Grado en Matemáticas. UCM

CÁLCULO DIFERENCIAL (2º curso)[*]

Pilar Cembranos, Eva Gallardo, José María Martínez Ansemil, Socorro Ponte, Jesús M. Ruiz

PROBLEMAS

(Los marcados con un relámpago son de especial dificultad)

LISTA 1. Distancias, normas y productos escalares

Número 1. Sea $\|\cdot\|$ una norma en $\mathbb{R}^n$. Demostrar que para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^n$ se verifica que:

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|\,.$$

Número 2. Sea $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ un producto escalar sobre $\mathbb{R}^n$ y sea $\|\cdot\|$ la norma asociada a él. Demostrar que para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ se verifica que

$$\|x + y\|\,\|x - y\| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2\,.$$

Comprobar que se da la igualdad si y sólo si $\langle x, y\rangle = 0$.

Número 3. Demostrar el *teorema del coseno:*

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\|y\|\cos(x, y)$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Número 4. Encontrar una base ortogonal de $\mathbb{R}^2$ respecto del producto escalar

$$\langle (x, y), (x', y')\rangle = (x, y)\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Número 5. Estudiar para qué valores de $a \in \mathbb{R}$, lo siguiente define un producto escalar en $\mathbb{R}^2$.

$$\langle (x, y), (x', y')\rangle = (x, y)\begin{pmatrix} a-1 & 2 \\ 2 & a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Número 6. Consideramos en $\mathbb{R}^n$ las tres normas

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \quad \|x\| = \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\Big)^{1/2}, \quad \|x\|_\infty = \text{máx}\{|x_k| : k = 1, ..., n\}.$$

Demostrar que:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq \|x\|_1 \quad \text{y que} \quad \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|x\| \leq n\,\|x\|_\infty\,,$$

[*] 5 de septiembre de 2016

Número 7. Sea $\|\cdot\|^*$ una norma en $\mathbb{R}^n$. Sean $e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{R}^n$ los vectores de la base estándar y consideremos la constante positiva $c^* = \sum_i \|e_i\|^*$. Mostrar que $\|\cdot\|^*$ está acotada por la norma euclídea $\|\cdot\|$ en el sentido siguiente:

$$\|x\|^* = \Big\|\sum\nolimits_i x_i e_i\Big\|^* \leq \sum\nolimits_i |x_i| \|e_i\|^* \leq c^* \|x\|.$$

Número 8. Definimos $\|(x,y)\|^* = \text{máx}\{\|x\|_2, \|y\|_2\}$ para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{R}^4$. Mostrar que ésta es una norma en $\mathbb{R}^4$ equivalente a la euclídea.

Número 9. Sea $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Estudiar si es una distancia la aplicación $d : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por

$$d(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{2} & \text{si } x \neq y, \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Número 10. Estudiar si la aplicación $d(x,y) = \left|\ln \frac{y}{x}\right|$ es una distancia en $\mathbb{R}^+$.

Número 11. En $\mathbb{R}^+$ se considera la aplicación $d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$. Demostrar que d es una distancia en $\mathbb{R}^+$ y calcular el diámetro del conjunto $\mathbb{N}$ y del intervalo $(0,2)$.

Número 12. Sea d una distancia en $\mathbb{R}^n$. ¿Cuándo se puede afirmar que d proviene de una norma?

Número 13. Consideremos en $\mathcal{C}([0,1])$ las tres normas siguientes:

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt, \qquad \|f\| = \Big(\int_0^1 |f(t)|^2\,dt\Big)^{1/2}, \qquad \|f\|_\infty = \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|.$$

Sea la sucesión de funciones

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{1}{n} \leq t \leq 1, \\ 1 - nt & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Calcular $\text{lím}_{n\to\infty} \|f_n\|^*$, donde $\|\cdot\|^*$ es cada una de las normas anteriores. ¿Qué dice esto de la proximidad de estas funciones y la función idénticamente nula?

Número 14. Construir en $\mathcal{C}([0,1])$ una familia infinita no numerable de normas incomparables por el procedimiento siguiente. Para $0 < a < 1$ se considera la función continua

$$\mu_a(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}(a-t) & \text{si } 0 \leq t \leq a, \\ \frac{1}{a-1}(a-t) & \text{si } a \leq t \leq 1. \end{cases}$$

y se define $\|f\|_a = \int_0^1 \mu_a(t)|f(t)|dt$. Además, para cada entero $n \geq 1$ definimos

$$g_{a,n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t \leq a - \frac{1}{n}, \\ 1 - n(a-t) & \text{si } a - \frac{1}{n} \leq t \leq a, \\ 1 + n(a-t) & \text{si } a \leq t \leq a + \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{si } a + \frac{1}{n} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

(1) Mostrar que efectivamente $\|\cdot\|_a$ es una norma en $\mathcal{C}([0,1])$.
(2) Calcular las normas $\|g_{a,n}\|_b$ para cualesquiera $0 < a, b < 1$ y n grande.
(3) Deducir que no existe ninguna constante positiva c tal que $\|\cdot\|_b \leq c\|\cdot\|_a$ con $a \neq b$.

Número 15. Se interpreta el espacio afín $E = \mathbb{R}^{m\times n}$ como el espacio vectorial de las matrices $m \times n$. Mostrar que la fórmula $\langle A, B\rangle = \text{traza}(A^tB)$ define el producto escalar euclídeo en E y deducir que la norma euclídea de una matriz A es la raíz cuadrada de la suma de los autovalores de A^tA (obsérvese que son todos ≥ 0). Deducir de la desigualdad de Cauchy-Schwarz que es una norma *submultiplicativa* $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

Número 16. Fijemos normas $\|\cdot\|^{(k)}$ en los espacios afines $\mathbb{R}^k$. En el espacio vectorial formado por las matrices de orden $m \times n$ con coeficientes reales se define la norma

$$\|A\|_{\mathcal{L}} = \sup\big\{\|Ax^t\|^{(m)} : \ x \in \mathbb{R}^n \text{ y } \|x\|^{(n)} = 1\big\}.$$

Demostrar que $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ es efectivamente una norma. ¿Es submultiplicativa? Encontrar una expresión explícita de esta norma para $\|\cdot\|^{(k)} = \|\cdot\|_\infty$.

Número 17. Supongamos que la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ se define utilizando la norma euclídea $\|\cdot\|$ (es decir, $\|\cdot\|^{(k)} = \|\cdot\|$). Mostrar que la norma $\|A\|_{\mathcal{L}}$ de una matriz A es la raíz cuadrada del máximo de los autovalores de A^tA.

LISTA 2. La topología usual del espacio afín

Número 1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una aplicación estrictamente creciente. Probar que:
(1) $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$ es una distancia en $\mathbb{R}$.
(2) d genera la topología euclídea si y sólo si f es continua.
(3) Si f es lineal, entonces d proviene de un producto escalar.
(4) Si $f(x) = \arctan x$, entonces hay sucesiones de Cauchy (para d) que no son convergentes.

Número 2. Dados dos subconjuntos U y T de $\mathbb{R}^n$ se define

$$U + T = \{x + y \in \mathbb{R}^n : \ x \in U, \ y \in T\}.$$

Demostrar que si U es abierto entonces $U + T$ también lo es.

Número 3. Dados dos subconjuntos U y T de $\mathbb{R}$ se define

$$U \cdot T = \{xy \in \mathbb{R} : \ x \in U, \ y \in T\}.$$

¿Es necesariamente abierto $U \cdot T$ cuando lo es U?

Número 4. Proponer y resolver un ejercicio similar al anterior definiendo

$$\langle U, T\rangle = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R} : \ x \in U, \ y \in T\}$$

para subconjuntos U y T de $\mathbb{R}^n$.

Número 5. Estudiar cuáles de las siguientes igualdades son ciertas, y proporcionar contraejemplos para las que no lo sean:

$$(S \cap T)^\circ = \overset{\circ}{S} \cap \overset{\circ}{T}, \quad (S \cup T)^\circ = \overset{\circ}{S} \cup \overset{\circ}{T}; \quad (S \cup T)' = S' \cup T', \quad (S \cap T)' = S' \cap T';$$
$$\overline{S \cup T} = \overline{S} \cup \overline{T}, \quad \overline{S \cap T} = \overline{S} \cap \overline{T}; \quad \overline{S} = \overset{\circ}{S} \cup \mathrm{Fr}(S), \quad S' = (S')', \quad \mathbb{R}^n \backslash \overline{S} = (\mathbb{R}^n \backslash S)^\circ.$$

Número 6. Demostrar que si $U \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto, entonces para cualquier conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ se cumple $U \cap \overline{S} \subset \overline{U \cap S}$. Mostrar con un ejemplo que si U no es abierto el contenido puede no darse.

