

## Variedades diferenciables

**Número 1.** Probar que un difeomorfismo local  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es de hecho un difeomorfismo sobre un intervalo abierto. ¿Se puede generalizar este hecho a dimensión superior?

**Número 2.** Construir un difeomorfismo de  $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$  sobre el exterior de la bola unidad  $\|x\| > 1$  y otro sobre la corona  $1 < \|x\| < 2$ .

**Número 3.** Sea  $E \subset \mathbb{R}^2$  la unión de todas las rectas  $y = kx$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . ¿Es  $\mathbb{R}^2 \setminus E$  una variedad?

**Número 4.** Demostrar que la *cúspide*  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^3 = 0\}$  no es una variedad diferenciable.

**Número 5.** Demostrar que el cono  $x^2 + y^2 = z^2$  de  $\mathbb{R}^3$  no es una variedad diferenciable.

**Número 6.** Construir para cada entero  $r > 0$  un difeomorfismo local suprayectivo  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  tal que cada  $b \in \mathbb{S}^1$  tenga exactamente  $r$  preimágenes. (Considerar  $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$  y utilizar  $(x, y) \equiv z \mapsto z^r$ .)

**Número 7.** Identificamos  $\mathbb{R}^2$  con el cuerpo  $\mathbb{C}$  de los números complejos usando partes reales e imaginarias, y sea  $P$  un polinomio mónico en una indeterminada con coeficientes complejos. Mostrar que  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto P(z)$  es una aplicación diferenciable, y que es un difeomorfismo local en todos los puntos salvo una cantidad finita. ¿Cuáles son esos puntos excepcionales?

**Número 8.** Sea  $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$  el conjunto definido por  $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = x_{n+1}^2 - 1$ ,  $x_{n+1} > 0$ . Probar que la *pseudoinversión*

$$f(x) = \left( \frac{x_1}{x_{n+1} + 1}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1} + 1} \right)$$

induce un difeomorfismo de  $M$  sobre un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ , e identificar tal subconjunto.

**Número 9.** Identificamos  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  con el conjunto de las aplicaciones lineales  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , y denotamos  $M$  el conjunto de las que dejan invariante la parábola  $y = x^2$ . Probar que  $M$  es una curva difeomorfa a la propia parábola. ¿Qué obtenemos si sustituimos la parábola por la hipérbola  $xy = 1$ ?

**Número 10.** Demostrar que el *semicono*  $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0\}$  no es una variedad diferenciable.

**Número 11.** Sea  $M \subset \mathbb{R}^3$  la superficie de revolución generada por una curva  $x = f(z) > 0, y = 0$ , al girar alrededor del eje de las  $z$ . Mostrar que  $M$  tiene la ecuación global  $x^2 + y^2 = f(z)^2$ , y que la aplicación  $x = f(\rho) \cos \theta, y = f(\rho) \sin \theta, z = \rho$  parametriza  $M$ . ¿Cómo debe interpretarse esta afirmación en este caso?

**Número 12.** Sea  $T$  el toro de revolución generado al girar alrededor del eje de las  $z$ 's la circunferencia  $y = 0, (x - 2)^2 + z^2 = 1$ .

- (1) Construir un difeomorfismo local suprayectivo y periódico  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow T \subset \mathbb{R}^3$ .
- (2) Utilizar  $\varphi$  para definir un difeomorfismo de  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^4$  sobre  $T$ .
- (3) Utilizar  $\varphi$  para recubrir  $T$  con abiertos difeomorfos a cilindros  $\mathbb{S}^1 \times (a, b)$ .
- (4) Concluir que  $T$  se puede cubrir con dos parametrizaciones.

**Número 13.** Se considera la aplicación  $f : \mathbb{R} \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \rightarrow \mathbb{R}^3$  de ecuaciones

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{x}{2} \\ 0 \\ \sin \frac{x}{2} \end{pmatrix}.$$

Mostrar que la imagen de  $f$  es una variedad diferenciable, que se denomina *banda de Möbius*.

**Número 14.** Demostrar que si  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  se anula en un punto  $a \in \mathbb{R}^p$  y tiene derivada suprayectiva en ese punto, entonces  $f$  cambia de signo en todo entorno de  $a$  en  $\mathbb{R}^p$ . Deducir que si una hipersuperficie de un espacio afín tiene una ecuación global, entonces lo desconecta.

**Número 15.** Demostrar que el conjunto  $M \subset \mathbb{R}^4$  de las matrices que representan isometrías lineales es una intersección completa de codimensión 3, y que tiene dos componentes conexas, difeomorfas ambas a la circunferencia.

**Número 16.** Construir una función diferenciable  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(t) = t$  para  $t \leq 1$ ,  $f(t) \geq t$  para  $1 \leq t \leq 2$ , y  $f(t) = 2$  para  $t \geq 2$ .

**Número 17.** Sea  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable definida en un abierto  $V \subset \mathbb{R}^p$ , y sean  $a < b$  tales que  $d_x f$  es suprayectiva si  $f(x) = a$  o  $f(x) = b$ . Probar que las inecuaciones  $a \leq f \leq b$  definen una variedad diferenciable con borde la unión de las dos hipersuperficies  $f = a$  y  $f = b$ .

**Número 18.** Demostrar que el tronco de cono  $M : x^2 + y^2 = z^2, 0 < a \leq z \leq b$ , y el tronco de cilindro  $N : x^2 + y^2 = b^2, a \leq z \leq b$ , son dos variedades con borde, ambas difeomorfas a una corona plana cerrada.

