya matriz respecto del sistema de referencia estándar es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -1 \\ 4 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hallar unas ecuaciones implícitas del subespacio de puntos fijos de f, de los subespacios $f(M)$, $f^{-1}(N)$, $f^{-1}(P)$ y del subespacio imagen de f.

11. Hallar la matriz respecto del sistema de referencia estándar de la aplicación afín f de $\mathbb{K}^3$ que cumple $f(r) = s$, $f(s) = t$ y $f(t) = r$, siendo

$$r : \{x_1 = 1,\, x_3 = 0\}; \quad s : \{x_1 = 0,\, x_2 = 1\} \quad \text{y} \quad t : \{x_2 = 0,\, x_3 = 1\}$$

12. $(*)$ Demostrar que el endomorfismo f de $\mathbb{K}^3$ cuyas ecuaciones son

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x' & = & 4 & + & x & + & 3y & + & 3z \\ y' & = & 3 & & & + & 4y & + & 3z \\ z' & = & -6 & & & - & 6y & - & 5z \end{array} \right.$$

es composición de una traslación T_v y una aplicación afín g cuyo conjunto de puntos fijos es un plano y cuya dirección contiene al vector v de la traslación. Determinar dicho vector v y el plano π formado por puntos fijos de g.

13. Demostrar que la aplicación afín de $\mathbb{K}^3$ de ecuaciones

$$f(x_1, x_2, x_3) = (-1 + 2x_1 + x_2 + x_3, 1 - x_1 - x_3, 2 - 2x_1 - 2x_2 - x_3)$$

es una simetría. Determinar su base y dirección.

14. Comprobar que la aplicación afín de $\mathbb{K}^3$ cuya matriz respecto de una referencia cartesiana $\mathcal{R}$ es

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

es una proyección. Hallar su base y su dirección, así como una referencia $\mathcal{R}'$ respecto de la que la matriz de la proyección sea diagonal.

15. Una dilatación f de $\mathbb{R}^3$ tiene como base el plano $2y + 3z + 4 = 0$ y su aplicación lineal asociada $\overrightarrow{f}$ transforma el vector $u = (1,1,-1)$ en $2u$. Encontrar la matriz de f respecto del sistema de referencia estándar.

16. $(*)$ Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el endomorfismo afín definido por:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_1 + x_2 - \frac{3}{2}x_3, -\frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3, -x_2 + 2x_3\Big).$$

   a) Demostrar que f es una dilatación. Determinar su base, su dirección y su razón.

   b) Sea $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la homotecia de centro $(-1,2,2)$ y razón 2. Demostrar que $g \circ f$ es una dilatación. Determinar su base, su dirección y su razón.

17. Estudiar si el endomorfismo f de $\mathbb{K}^3$ definido por

$$f(x_1, x_2, x_3) = \Big(-2 + 3x_1 + 2x_2 + 2x_3, 1 - x_1 - x_3, 1 - x_1 - x_2 \Big)$$

es una trasvección. En caso afirmativo, encontrar su base (el subespacio de puntos fijos) y su dirección.

18. ¿Existe alguna aplicación afín de $\mathbb{R}^3$ que transforme el conjunto $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ en $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$? En caso afirmativo ¿es alguna de ellas inyectiva?

Lista número diecisiete.

Cuádricas afines.

1. Clasificar las siguientes cónicas tras reducir las ecuaciones a forma canónica:

   a) $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$,

   b) $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 4y + 2 = 0$,

   c) $x^2 + 3xy + 2y^2 + 2x + 5y - 3 = 0$,

   d) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$.

2. Clasificar afínmente las siguientes cuádricas:

   a) $x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 12xz - 4yz + 2x - 6y - 4z + 1 = 0$,

   b) $x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz + 2x + 1 = 0$,

   c) $-x^2 + y^2 - 2z^2 - 6xz + 2yz - 2x - 6y - 2 = 0$,

   d) $y^2 + z^2 - 2yz + 6x - 4 = 0$,

   e) $5x^2 + 4y^2 + 2z^2 + 6xy + 4xz + 6x + 8y + 3 = 0$,

   f) $3x^2 + 2y^2 + 6xy + 8x + 4y + 2z + 2 = 0$.

3. Discutir, para los distintos valores de $k \in \mathbb{R}$, la naturaleza de la cónica de ecuación

$$k(x^2 + y^2) - 2(xy - x + y) + 3 = 0.$$

4. Calcular la recta tangente a la cónica $\Gamma : x^2 + 2y^2 = 6$ en el punto $p = (2, 1)$. Calcular las rectas tangentes a Γ que pasan por el punto $q = (3, 1)$.

5. ¿Cuál es el plano tangente a la cuádrica $C : x^2 + y^2 - z^2 = 1$ en el punto $p = (1, 1, 1)$?