Número 7. Sea V un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$ y sea $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in V\}$. Demostrar que U es un abierto de $\mathbb{R}^2$. Más generalmente, demostrar que si $V \subset \mathbb{R}^p$ y $W \subset \mathbb{R}^q$ son abiertos, entonces $V \times W \subset \mathbb{R}^{p+q}$ es abierto.

Número 8. Demostrar que para cualesquiera $S \subset \mathbb{R}^p$ y $T \subset \mathbb{R}^q$ se cumple:

$$(S \times T)^\circ = \overset{\circ}{S} \times \overset{\circ}{T} \quad \text{y} \quad \overline{S \times T} = \overline{S} \times \overline{T}.$$

Número 9. Sea V un conjunto abierto de $\mathbb{R}^3$. Demostrar que el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^2$ es abierto:

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \text{existe algún } z \in \mathbb{R} \text{ tal que } (x, y, z) \in V\}.$$

Número 10. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y sea

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, y) < 1 \text{ para algún } y \in A\} = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, A) < 1\}.$$

Demostrar que U es abierto. ¿Y qué se puede decir de los conjuntos

$$\{x \in \mathbb{R}^n : d(x, y) \le 1 \text{ para algún } y \in A\} \quad \text{y} \quad \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, A) \le 1\}?$$

¿Y si utilizamos las desigualdades contrarias?

Número 11. Dar en cada caso un ejemplo de un conjunto $S \subset \mathbb{R}$ tal que:
(a) S sea infinito y no tenga puntos de acumulación.
(b) S tenga infinitos puntos de acumulación, pero los puntos de S sean todos aislados,
(c) la frontera de S sea su adherencia,
(d) el interior de S no sea el interior de su adherencia.

Número 12. Determinar el interior, el conjunto de puntos de acumulación, la adherencia y el conjunto de los puntos frontera de los conjuntos:

$$S_1 = \left\{ \tfrac{1}{2m} - \tfrac{1}{2n} : m, n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}, \qquad S_2 = \left\{ \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n \operatorname{sen} \tfrac{n\pi}{4} : n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R},$$
$$S_3 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \tfrac{m}{2^n} : m = 1, 2, 3, ..., 2^n, \right\} \subset \mathbb{R}, \qquad S_4 = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \left\{ (x, y) : x^2 + y^2 = r^2 \right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Número 13. Demostrar que en toda bola centrada en un punto de acumulación de un conjunto existen infinitos puntos distintos de él.

Número 14. Probar que un subconjunto infinito de $\mathbb{R}^n$ cuyos puntos son todos aislados es numerable.

Número 15. Mostrar que todo punto de $\mathbb{R}^n$ es límite de puntos *con todas las coordenadas racionales.* También que lo es de puntos *con todas las coordenadas irracionales.*

Número 16. Demostrar que si una sucesión acotada de $\mathbb{R}^n$ tiene la propiedad de que todas sus subsucesiones convergentes convergen al mismo punto, entonces la sucesión es convergente (y en consecuencia todas sus subsucesiones son convergentes).

Número 17. (1) Demostrar, utilizando directamente la definición, que una sucesión convergente con su límite es un conjunto compacto y sin su límite no lo es.

(2) Dar un ejemplo de un conjunto compacto con infinitos puntos de acumulación e infinitos puntos aislados.

Número 18. Estudiar si el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^2$ es compacto:

$$A = \Big\{\big((-1)^n \frac{n+1}{n}, (-1)^n\big) : n \geq 1\Big\}$$

LISTA 3. Límites y continuidad

Número 1. Se considera una función de dos variables $f(x,y)$. Comparar las tres condiciones siguientes:

(1) *Para todo* θ *existen los límites* $\lim_{\rho\to 0} f(\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta)$ *y no dependen de* θ*.*

(2) *Para todo* μ *existen los límites* $\lim_{x\to 0} f(x,\mu x)$ *y no dependen de* μ*.*

(3) *Para todo* λ *existen los límites* $\lim_{y\to 0} f(\lambda y, y)$ *y no dependen de* λ*.*

Mostrar que todas se cumplen si existe el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, pero ninguna es suficiente para ello.

Número 2. Estudiar la existencia de límite en $(0,0)$ para las siguientes funciones definidas en ciertos subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ de los cuales (0,0) es punto de acumulación:

$$f_1(x,y) = \frac{e^{xy}}{x+1}, \qquad f_2(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}, \qquad f_3(x,y) = \frac{\mathrm{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2},$$

$$f_4(x,y) = \frac{|x|+|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad f_5(x,y) = \frac{e^{xy}-1}{x}, \qquad f_6(x,y) = \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$f_7(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \quad f_8(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}, \quad f_9(x,y) = (x+y)\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x}\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{y},$$

$$f_{10}(x,y) = \frac{1}{x}\,\mathrm{sen}(xy), \quad f_{11}(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y^2)^2}, \quad f_{12}(x,y) = \frac{y}{x}\,\mathrm{sen}(x^2+y^2).$$

$$f_{13}(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}, \quad f_{14}(x,y) = x^2|y|^{\frac{1}{2}}\log(x^2+y^2), \quad f_{15}(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^4+y^6}.$$

$$f_{16}(x,y) = \frac{x^3y^3}{x^4+y^6}, \quad f_{17}(x,y) = \frac{x^3y^2}{x^4+y^6} \ (\leq (x^4+y^6)^\alpha \ \text{ para } \alpha > 0 \text{ adecuado}).$$

$$f_{18}(x,y)=\cos\frac{1-e^x}{x^2+y^2},\quad f_{19}(x,y)=\frac{x^ky}{x^2+y^2}\cos\frac{1-e^x}{x^2+y^2}\quad \text{para}\ \ k=0,1,2.$$

Número 3. (1) Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. Fijado un punto $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ supongamos que existe el límite de f en (x_0,y_0) y denotemos por l su valor. Demostrar que si para cada $x\in\mathbb{R}$ existe el $\lim_{y\to y_0} f(x,y)$, entonces existe el límite iterado $\lim_{x\to x_0}(\lim_{y\to y_0} f(x,y))$ y su valor es l. (Obsérvese que sucede lo análogo si los límites se iteran en el orden contrario.)

(2) Buscar entre las funciones del problema anterior ejemplos de que:

(a) Pueden existir los límites iterados y ser distintos.
(b) Pueden existir los límites iterados, ser iguales y sin embargo no existir el límite.
(c) Puede existir el límite, pero no alguno de los límites iterados.
(d) Puede existir límite a lo largo de cualquier recta pero no existir el límite.

Número 4. Sea $S=(0,+\infty)\times[0,2\pi)\subset\mathbb{R}^2$ y sea g la aplicación de S en $\mathbb{R}^2$ definida por

$$g(\rho,\theta)=(\rho\cos\theta,\rho\operatorname{sen}\theta).$$

(a) Demostrar que g es una biyección continua entre S y $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ tal que dado $\delta>0$

$$g(\{(\rho,\theta):0<\rho<\delta,\ 0\le\theta<2\pi\})=B((0,0),\delta)\backslash\{(0,0)\}$$

(b) Sea f es una función de $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ en $\mathbb{R}$ y sea $F=f\circ g$. Demostrar que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=l$ si y solamente si

para todo $\varepsilon>0$ *existe* $\delta>0$ *tal que si* $0<\rho<\delta$, *para todo* $0\le\theta<2\pi$ *se tiene* $|F(\rho,\theta)-l|<\varepsilon$.

Hacer un dibujo que represente este cambio a *coordenadas polares*. ¿Qué tiene que ver esto con el problema número 1?

Número 5. Para estudiar los límites de funciones en $\mathbb{R}^3$ se puede hacer un cambio a *coordenadas esféricas:*

$$x=\rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta,\ y=\rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta,\ z=\rho\cos\phi$$

con $\rho>0,\ \phi\in[0,\pi],\ \theta\in[0,2\pi)$. Probar un resultado como el anterior, y hacer un dibujo que lo represente.

Número 6. Estudiar la continuidad en $\mathbb{R}^2$ de las siguientes funciones:

$$f_1(x,y)=\begin{cases}(x+y)^2\cos\frac{1}{x+y} & \text{si } x+y\neq 0,\\ 0 & \text{si } x+y=0.\end{cases}\qquad f_2(x,y)=\begin{cases} y & \text{si } x>0,\\ -y & \text{si } x\le 0.\end{cases}$$

$$f_3(x,y)=\begin{cases}\frac{y\operatorname{sen}^2 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}\qquad f_4(x,y)=\begin{cases} xy\operatorname{sen}\frac{x}{y} & \text{si } y\neq 0,\\ 0 & \text{si } y=0.\end{cases}$$

$$f_4(x,y)=\begin{cases}x^3\log\left(1+\frac{|y|^\alpha}{x^4}\right) & \text{si } x\neq 0,\\ 0 & \text{si } x=0,\end{cases}\quad \text{según los valores de } \alpha\in\mathbb{R}.$$

Número 7. La función $f(x,y)=\frac{x^3-y^2}{x^2-y}$ está definida y es continua para $x^2\neq y$. ¿Puede extenderse con continuidad a algún punto más?

Número 8. Sean f una aplicación de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, a un punto de $\mathbb{R}^n$, b un punto de $\mathbb{R}^m$ y considérense las siguientes definiciones:

(1) $\lim_{x\to a} ||f(x)|| = \infty$ si *para todo* $M > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que si* $\|x - a\| < \delta$ *entonces* $\|f(x)\| > M$.
(2) $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = b$ si *para todo* $\varepsilon > 0$, *existe* $R > 0$ *tal que si* $\|x\| > R$ *entonces* $\|f(x) - b\| < \varepsilon$.
(3) $\lim_{\|x\|\to\infty} ||f(x)|| = \infty$ si *para todo* $M > 0$, *existe* $R > 0$ *tal que si* $\|x\| > R$ *entonces* $\|f(x)\| > M$.

Sean ahora f y g funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ y a y b puntos de $\mathbb{R}^n, b \neq 0$. Se pide:

(i) Probar que si $\lim_{x\to a} |f(x)| = \infty$ y $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$.
(ii) Probar que si $\lim_{x\to a} |f(x)| = \infty$ y $g(\mathbb{R}^n)$ es acotado, entonces $\lim_{x\to a} |f(x) + g(x)| = \infty$.
(iii) Probar que si $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ y $g(x) \neq 0$ para todo $x \neq a$, entonces $\lim_{x\to a} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = \infty$.

Enunciar y demostrar resultados análogos para límites del tipo $\lim_{\|x\|\to\infty}$.

Número 9. Estudiar la existencia de los siguientes límites:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(3 - x^2)\cos(y - x^3)}{x^2 + y^4}, \qquad \lim_{\|(x,y)\|\to\infty} \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad \lim_{\|(x,y)\|\to\infty} (x + y)e^{-(x^2+y^2)}.$$

Número 10. Demostrar que la norma euclídea $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una aplicación continua de las tres maneras siguientes:

(1) Directamente con al definición, utilizando el problema número 1 de la lista 1.
(2) Calculando la imagen inversa por $\|\cdot\|$ de un intervalo abierto.
(3) Vía la fórmula explícita de cálculo de la norma euclídea.

Deducir entonces del problema número 7 de la lista 1 que cualquier norma de $\mathbb{R}^n$ es continua.

Número 11. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto y $f : K \to \mathbb{R}$ una función continua. Demostrar que el grafo $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ de f es un conjunto compacto.

Número 12. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación continua tal que $f(0) = 0$ y $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = 0$. Demostrar que $f(\mathbb{R}^n)$ es un compacto de $\mathbb{R}^m$.

Número 13. Sea $f : F \to \mathbb{R}$ una función continua definida en un cerrado no acotado $F \subset \mathbb{R}^n$, tal que $\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) = +\infty$. Demostrar que f alcanza su mínimo en F.

Número 14. Se consideran los conjuntos

$$A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \quad \text{y} \quad C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z(x^2 + y^2) = 1\}.$$

Mostrar que A es abierto en $\mathbb{R}^2$, C es cerrado en $\mathbb{R}^3$ y existe un homeomorfismo $h : A \to C$.

Número 15. Sea $f : U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = 1/\|x\|$. Demostrar que es uniformemente continua en el exterior $\|x\| > r > 0$ de cualquier bola. ¿Lo es en U?

Número 16. Demostrar que si $S \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto acotado y $f : S \to \mathbb{R}^m$ una aplicación uniformemente continua, entonces $f(S)$ es un conjunto acotado. ¿Es suficiente para esto que f sea continua?

Número 17. Estudiar la continuidad uniforme de las funciones $f(x,y)=xy$ y $g(x,y)=|x|^{\frac{1}{2}}y$ en el conjunto $S=\big\{(x,y):|y|\le\frac{|x|}{1+x^2}\big\}\subset\mathbb{R}^2$.

Número 18. Sea $f:S\to S$ una aplicación definida en un conjunto cerrado $S\subset\mathbb{R}^n$, cuyo cuadrado $f^2=f\circ f$ es una aplicación contractiva. Demostrar que entonces f tiene un único punto fijo $a\in S$ y que $a=\lim_k f^k(x_0)$ para cualquier $x_0\in S$.

Número 19. Sea $f:S\to S$ una aplicación continua con dominio $S\subset\mathbb{R}^n$ compacto, y que cumple $\operatorname{dist}(f(x),f(y))<\operatorname{dist}(x,y)$ para cualesquiera dos puntos distintos $x,y\in S$. Estudiar el mínimo en S de la función $g(x)=\operatorname{dist}(x,f(x))$ para concluir que f tiene un único punto fijo en S.

Número 20. Demostrar que cualquier norma $\|\cdot\|^*$ en $\mathbb{R}^n$ es equivalente a la euclídea $\|\cdot\|$, completando la desigualdad del problema número 7 de la lista 1 con una desigualdad $c\|x\|\le\|x\|^*$. (Tomar $c=\max\{\|x\|^*:\|x\|=1\}>0$, que existe por ser la esfera unidad un conjunto compacto.)

LISTA 4. Conjuntos conexos

Número 1. ¿Es conexo el subconjunto $S=\{(0,\frac{1}{n}):n=1,2,...\}$ de $\mathbb{R}^2$? ¿Y si se le añade el origen?

Número 2. Demostrar que si $C_i, i\in I$ es una colección de conjuntos conexos con intersección no vacía $\bigcap_i C_i\neq\varnothing$, entonces su unión $\bigcup_i C_i$ es conexa.

Número 3. Sea $S\subset\mathbb{R}^n$ un conjunto conexo. Demostrar que si $a\in\overline{S}$ entonces $S\cup\{a\}$ es conexo. Deducir que si $T\subset\overline{S}\setminus S$, entonces $S\cup T$ es conexo.

Número 4. Sea $S\subset\mathbb{R}^n$ un conjunto con la siguiente propiedad: cada par de puntos $x,y\in S$ está contenido en un conjunto conexo $C_{xy}\subset S$. Demostrar que S es conexo.

Número 5. Estudiar si son conexos o no los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}^2$:

$S_1=\{(x,y):0<|x|<1\}\cup\{(0,0)\}$
$S_2=\{(x,y):-1<x<0,y\neq0\}\cup\{(x,0):0\le x<1\}$
$S_3=\{(x,y):-1<x<0,(x+1)^2+y^2\neq1\}\cup\{(x,0):0\le x<1\}$
$S_4=\{(x,y):1<4x^2+9y^2<9,x\neq\frac{1}{n},n=1,2,...\}\cup\{(x,y):4x^2+9y^2=1\}$.
$S_5=\{(x,y):1<4x^2+9y^2<9,x\neq\frac{1}{n},n=2,...\}\cup\{(x,y):4x^2+9y^2=1\}$.
$S_6=\{(x,y):x^4+x^6\le5\}$.
$S_7=\{(x,y):x\in\mathbb{Q},\ x^4+x^6\le5\}$.
$S_8=\{(x,y):x^2+y^6\le3\}$.

Número 6. Demostrar que $\{(x^3-\operatorname{sen}x,x):x\in\mathbb{R}\}$ es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^2$.

Número 7. Demostrar que $\{(x,x\operatorname{sen}\frac{1}{x},1):x>0\}\cup\{(0,0,1)\}$ es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^3$. ¿Y si se reemplaza $x\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ por $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$?

Número 8. Dar un ejemplo de dos conjuntos conexos de $\mathbb{R}^2$ cuya intersección no lo sea.

Número 9. Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}$ tal que $\overset{\circ}{S} = \varnothing$. Demostrar que si S tiene más de un punto, entonces no es conexo. ¿Es cierto esto en $\mathbb{R}^2$?

Número 10. Demostrar que una poligonal infinita (defínase!) es un conjunto conexo.

Número 11. Demostrar que el menor conjunto conexo de $\mathbb{R}$ que contiene a $\mathbb{Q}$ es $\mathbb{R}$.