6. Clasificar la cónica $2y^2 - 7xy + 24y + 6x = 0$ y hallar su centro.

7. Calcular el cono tangente a la cuádrica $x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz + 2x + 1 = 0$, con vértice en el punto $(1, 0, 0)$. ¿A lo largo de qué cónica se produce la tangencia?

8. Calcular los dos planos tangentes a la cuádrica $y^2 + z^2 - 2yz + 6x - 4 = 0$ que contienen a la recta $x + y - 1 = z = 0$. ¿En qué puntos de la cuádrica se produce la tangencia?

9. Calcular el cilindro tangente a la cuádrica $3x^2 + 2y^2 + 6xy + 8x + 4y + 2z + 2 = 0$ y paralelo a la recta $x - y = x - z = 1$.

10. Sea Q la superficie cuádrica afín de ecuación

$$q(x, y, z) = 2 - 2x - 2y - 2z - 2xy - 2xz - 2yz - x^2 - y^2 + z^2.$$

   (1) Calcular los centros de Q si los tiene.
   (2) Determinar una referencia afín adecuada para clasificar Q.
   (3) ¿Existe alguna recta tangente a la cuádrica que pase por el punto $(0, 0, -1)$?

Lista número dieciocho.

Espacios afines euclídeos.

1. En el espacio afín euclídeo $\mathbb{R}^3$ se consideran el punto $p = (0, 1, 0)$ y los subespacios afines

$$L : \begin{cases} 2x + y + 2z = -1 \\ y = 0 \\ -2x + 2y + z = 4 \end{cases} \quad \text{y} \quad M : \begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ -2x + y + z = 7 \end{cases}$$

Determinar los puntos $a \in L$ y $b \in M$ tales que $d(a, p) = d(L, p)$ y $d(b, p) = d(M, p)$.

2. Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $A = (1, 1, 1)$, son paralelas al plano $\pi : x - y = 2$ y forman un ángulo igual a $\frac{\pi}{6}$ con el plano $\pi' : x - y + z = 0$.

3. Hallar la matriz, respecto del sistema de referencia estándar, de la simetría de $\mathbb{R}^k$ respecto de cada uno de los siguientes hiperplanos:

   a) $x = 0$, $k = 2$;
   b) $x + y - 1 = 0$, $k = 2$;
   c) $x + y + z = 0$, $k = 3$ y
   d) $2x - 2y + z - 4 = 0$, $k = 3$.

4. Hallar ecuaciones de las siguientes isometrías del espacio afín euclídeo $\mathbb{R}^3$:

   a) la simetría axial de eje $\begin{cases} 3x - 4y - 2z &= 0 \\ z &= 2 \end{cases}$
   b) la simetría especular respecto del plano $x + 2y - 3z + 2 = 0$.

5. Demostrar que cada una de las matrices que se dan a continuación es la matriz, respecto del sistema de referencia estándar, de una isometría de los espacios afines euclídeos $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$, respectivamente. Encontrar en cada caso un sistema de referencia euclídeo (es decir, con base asociada ortonormal) respecto del cual la matriz de la isometría sea su matriz reducida o canónica:

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ -5 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. ($*$) Probar que la isometría de $\mathbb{R}^4$ cuya matriz respecto del sistema de referencia estándar es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

define en $\mathbb{R}^4$ una simetría ortogonal con desplazamiento (es decir, es la composición de una simetría ortogonal con base B y una traslación de vector $v \in B$). Determinar la base de la simetría y el vector de desplazamiento.

7. ($*$) Probar que la isometría de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz respecto del sistema de referencia estándar es

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 7 \\ 3 & -8 & 1 & 4 \\ -15 & 1 & -8 & 4 \end{pmatrix},$$

es un movimiento helicoidal (es decir, es la composición de una rotación de eje r y una traslación de vector paralelo a r). Determinar el eje de giro y el vector de deslizamiento.

8. Hallar la matriz respecto del sistema de referencia estándar de la aplicación afín f de $\mathbb{R}^3$ que cumple:

   a) f transforma la recta $\begin{cases} y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$ en la recta $\begin{cases} x = 0 \\ z = 1 \end{cases}$ y viceversa, y

   b) la restricción de f al plano $z = 0$ es la simetría ortogonal respecto de la recta de ecuaciones $x - y = z = 0$.

9. Encontrar todas las isometrías de $\mathbb{R}^3$ que transforman la recta $\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$ en la recta $\begin{cases} y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ y viceversa.