Número 12. Encontrar todos los subconjuntos conexos de $\mathbb{R}^2$ contenidos en $\mathbb{Q}^2$.

Número 13. Proporcionar un ejemplo que demuestre que el interior de un conjunto conexo puede no ser conexo. ¿Puede darse un tal ejemplo en $\mathbb{R}$?

Número 14. Sabemos que un conjunto abierto conexo $W \subset \mathbb{R}^2$ es conexo por poligonales. ¿Lo es también su adherencia?

Número 15. Se considera el conjunto $S = \{(1,0)\} \cup \{(x, \frac{1}{n}x) : 0 \leq x \leq 1, n = 1, 2, 3, ...\}$. Demostrar que A es conexo. ¿Es conexo por poligonales?

Número 16. (1) Sea S un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^n$ y sea $f : S \to \mathbb{R}$ una aplicación *localmente constante*, es decir, que cada punto $x_0 \in S$ tiene un entorno V^{x_0} en $\mathbb{R}^n$ tal que f es constante en $V^{x_0} \cap S$. Demostrar que f es constante.

(2) Sea S un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^n$ y sea $f : S \to \mathbb{R}$ una aplicación continua que sólo tome una cantidad finita de valores. Demostrar que f es localmente constante, luego constante por (1).

Número 17. Se denota $X \subset \mathbb{R}^n$ el *seno del topólogo:*

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \operatorname{sen}\left(\tfrac{2\pi}{x}\right),\ x > 0\}.$$

Demostrar que $Y = X \cup \{(0,1)\}$ es un conjunto conexo, pero no existe ninguna aplicación continua $\gamma : [0,1] \to Y$ tal que $\gamma(0) = (0,1)$ y $\gamma(1) = (1,0)$.

LISTA 5. Diferenciabilidad

Número 1. Calcular las derivadas direccionales de las siguientes funciones en los puntos y direcciones que se indican:

(a) $f(x,y) = x \arctan \frac{x}{y}$; punto (1,1), dirección $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.
(b) $g(x,y,z) = e^x + z$; punto (1,1,1), dirección $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

Número 2. Estudiar la existencia de derivadas direccionales en el origen para las funciones:

$$\text{(a) } f(x,y) = \sqrt[3]{xy} \qquad \text{y} \qquad \text{(b) } g(x,y) = \text{máx}\{|x|, |y|\}.$$

Número 3. Estudiar la continuidad, la existencia de derivadas direccionales y la diferenciabilidad en (0,0) de las funciones:

(a) $f_1(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$ (b) $f_2(x,y) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(c) $f_3(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{y^2} & \text{si } y \neq 0, \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases}$ (d) $f_4(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{si } xy \neq 0, \\ 0 & \text{si } xy = 0. \end{cases}$

(e) $f_5(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$ (f) $f_6(x,y) = \begin{cases} \frac{y \operatorname{sen}^2 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Número 4. Se considera la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(1) Mostrar que f es continua en $(0,0)$.
(2) Comprobar que para todo $(u,v) \neq (0,0)$ existe la derivada direccional $D_{(u,v)}f(0,0)$ y se cumple

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{f(u,v) - f(0,0) - D_u f(0,0)}{\|(u,v)\|} = 0$$

(3) ¿Es f diferenciable en $(0,0)$?

Número 5. Se considera la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y \sqrt{x^2+y^2}}{y^2+x^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(1) Mostrar que f es continua en $(0,0)$.
(2) Comprobar que f tiene todas las derivadas direccionales en el punto $(0,0)$ y son todas nulas.
(3) Probar que f no es diferenciable en $(0,0)$ (aunque la aplicación $u \mapsto D_u f(x_0)$ está definida y es lineal).

Número 6. Considérese la función f de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Calcular, si existen, las derivadas parciales de f en (0,0). ¿Es f diferenciable en (0,0)?
(b) ¿Son continuas en (0,0) las derivadas parciales de f?

Número 7. Estudiar la diferenciabilidad de las dos funciones siguientes

$$f_1(x,y) = \begin{cases} x^3 \log\left(1 + \frac{|y|}{x^4}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases} \qquad f_2(x,y) = \begin{cases} x^3 \log\left(1 + \frac{y^2}{x^4}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Número 8. Demostrar que la función $f(x) = \frac{e^{x+y}-1}{x+y}$ se puede extender a la recta $x+y=0$ para definir una función de clase $\mathcal{C}^\infty$ en todo $\mathbb{R}^2$.

Número 9. Para cada entero $k \geq 1$ se define $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por

$$f(x,y) = \begin{cases} xy^k \operatorname{sen} 1/y & \text{si } y \neq 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Estudiar según k la diferenciabilidad y la clase de f.

Número 10. Sea f una función diferenciable definida en una bola abierta B de centro $a \in \mathbb{R}^m$ y denotemos $L = df(a)$. Demostrar que la siguiente función $H[0,1] \times B \to \mathbb{R}$ es continua:

$$H(t,x) = \begin{cases} \dfrac{f(a+t(x-a)) - f(a)}{t} & \text{for } t \neq 0, \\ L(x-a) & \text{for } t = 0. \end{cases}$$

Número 11. Sean $f(x,y)$ y $g(x,y)$ funciones diferenciables de dos variables. Calcular todas las derivadas parciales de las siguientes funciones:

$$h_1(x,y) = f(xy, x+y), \quad h_2(x,y) = yg(x,x) + xg(y,y), \quad h_3(x,y) = g(y, f(y,x)),$$
$$h_4(x,y,z) = f(x^2 - yz, y^2 - xz), \quad h_5(x,y,z) = g(x,y)g(y,z)g(z,x),$$
$$h_6(x,y,z) = f(x - g(y,z)^2, x^3 y), \quad h_7(x,y,z) = g(z, f(g(y,z), f(x,z))).$$

Número 12. Se consideran las siguientes funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy), \quad g(x,y) = e^{x-y^2}$$

y la composición $F = g \circ f$.

(a) Calcular $df(1,1)$.

(b) Calcular la derivada de F en (1,1) en la dirección $(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

(c) ¿Con respecto a qué dirección (u,v) con $u^2 + v^2 = 1$ es máximo el valor de la derivada direccional de F en el punto (1,1)? ¿Cuál es ese valor máximo?

Número 13. Considérense las funciones:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \operatorname{sen} \frac{x}{y} & \text{si } y \neq 0, \\ 0 & \text{si } y = 0, \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x,y) = \tfrac{1}{\pi} e^{x+y} + \int_0^x \frac{t^2}{(1+t^4)^{1/2}} dt.$$

(a) Demostrar que $F(x,y) = (f(x,y), g(x,y))$ es diferenciable en $(0,0)$ y en $(0, \frac{1}{\pi})$.

(b) Deducir que $G = F \circ F$ es diferenciable en (0,0) y calcular $dG(0,0)$.

(c) Determinar la dirección (u,v), $u^2 + v^2 = 1$, en la que es máximo el valor de $|D_{(u,v)} F(1,1)|$ y calcular ese máximo.

Número 14. Considérense las funciones:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases} \qquad \text{y} \quad g(t) = (t, 2t).$$

(a) Calcular las derivadas parciales de f en $(0,0)$.

(b) Demostrar que $f \circ g$ es derivable en 0.

(c) ¿Se verifica que $(f \circ g)'(0) = \langle \nabla f(0,0), g'(0) \rangle$?

Número 15. Mostrar que la función siguiente es de clase $\mathcal{C}^1$. ¿Es de clase $\mathcal{C}^2$?

$$f(x,y) = \begin{cases} \cos(xy) & \text{para } xy \geq 0, \\ 1 + x^2y^2 & \text{para } xy < 0. \end{cases}$$

Número 16. Se consideran en plano $\mathbb{R}^2$ el conjunto S definido por las dos inecuaciones

$$(x-1)^2 + y^2 \leq 1, \quad y \geq 0,$$

y la función $f(x,y) = x^8(1-y^8)$, y se pide:

(1) ¿Es conexo el conjunto S? ¿Lo es su imagen?

(2) Calcular los extremos de f en S y obtener la imagen $f(S)$.

(3) Deducir del teorema del valor medio una acotación en S de tipo lineal $f(x,y) \leq ax$ para cierta constante positiva $a \in \mathbb{R}$.

Número 17. Se considera la aplicación $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y) = \frac{1}{8}(x^2 + y^2, y^6)$, y denotamos $S \subset \mathbb{R}^2$ el cuadrado abierto dado por $0 < x < 1$, $0 < y < 1$. Se pide:

(1) Mostrar que $f(S) \subset S$, de modo que $f : S \to S$ está bien definida.

(2) Acotar en S la norma de los gradientes de las componentes de f.

(3) Aplicar el teorema del valor medio a las componentes de f y usar las acotaciones del apartado (2) para probar que f es contractiva en S.

(4) Probar que $f : S \to S$ no tiene puntos fijos en S. ¿Contradice esto el teorema de la aplicación contractiva?

Número 18. Calcular el polinomio de Taylor de grado menor o igual que 3 de: (a) $f_1(x,y) = \log(x+y)$ en el punto $(1,1)$, y (b) $f_2(x,y,z) = e^{x+y+z}$ en el punto $(0,0,0)$.

Número 19. Utilizar el desarrollo de Taylor para expresar el polinomio $P(x,y) = x^3 + y^2(1+x)$ en potencias de $(x-1)$ e $(y-2)$. Plantear después una identidad de polinomios $P(x,y) = Q(x-1, y-2)$ para determinar los coeficientes de $Q(u,v)$ mediante un sistema de ecuaciones adecuado, y comparar los cálculos efectuados con los del desarrollo de Taylor.

Número 20. Utilizar la diferencial de una función adecuada para aproximar los valores de:

(a) $\sqrt{(4{,}01)^2 + (3{,}98)^2 + (2{,}02)^2}$, (b) $(0{,}99)^3 + (2{,}01)^3 - 6(0{,}99)(2{,}01)$, y (c) $(0{,}9)^4 e^{0{,}03}(1{,}05)6$.

Número 21. La convexidad es esencial en el teorema del valor medio. Para verlo, mostrar que la función

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-1/y} & \text{si } x > 0, y > 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

es de clase es $\mathcal{C}^1$ en el abierto $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) : y \geq 0\}$, y que dados los puntos $a = (-1,1)$ y $b = (1,1)$ de U no existe ningún $c \in U$ tal que $f(b) - f(a) = \langle \nabla f(c), b - a \rangle$. Por supuesto, esto ocurre porque el segmento $[a,b]$ no está contenido en U.

LISTA 6. Extremos de funciones diferenciables

Número 1. Estudiar los puntos críticos y los máximos y mínimos locales y globales de las funciones:

$$f_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + xyz, \quad f_3(x,y) = -(x-a)^2 - (y-b)^2 + \tfrac{1}{4},$$
$$f_5(x,y) = 3x^2 + 4xy + y^3, \quad f_4(x,y) = 3x^2 + 4xy^2 + y^3,$$
$$f_2(x,y) = xye^{x+2y}, \quad f_6(x,y) = x^2 + y^2 + x^2y - 7y^3, \quad f_7(x,y) = (y^3 - 3y)e^{-x^2}.$$

Número 2. Estudiar los extremos de $f(x,y) = x^2 + y^2 + \alpha x^3 y^3$ según los valores del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Número 3. Se considera la función $f(x,y) = \cos(x+y) - e^{xy}$. Mostrar que tiene un único punto crítico. ¿Es un extremo local? ¿y global?

Número 4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función $f(x,y) = xe^{x-y}\cos y$.

(a) Encontrar todos los puntos críticos de f, y comprobar que están en las rectas $x = 0$ y $x = -1$.

(b) Mostrar que los puntos críticos de la recta $x = 0$ son todos sillas.

(c) Probar que los de la recta $x = -1$ son todos extremos locales. ¿Máximos, mínimos, estrictos, globales?

Número 5. Mostrar que la función $f(x,y) = x^2 + y^2(1+x)^3$ tiene un único punto crítico, y que es un minimo local, pero no un mínimo global. ¿Existen funciones de una variable que tengan este comportamiento?

Número 6. Comprobar que la función $h(x,y) = (x^2-1)^2 + (x^2y - x - 1)^2$ tiene exactamente dos puntos críticos, que son ambos mínimos globales. ¿Se puede dar la misma circunstancia con funciones de una variable?

Número 7. (1) Encontrar los cuatro puntos críticos de la función

$$f(x,y) = x^5 - 5x^3 + 10x + xy^2$$

y comprobar que son: (i) dos sillas y (ii) un máximo local p y un mínimo local q tales que $f(p) < f(q)$.

(2) Mostrar que la función

$$f(x,y) = x^5 - 5x^3 + 10x + x\Big(2x^2 - 4 + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\Big)^2$$

tiene exactamente dos puntos críticos: un máximo local p y un mínimo local q que cumplen $f(p) < f(q)$.

(3) Explicar el resultado de (2) analizando el cambio de variables $(x,y) \mapsto \big(x, 2x^2 - 4 + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\big)$.

¿Puede haber ejemplos así en una variable?

Número 8. Se considera la función

$$f(x,y,z) = \tfrac{x^5+y^5+z^5}{x^2+y^2+z^2}.$$

Mostrar que se extiende diferenciablemente al origen por $f(0,0,0) = 0$ y que el origen es su único punto crítico. ¿Es un extremo local?

Número 9. Considérese la función $f(x,y)=(y-3x^2)(y-x^2)$. Se pide:

(a) Demostrar que $(0,0)$ es un punto crítico de f.

(b) Demostrar que f tiene un mínimo local en $(0,0)$ sobre cada recta que pase por $(0,0)$.

(c) Demostrar que f no tiene un mínimo local en $(0,0)$.

Número 10. Calcular los extremos globales de la función $f(x,y)=x-x^2-y^2$ en el conjunto $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \text{máx}\{|x|,|y|\}\leq 1\}$.

Número 11. Calcular los extremos globales de la función $f(x,y)=(x-1)(y-2)$ en el conjunto $K\subset\mathbb{R}^2$ definido por las inecuaciones $y-x\leq 1$, $x+y\leq 2$, $x\geq 0$, $y\geq 0$.

Número 12. Dados $a,b\in\mathbb{R}$ se define en $\mathbb{R}^2$ la función $f(x,y)=e^{ax+y^2}+b\,\text{sen}(x^2+by^2)-y^2$.

(a) Calcular los valores de a y b para que el origen sea un punto crítico de f.

(b) Para los valores de a y b calculados en (a) estudiar si f alcanza un extremo en el punto $(0,0)$. En caso afirmativo indicar qué tipo de extremo es.

Número 13. (1) Estudiar, según los valores del parámetro a, los puntos críticos y los extremos locales de la función $f(x,y)=(y-ax)e^{-x}+e^{-y}$. En particular, constatar que para $a=1$ no hay puntos críticos, ni en consecuencia extremos. Por tanto, *a partir de aquí* $a\neq 1$.

(2) Mostrar que la función $f(x,y)$ tiene en cada recta $x=t$ un mínimo global que vale $(1-(a-1)t)e^{-t}$.

(3) Comprobar que la función $h(t)=(1-(a-1)t)e^{-t}$ tiene un mínimo global en $t=\frac{a}{a-1}$ y deducir $f(x,y)$ tiene un mínimo global en $(\frac{a}{a-1},\frac{a}{a-1})$.

Número 14. Estudiar si la función $h(x,y,z)=-x^2+y^4(1-z^2)-z$ tiene extremos.

Número 15. Se considera la función $f(x,y)=xy-x^4-y^4$, y se pide:

(1) Mostrar que f tiene tres puntos críticos: $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ y $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$, que son ambos máximos locales, y $(0,0)$, que es una silla.

(2) Mostrar que f es ≤ 0 fuera del cuadrado abierto $|x|<1,|y|<1$, y que el máximo que alcanza f en el compacto $|x|\leq 1,|y|\leq 1$ lo debe alcanzar en su interior, de manera que el máximo local $f(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=f(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})=1/8$ es máximo global.

Número 16. Se considera la función $f(x,y)=(x-y)^2-x^4-y^4$.

(1) Encontrar los puntos críticos de f.

(2) Mostrar que uno de ellos es una silla y los otros dos son máximos locales en los que f vale 2.

(3) Probar que en cada recta $y=\lambda x$ la función f es negativa para $x^2\geq\frac{(1-\lambda)^2}{1+\lambda^4}$.

(4) Deducir de (3) que f es negativa en el exterior del compacto $K: x^2+y^2\leq 9$, de modo que el máximo que f alcanza en K es el máximo de f en todo el plano $\mathbb{R}^2$.

Concluir que 2 es el máximo de f en todo el plano.

Número 17. Se considera la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y)=\frac{16x^4+8x^2y^2+y^4-4x^2+2y^2+1}{(4x^2+y^2+1)^2}.$$

(1) Encontrar los puntos críticos de f.

(2) Calcular la hessiana de f en esos puntos y clasificarla.
(3) Demostrar que $\frac{1}{4} \leq f(x,y) \leq 1$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
(4) Deducir que todos los puntos críticos son extremos globales (luego locales).