10. Sean $\mathcal{R}$ el sistema de referencia estándar en $\mathbb{R}^3$ y f la aplicación afín de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz respecto de $\mathcal{R}$ es

$$M_f(\mathcal{R}) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 5 & 0 \\ 5 & -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   a) Probar que f es isometría. Determinar el conjunto de puntos fijos de f. ¿De qué tipo de isometría se trata?

   b) Hallar un sistema de referencia ortonormal $\mathcal{R}'$ tal que $M_f(\mathcal{R}')$ sea la matriz reducida de f.

11. Sean $u = (2, 0, -1)$ y la simetría especular σ respecto del plano

$$\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - z = 1\}.$$

   Encontrar un sistema de referencia ortonormal $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que la matriz de la isometría $\tau = T_u \circ \sigma$ sea su matriz reducida. Hallar dicha matriz.

12. ($*$) Sean σ_1 y σ_2 las simetrías especulares de $\mathbb{R}^3$ respecto de los planos $\pi_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - z = 1\}$ y $\pi_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0\}$, respectivamente.

   a) Encontrar un sistema de referencia ortonormal $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que la matriz de la isometría $\sigma_2 \circ \sigma_1$ respecto de $\mathcal{R}$ sea su matriz reducida. Hallar dicha matriz.

   b) Hallar el conjunto $N = \{v \in \mathbb{R}^3 : T_v \circ \sigma_2 \circ \sigma_1 \text{ no tiene puntos fijos }\}$. ¿Qué tipo de movimiento es $T_v \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$ si $v \in N$?

13. ($*$) Demostrar que la aplicación afín f de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz respecto del sistema de referencia estándar $\mathcal{R}$ es

$$M_f(\mathcal{R}) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 6 & 0 & 8 \\ 5 & 0 & 10 & 0 \\ 10 & 8 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

   es una semejanza y calcular su razón.

   a) Determinar las matrices respecto de $\mathcal{R}$ de la homotecia h y de la isometría g tales que $f = h \circ g = g \circ h$.

   b) Clasificar la isometría g, y encontrar un sistema de referencia ortonormal respecto del cual la matriz de g sea su matriz reducida.

14. ($*$) Sean σ_1, σ_2 y σ_3 las simetrías especulares respecto de tres planos paralelos π_1, π_2, π_3 en el espacio afín euclídeo $\mathbb{R}^3$. Clasificar la isometría $\sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$.

15. ($*$) En el plano afín euclídeo $\mathbb{R}^2$ se consideran la recta r de ecuación $x + y = 3$, el punto $P = (1, 2)$ y el vector $v = (0, 3)$. Sean σ_1 la simetría de eje r, σ_2 el giro de ángulo $\pi/2$ y centro P, y σ_3 la traslación de vector v. Se pide:

a) Calcular la matriz de $\sigma = \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$ respecto del sistema de referencia estándar.

b) Calcular, si los tuviera, los puntos fijos de σ.

c) Encontrar un sistema de referencia euclídeo en $\mathbb{R}^2$ respecto del que las ecuaciones de σ sean: $x' = x$, $y' = -y$.

16. ¿Existen una semejanza f y un sistema de referencia ortonormal $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que

$$M_f(\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}?$$

En caso afirmativo determinar su centro y su razón.

17. Determinar los focos de las siguientes cónicas:

a) $7x^2 + y^2 + 8xy - 6x - 2y = 0$,

b) $9x^2 + 25y^2 - 54x - 50y - 119 = 0$,

c) $y^2 + 2py - 2px - p^2 = 0$.

18. Determinar el ángulo que forman las asíntotas de la hipérbola

$$(y - 2x + 4)(2y + x - 3) = 7.$$

19. Determinar la ecuación de una hipérbola equilátera cuyos focos sean los de la elipse

$$4x^2 + 9y^2 = 1.$$

20. Clasificar afínmente la cónica C de ecuación

$$5x^2 + 5y^2 + 6xy - 4x + 4y + 2 = 0.$$

Encontrar su forma canónica euclídea y un sistema de referencia euclídeo respecto del cual la ecuación de la cónica sea su forma canónica.

21. ($*$) Se considera en el espacio afín euclídeo ordinario $\mathbb{E}^3$ el plano $X : x+y+z = 0$, la recta $r : x + y = z = 0$ y la recta $s : x = y = z$.
(1) Encontrar tres vectores u, v, w, el primero paralelo a r, el segundo a X y el tercero a s, que formen una base ortonormal positiva del espacio vectorial euclídeo.
(2) ¿Qué movimientos rígidos de $\mathbb{E}^3$ dejan fijos exclusivamente los puntos de la recta s?
(3) Determinar los movimientos de (2) que cumplen $f^4 = \mathrm{Id}$.
(4) Escribir las ecuaciones de los movimientos de (3) respecto de la referencia formada por los puntos $a = (1, 1, 1), a + u, a + v, a + w$.