Número 18. Estudiar según los parámetros reales $a \geq b > 0$ los extremos (locales y globales) de las dos funciones siguientes:

$$f(x,y) = (ax^2 + by^2)e^{-(x^2+y^2)}, \quad f_2(x,y) = (ax^2 + by^2)e^{-(x^4+y^4)}.$$

Destacar las diferencias que produce la modificación de los exponentes.

Número 19. Estudiar los puntos críticos de la función $f(x,y) = x - e^{-x^2-y^2} + e^{-(x+\lambda)^2-y^2}$ según los valores del parámetro real $\lambda > 0$. (Es útil considerar las posibles simetrías respecto del cambio de variable $x' = -x - \lambda$.)

Número 20. Se considera la función de dos variables

$$f(x,y) = 1 + 6xy^2 - 2x^3 + x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6.$$

(1) Mostrar que tiene cuatro puntos críticos: una silla y tres mínimos (que son globales).
(2) Calcular el módulo del numero complejo $(x + y\sqrt{-1})^3 - 1$ y utilizarlo para encontrar los mínimos anteriores sin más operaciones.

LISTA 7. Inversión local y funciones implícitas

Número 1. Mostrar que tres puntos no desconectan un disco, pero sí un intervalo, y deducir de este hecho que no existe ninguna aplicación inyectiva continua $h : A \to \mathbb{R}$ definida en un abierto A de $\mathbb{R}^2$.

Número 2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación diferenciable $f(x,y) = (x\cos(xy), y\,\mathrm{sen}(xy))$. Describir el conjunto $C \subset \mathbb{R}^2$ de los puntos del plano en que f *no es* difeomorfismo local.

Número 3. Demostrar que $f(x,y,z) = (z\cos(xy), z\,\mathrm{sen}(xy), x + z)$ admite inversa local diferenciable g definida en un entorno de $(1,0,1)$ y calcular $dg(1,0,1)$.

Número 4. Probar que la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \mapsto (x^3, y^2 - z^2, yz)$ es abierta, pero no inyectiva.

Número 5. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación definida por $f(x,y,z) = (e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x - y)$. Demostrar que f es diferenciable en todo $\mathbb{R}^3$ y que posee una inversa local diferenciable en un entorno de cada punto de $\mathbb{R}^3$. ¿De qué clase es esa inversa? ¿Es inversa global?

Número 6. Se considera la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = (x + y, xy)$.
(1) Determinar en qué puntos f es un difeomorfismo local.
(2) Encontrar dos abiertos conexos disjuntos V, W maximales en los que f sea inyectiva.

(3) Describir explícitamente $f(V)$ y $f(W)$ y mostrar que f induce difeomorfismos $V \to f(V)$, $W \to f(W)$.

Explicar cómo se relaciona esto con el cálculo de raíces de la ecuación de segundo grado.

Número 7. Sean $F(x,y), G(x,y)$ dos funciones de clase $\mathcal{C}^1$ definidas en una bola centrada en el punto (a,b). Demostrar que si $\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x} \neq 0$ entonces el límite $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{F(x,y)}{G(x,y)}$ no existe.

Número 8. Considérese la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,u,v) = x^2u + e^x + v$. Se pide:

(a) Demostrar que existe una función g diferenciable en un entorno V de $(1,-1)$ tal que $g(1,-1) = 0$ y además $f(g(u,v),u,v) = 0$ para todo $(u,v) \in V$.

(b) Calcular $dg(1,-1)$.

Número 9. Hallar el polinomio de Taylor de grado 2 de la función $z = f(x,y)$ definida implícitamente por la ecuación $2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z + 8 = 0$ en un entorno de $(2,0,1)$.

Número 10. Demostrar que el sistema:

$$\begin{cases} xu^3 + y^2v^3 = 1, \\ 2xy^3 + uv^2 = 0, \end{cases}$$

define a u y v como funciones implícitas diferenciables de x e y en un entorno del punto $(0,1,0,1)$, y calcular las derivadas parciales de esas funciones implícitas en el punto $(0,1)$. Probar también que el sistema define a x e y como funciones implícitas diferenciables de u y v en un entorno de ese punto, y calcular las derivadas parciales de estas segundas funciones implícitas en el punto $(0,1)$.

Número 11. Considérese el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x + y - z + u^2 &= 0, \\ x - y + 2z + u &= 0, \\ 2x + 2y - 3z + 2u &= 0. \end{cases}$$

Determinar si puede aplicarse el teorema de la función implcita para resolverlo localmente, es decir, para obtener en función de una de las variables las otras tres, en un entorno de una solución dada $\alpha \in \mathbb{R}^4$.

Número 12. Sea $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$F(x,y,z,u,v) = (u + v + x^2 - y^2 + z^2, u^2 + v^2 + u - 2xyz).$$

(1) Demostrar que F define implícitamente a u, v en función de x, y, z en un entorno de $(0,0,0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

(2) Calcular las derivadas parciales de esas funciones en (0,0,0).

Número 13. Comprobar que la ecuación

$$e^x \cos(\pi(y+z)) + \log(xyz) = e$$

tiene una solución $z = h(x,y)$, con $h(1,1) = 1$, de clase $\mathcal{C}^\infty$ en un entorno del punto $(x,y) = (1,1)$. Calcular $\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(1,1)$.

Número 14. (1) Comprobar que el sistema

$$\begin{cases} 2uv + x^2 - y^2 = 0, \\ u^2 - v^2 + 2xy, \end{cases}$$

define en un entorno de $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (\sqrt{2}, 0, 1, -1)$ a las variables (u, v) como funciones implícitas de (x, y).

(2) Mostrar que la aplicación $u, v) = f(x, y)$ así obtenida es un difeomorfismo local en $(\sqrt{2}, 0)$.

(3) Calcular $d(f^{-1})(1, -1)$.

Número 15. Se consideran en $\mathbb{R}^5$ las coordenadas (u, v, w, x, y) y el sistema:

$$\begin{cases} u^2 + v^2 - w\cos(xy) &= 0, \\ 2u^2 + v^2 + w^2 - \operatorname{sen}(xy) &= 2, \\ u + vw - \operatorname{sen} x \cos y &= 0. \end{cases}$$

(1) Mostrar que este sistema se puede resolver (localmente) en el punto $(0, 1, 1, \pi/2, 0)$ para obtener funciones $u = u(x, y), v = v(x, y), w = w(x, y)$ de clase $\mathcal{C}^2$.

(2) Calcular las hessianas de esas funciones en el punto $(\pi/2, 0)$ y clasificarlas para deducir que en él u tiene un mínimo local y v, w tienen sillas.

Número 16. Se consideran en $\mathbb{R}^6$ las coordenadas (x, y, z, u, v, w) y el sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z^2 + u + v^2 &= 0, \\ 4x + 3y + z + u^2 + v + w &= -2, \\ x + z + u^2 + w &= -2, \end{cases}$$

(1) Probar que este sistema se puede resolver (localmente) en el punto $(0, 0, 0, 0, 0, -2)$ para obtener funciones $u = u(x, y, z), v = v(x, y, z), w = w(x, y, z)$ de clase $\mathcal{C}^1$.

(2) Calcular el determinante jacobiano en el origen de la aplicación $(x, y, z) \mapsto (u, v, w)$ de clase $\mathcal{C}^1$ definida por las funciones anteriores.

(3) Utilizar el teorema de inversión local para probar que el sistema anterior se puede resolver también (en $(0, 0, 0, 0, 0, -2)$) despejando las variables (x, y, z) en función de las variables (u, v, w).

Número 17. Analizar el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y + xy^3}{x^4 + y}$ como se indica a continuación.

(1) Para cada escalar no nulo λ la ecuación

$$x^3y + xy^3 - \lambda(x^4 + y) = 0,$$

define y como función $h_\lambda(x)$ de x en un entorno del origen.

(2) Se tiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 h_\lambda(x) + x h_\lambda(x)^3}{x^4 + h_\lambda(x)} = \lambda$$

(3) Como este límite depende de λ, el límite inicial no existe.

Número 18. Calcular las constantes a, b sabiendo que:

(1) El sistema

$$\begin{cases} x + a \operatorname{sen} y - z^3 = 0, \\ x - a^2y^2 + e^{bz} = 1, \end{cases}$$

define implícitamente en un entorno del origen dos funciones $y = f(x), z = g(x)$ de clase $\mathcal{C}^\infty$.

(2) El polinomio de Taylor de grado 2 de g en $x = 0$ es nulo para $x = b^2$.

(3) La función $h = f - g$ tiene un máximo relativo en $x = 0$.

Número 19. Comprobar que la ecuación $z^3 + 2z + e^{z-x-y^2} + x + y^2 - \cos(x - y + z) = 0$ define, en un entorno del origen, a z como función de x e y, y que esa función $z = f(x, y)$ presenta un máximo local en $(0, 0)$.

Número 20. Se considera el conjunto $C \subset \mathbb{R}^3$ definido por las ecuaciones $x^2+y^2+z^2 = 1,\ 2x = x^2+2y^2$. Mostrar que es una curva regular y calcular los puntos en que su recta tangente es horizontal.

Número 21. Se considera un entero $n \geq 2$ y la ecuación $x^{2n} + y^{2n} = 1$. Mostrar que:

(1) Esa ecuación define una curva regular C, y calcular la recta tangente a C en un punto arbitrario suyo.

(2) La curva C es un conjunto compacto contenido en la región limitada por la circunferencia unidad $\mathbb{S}^1 : x^2 + y^2 = 1$ y el cuadrado Δ de vértices $(\pm 1, \pm 1)$.

(3) La aplicación $\rho(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x, y)$ es un homeomorfismo de C sobre $\mathbb{S}^1$.

Número 22. Sean $a > b$ dos números reales positivos.

(1) Demostrar que para cada $n \geq 1$ el conjunto $E_n \subset \mathbb{R}^2 : x^{2n}/a^{2n} + y^{2n}/b^{2n} = 1$ es una curva regular.

(2) Probar que todos las E_n son homeomorfas a la elipse E_1 y están contenidas en la región limitada por la elipse E_1 y el rectángulo Δ de vértices $(\pm a, \pm b)$.

Número 23. Se considera para cada entero $n \geq 2$ el conjunto $\Sigma_n : x^{2n} + y^{2n} + z^{2n} = 1$. Mostrar que Σ_n es una superficie regular homeomorfa a la esfera unidad $\mathbb{S}^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$, y que Σ_n yace entre la esfera $\mathbb{S}^2$ y el paralelepípedo Π de vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$.

Número 24. Contemplamos $\mathbb{R}^{n\times n}$ como el espacio de las matrices cuadradas de orden n. Sea $A : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ una aplicación de clase $\mathcal{C}^1$ definida en un intervalo de centro $t = 0$ y consideremos para cada t el polinomio característico de la matriz $A(t)$:

$$P(t, \lambda) = \det(A(t) - \lambda I).$$

Sea λ_0 un autovalor simple (de multiplicidad 1) de la matriz $A(0)$. Aplicar el teorema de las funciones implícitas a la ecuación $P(t, \lambda) = 0$ en un entorno del punto $(0, \lambda_0)$ para obtener una función $\lambda : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$ tal que (i) $\lambda(0) = \lambda_0$ y (ii) $\lambda(t)$ es un autovalor simple de la matriz $A(t)$ para $|t| < \delta$.

Número 25. Deducir el teorema de inversión local como consecuencia del teorema de las funciones implícitas según se indica a continuación. Sea $f : A \to \mathbb{R}^n$ una aplicación de clase $\mathcal{C}^1$ en un abierto A de $\mathbb{R}^n$ cuyo determinante jacobiano es no nulo en un punto $a \in A$.

(1) Resolver mediante el teorema de las funciones implícitas la ecuación $f(x) - y = 0$ para encontrar una aplicación $g : W \to \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^1$ definida en un entorno abierto W de $f(a)$ tal que (i) $g(f(a)) = a$, (ii) $g(W) \subset A$ y (iii) $f(g(y)) = y$ para $y \in W$. En particular $f(f^{-1}(W)) = W$.

(2) Mostrar que el determinante jacobiano de g en $f(a)$ es no nulo, y deducir de (1) que $a = g(f(a))$ tiene un entorno abierto $U \subset f^{-1}(W)$ tal que $g(g^{-1}(U)) = U$. Por tanto $g(f(x)) = x$ para $x \in U$.

Concluir que $f : U \to V = g^{-1}(U)$ es un difeomorfismo de clase $\mathcal{C}^1$ con inverso $g|V$.

Número 26. La teoría de matrices enseña que el cuadrado R^2 de una matriz simétrica definida positiva R es también simétrica definida positiva y, recíprocamente, toda matriz simétrica definida positiva A tiene una única raíz cuadrada definida positiva R. Procédase según los apartados siguientes para demostrar que *la extracción de la raíz cuadrada es una aplicación* $\rho(A) = R$ *de clase* $\mathcal{C}^\infty$.

(1) Una matriz $n \times n$ simétrica $A = (x_{ij})$ se representa completamente por sus coeficientes $x_{ij},\ i \leq j$, luego es un punto del espacio $\mathbb{R}^p$ con $p = \frac{1}{2}n(n+1)$.

(2) Por el criterio de positividad de Sylvester ($\det(D_j) > 0$ para los n menores principales D_j de A) las matrices simétricas definidas positivas forman un abierto Ω de $\mathbb{R}^p$.

(3) Por lo que hemos resumido al principio, la aplicación $\rho : \Omega \to \Omega$ es una biyección, la inversa de $\sigma(R) = R^2$. Esta última aplicación es de clase $\mathcal{C}^\infty$.

(4) Las derivadas direccionales de σ se calculan por la fórmula $d\sigma(R)(M) = RM + MR$, donde $M \in \mathbb{R}^p$ es una matriz simétrica.

(5) Diagonalizando R mediante una matriz ortogonal se demuestra que si $RM + MR = 0$ entonces $M = 0$.

(6) Resulta de lo anterior que la diferencial $d\sigma(R) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ es un isomorfismo lineal, luego σ es un difeomorfismo local en R.

Como σ es biyectiva con inversa global ρ, se concluye que ρ es de clase $\mathcal{C}^\infty$.

LISTA 8. Extremos condicionados

Número 1. Se considera la función $f(x, y) = (x + y)^2 - x^4y^4$.

(1) Encontrar sus tres puntos críticos en $\mathbb{R}^2$ y mostrar que los tres son sillas. Resulta así que f no tiene extremos de ningún tipo en $\mathbb{R}^2$.

(2) Calcular los puntos críticos de f condicionados a $C : x^2 + y^2 = 16$.

(3) Obtener los extremos de f en la circunferencia C.

Número 2. Calcular la distancia de un punto $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ al plano $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$.

Número 3. Calcular la distancia mínima de la parábola $y = x^2$ a la recta $y = x - 5$.

Número 4. Calcular los extremos de $h(x, y) = 3x + 2y$ condicionados a $2x^2 + 8y^2 = 3$.

Número 5. Determinar los extremos de $h(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$ condicionados a $x + y + z = 1$-

Número 6. Calcular los extremos de la función $h(x, y) = 3x - 5y$ en la circunferencia $(x+1)^2 + (y-1)^2 = r^2$ según el radio $r > 0$.

Número 7. Calcular los extremos de la función $h(x, y) = 27x^3 + xy^2$ condicionados a $xy - a^2 = 0$, con $a > 0$.

Número 8. Mostrar que $x^2 + y^4 = 2$ es una curva regular compacta y calcular los extremos en ella de las funciones $h_1(x, y) = x - 2y$ y $h_2(x, y) = xy + 1$.

Número 9. Calcular los puntos críticos de la función $h(x,y,z) = x^3 - y^3 + z^3$ condicionados a $x^2 + y^2 = 1$. ¿Es alguno un extremo local condicionado?

Número 10. Determinar los parámetros $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ para que la función $h(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2\alpha xy + 2\beta z$ tenga en el punto $(1,1,1)$ un máximo local en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

Número 11. Comprobar que $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 9$ es una superficie regular compacta y calcular los extremos en ella de la función $h(x,y,z) = -x + 2y - z + 3$.

Número 12. Hallar los puntos de la curva de $\mathbb{R}^3$ de ecuaciones $x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 1$ que están más cerca del orgen.

Número 13. Calcular los extremos de la función $h(x,y) = xy^3 + x^3y$ en el conjunto $K \subset \mathbb{R}^2$ dado por las inecuaciones

$$4x^2 + y^2 \leq 8, \quad x \leq y.$$

Número 14. Calcular los extremos de la función $h(x,y,z) = x^2 + y^3 + z^4$ en el conjunto $K \subset \mathbb{R}^3$ dado por las inecuaciones

$$x^2 + y^2 \leq 1, \quad -1 \leq z \leq 1.$$

Número 15. Calcular los extremos de la función $f(x,y,z) = (x+y)z^2 - xy$ en el conjunto $K \subset \mathbb{R}^3$ definido por las inecuaciones

$$x^2 + y^2 \leq z^2, \quad 0 \leq z \leq 1.$$

Número 16. El 18 de diciembre de 2015 un wookiee que acudía a Madrid al renacer de la fuerza se materializó por error en la facultad de Matemáticas de la UCM, y debido a la calentura mental que inmediatamente detectó escapó en la dirección de mayor enfriamiento. Su tecnología le situaba en el punto $(0,-1,1)$ de nuestro edificio, que se describía con la improbable ecuación $z^2 + xz + y^2 = 2$, y en ella la temperatura se calculaba mediante la no menos inverosimil función $T(x,y,z) = 5 + xy - z^2$. ¿En qué dirección huyó?

Número 17. Se considera en $\mathbb{R}^3$ el conjunto C definido por las ecuaciones $x^2+y^2+z^2 = 4,\ x^2+y^2 = 2x$.

(1) Mostrar que existe un punto $p \in C$ tal que $C \setminus \{p\}$ es una curva regular.
(2) Calcular los extremos de $h(x,y,z) = x^2 + y^2 + z$ en C.

Número 18. Sea $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal

$$L(x,y,z) = (y+z, x+z, x+y),$$

y sea $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la función diferenciable $h(x,y,z) = \|L(x,y,z)\|^2$ (norma euclídea).

(1) Estudiar los puntos críticos de h condicionados a $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
(2) Determinar cuáles de ellos son extremos condicionados, y cuáles globales.
(3) Utilizar lo anterior para calcular la norma de L como aplicación lineal, es decir calcular

$$\|L\| = \sup_{\|u\|=1} \|L(u)\|.$$

Comprobar que el resultado concuerda con la afirmación del problema 16 de la lista 1.

Número 19. Se considera el conjunto $C \subset \mathbb{R}^3$ definido por las ecuaciones $x^2 + y^2 = 2,\ -x + yz = 1$.

(1) Comprobar que C es una curva regular y calcular un vector $w \in \mathbb{R}^3$ tangente a C en el punto $p = (1, 1, 2)$.

(2) Calcular la derivada direccional $D_w f(p)$ de la función $f(x, y, z) = xy - ayz + z$.

(3) Determinar a sabiendo que p es un punto crítico de f condicionado a C.

(4) Estudiar la naturaleza de ese punto crítico.

Número 20. Se consideran las curvas regulares $C_n : x^{2n} + y^{2n} = 1$ del número 10 de la lista anterior, y la función

$$h(x, y) = \operatorname{dist}((x, y), (0, 0))^2 = x^2 + y^2.$$

(1) Calcular los puntos críticos de la función $h(x, y) = x^2 + y^2$ condicionados a $x^{2n} + y^{2n} = 1$. Resultarán los cuatro puntos $(0, \pm 1)$, $(\pm 1, 0)$ y otros cuatro más p_k en las bisectrices de los cuadrantes.

(2) Mostrar que los cuatro primeros son mínimos locales de h en C y que los p_k son máximos locales. ¿Son globales estos extremos locales?

(3) Hacer un dibujo que explique la afirmación siguiente: *cuando $n \to \infty$ las curvas C tienden al cuadrado Δ.*

Número 21. Sean $E_n : x^{2n}/a^{2n} + y^{2n}/b^{2n} = 1$, $(a > b > 0)$, las curvas regulares del número 22 de la lista anterior y como en el problema anterior consideramos la función $h(x, y) = x^2 + y^2$.

(1) Calcular los puntos críticos de la función $h(x, y) = x^2 + y^2$ condicionados a $x^{2n}/a^{2n} + y^{2n}/b^{2n} = 1$. Resultarán los puntos $(0, \pm b)$, $(\pm a, 0)$, y otros cuatro más q_k uno en cada cuadrante del plano.

(2) Mostrar que: (i) $(\pm a, 0)$ son mínimos locales de h en C, (ii) $(0, \pm b)$ mínimos globales, y (iii) los cuatro q_k máximos globales.

(3) Mostrar que los puntos q_k de todas las E_n de un mismo cuadrante yacen en una curva regular $y = \sigma(x)$ que pasa por el vértice de cuadrante correspondiente, es decir $\sigma(\pm a) = \pm b$.

(4) Denotamos $\alpha = b/a$. Comprobar que la pendiente de esas curvas es $\sigma'(0) = \pm \frac{\log(1+\alpha^{-2})}{\log(1+\alpha^2)}$.

Hacer un dibujo que ilustre cómo las curvas E_n están anidadas unas en otras y entre las dos circunferencias de radios a y b, y cómo se mueven los q_k. Estudiar las variaciones cuando $\alpha \to 1$ o 0.

Número 22. Sean $\Sigma_n : x^{2n} + y^{2n} + z^{2n} = 1$ las superficies del número 12 de la lista anterior. Se define la función $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ y se quieren estudiar los extremos de h condicionados a $x^{2n} + y^{2n} + z^{2n} = 1$.

(1) Comprobar que los puntos críticos condicionados de h son: (i) los seis puntos $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$, $(0, 0, \pm 1)$, (ii) los doce puntos $(\pm a, \pm a, 0), (\pm a, 0, \pm a), (0, \pm a, \pm a)$, con $a = 1/\sqrt[2n]{2}$, y (iii) los ocho puntos $(\pm b, \pm b, \pm b)$, donde $b = 1/\sqrt[2n]{3}$.

(2) Observar que los seis puntos de (i) son mínimos globales, pues distan 1 del origen.

(3) Ver que los doce puntos de (ii) son sillas, pues apelando a las curvas

$$\Sigma \cap \{z = 0\},\ \Sigma \cap \{y = 0\},\ \Sigma \cap \{x = 0\}, (\text{resp. } \Sigma \cap \{x = \pm y\},\ \Sigma \cap \{x = \pm z\},\ \Sigma \cap \{y = \pm z\}),$$

se ve que ninguno es máximo (resp. mínimo) local.

(4) Razonar por compacidad que los ocho puntos de (iii) son máximos globales.

Utilizar todo lo anterior para hacerse una idea de la forma de las superficies Σ_n según varía el entero n. ¿Qué límites tienen los veintiseis puntos críticos anteriores cuando $n \to \infty$?

Número 23. Confirmar los resultados del ejercicio anterior utilizando la hessiana H de h como función de dos variables (despejando una en función de las otras dos según el teorema de las funciones implícitas). Por derivación implícita se puede calcular H en cada uno de los puntos, y resulta que es definida positiva en los seis de (i), indefinida en los doce de (ii), y definida negativa en los ocho de (iii).

Número 24. Se considera la función $g(x) = 1 - 3x^2$ para estudiar sus extremos en el elipsoide $4x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

(1) Calcular los puntos críticos de g condicionados a $4x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

(2) Calcular los extremos globales de g en el elipsoide y deducir que todos los puntos críticos condicionados son extremos.

(3) Proyectar estereográficamente desde el punto $(0, 0, 1)$ el elipsoide sobre el plano $z = 0$ para convertir este problema en el 16 de la lista 6, y comprobar que las soluciones concuerdan.

Número 25. Calcular el máximo de la función $h(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 \cdots x_n^2$ en la esfera $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ y deducir del resultado que $(c_1 \cdots c_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}(c_1 + \cdots + c_n)$ para cualesquiera números reales positivos c_i.

Número 26. Dada una matriz simétrica real A de orden n se define la función diferenciable $g(x) = \langle Ax, x \rangle$ (producto escalar euclídeo). Mostrar que:

(1) Se tiene $df(x)(u) = D_u g(x) = \langle Au, x \rangle + \langle Ax, u \rangle = \langle 2Ax, u \rangle$, es decir: $\nabla g(x) = 2Ax$.

(2) La función g tiene puntos críticos condicionados en la esfera unidad $\mathbb{S}^{n-1} : f(x) = x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$. Es decir, existe $\zeta \in \mathbb{S}^{n-1}$ tal que $\nabla g(\zeta) = \lambda \nabla f(\zeta)$ (λ es un multiplicador de Lagrange).

(3) Tal $\zeta \neq 0$ es un autovector de A y el multiplicador $\lambda \in \mathbb{R}$ su autovalor.

Así vemos que *toda matriz simétrica real tiene autovalores reales,* que es el contenido esencial del denominado *Teorema espectral.*

(4) Para cualquier autovector ξ: $A\xi = \mu\xi$, se tiene $g(\xi) = \mu$, luego el máximo (resp. mínimo) de g en la esfera unidad es el mayor (resp. menor) autovalor de A. ¿Qué tiene esto que ver con el problema 17 de la Lista 1?