**Número 19.** Se llama *toro sólido* al conjunto  $M \subset \mathbb{R}^3$  generado al girar alrededor del eje de las  $z$ 's el disco cerrado  $\mathbb{D} : y = 0, (x - 2)^2 + z^2 \leq 1$ . Construir un difeomorfismo de  $\mathbb{D} \times \mathbb{S}^1$  sobre  $M$ , y deducir que  $M$  es una variedad con borde difeomorfo a un toro de revolución.

**Número 20.** Se considera la aplicación  $f : \mathbb{R} \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \rightarrow \mathbb{R}^3$  del número 13, cuya imagen  $M$  es una banda de Möbius. Demostrar que la adherencia de  $M$  en  $\mathbb{R}^3$  es una variedad con borde, cuyo interior como tal es  $M$ , y cuyo borde es difeomorfo a una circunferencia.

## Cálculo en variedades

**Número 1.** Sea  $M \subset \mathbb{R}^3$  la superficie de ecuación  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 2$ . Calcular el plano tangente  $H$  a  $M$  en el punto  $a = (1, 1, 0) \in M$  y construir una base de  $H$  mediante una parametrización  $\varphi$  de  $M$  en  $a$ .

**Número 2.** Sea  $M \subset \mathbb{R}^{3 \times 3}$  la variedad de las matrices cuadradas de orden 3 y rango 1, y  $A \in M$  la matriz cuyos coeficientes son todos 1. Calcular el espacio tangente a  $M$  en  $A$ .

**Número 3.** Demostrar que el conjunto  $M \subset \mathbb{R}^4$  de las matrices  $A \neq 0$  cuadradas de orden 2 con determinante y traza nulos es una superficie diferenciable y calcular su plano tangente en el punto  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Número 4.** Se llama *paraguas de Whitney* al conjunto  $X \subset \mathbb{R}^3$  dado por  $x^2 - zy^2 = 0$ . Demostrar que  $M = X \setminus \{y = 0\}$  es una variedad diferenciable, pero que  $X$  no lo es en ningún punto  $(0, 0, c), c > 0$ . (Estudiar el límite de los espacios tangentes a  $M$  en los puntos  $(a, \pm a/\sqrt{c}, c)$ , cuando  $a \rightarrow 0$ .)

**Número 5.** Sea  $M \subset \mathbb{R}^p$  una variedad diferenciable de dimensión  $m$  y supongamos que los vectores  $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}^p$  forman una base del espacio tangente a  $M$  en un punto dado  $a \in M$ . Demostrar que existe una parametrización  $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow U \subset M$  tal que  $\varphi(0) = a$ , respecto de la cual sea  $u_i = \partial/\partial x_i|_a, 1 \leq i \leq m$ .

**Número 6.** Una *variedad topográfica* (o grafo) es una hipersuperficie diferenciable  $M \subset \mathbb{R}^{m+1} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$  tal que la proyección  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m : x \mapsto x'$  induce un difeomorfismo de  $M$  sobre un abierto de  $\mathbb{R}^m$ . Demostrar que esto equivale a que  $M$  sea el grafo  $x_{m+1} = f(x')$  de una función diferenciable definida en un abierto de  $\mathbb{R}^m$ . Probar que entonces el espacio tangente a  $M$  en un punto  $a$  es el grafo de la derivada  $d_a f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , y tiene por ecuación  $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a')x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a')x_m - x_{m+1} = 0$ .

**Número 7.** Sea  $M \subset \mathbb{R}^p$  una variedad de dimensión  $m$ . Demostrar que el conjunto

$$VM = \{(x, u_1, \dots, u_m) \in M \times \mathbb{R}^p \times \dots^m \times \mathbb{R}^p : u_1, \dots, u_m \text{ es una base de } T_x M\}$$

es una variedad diferenciable de dimensión  $m(m+1)$ .

**Número 8.** Se consideran las superficies  $M, N \subset \mathbb{R}^3$  de ecuaciones  $z = xy$  y  $4z = y^2 - x^2$  respectivamente, y la aplicación diferenciable  $f : M \rightarrow N$  dada por  $f(x, y, z) = (x - y, x + y, z)$ . Calcular la derivada de  $f$  en el punto  $(1, 1, 1)$ .

**Número 9.** Sea  $\rho : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^n$  la *retracción radial* dada por  $x \mapsto x/\|x\|$ . Para cada punto  $a \in \mathbb{R}^{n+1}, a \neq 0$ , sea  $\mathbb{S}_a$  la esfera de centro el origen que pasa por  $a$ , y  $H_a = T_a \mathbb{S}_a$ . Mostrar, sin hacer cálculos explícitos, que  $d_a \rho(a) = 0$  y que  $d_a \rho|_{H_a}$  es la homotecia de razón  $1/\|a\|$ . Obtener con esto la derivada  $d_a \rho(u)$ .

**Número 10.** Sea  $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  la aplicación diferenciable

$$F(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)/\sqrt{x^4 + y^4 + z^4},$$

y consideremos su restricción  $f : \{x^2 + y^2 = 1\} \rightarrow \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ . Mostrar sin cálculos que la derivada de  $F$  nunca es isomorfismo, y con ellos, que la de  $f$  lo es en  $(x, y, z)$  si y sólo si  $xyz \neq 0$ .

**Número 11.** Sean  $M$  una variedad diferenciable y  $a \in M$ . Demostrar que cualquier forma lineal  $L : T_a M \rightarrow \mathbb{R}$  es la derivada en  $a$  de una función diferenciable  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Número 12.** Sean  $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$  la hipersuperficie  $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = x_{n+1}^2 - 1$ ,  $x_{n+1} > 0$ , y  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  la pseudoinversión de ecuaciones

$$f(x) = \left( \frac{x_1}{x_{n+1} + 1}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1} + 1} \right).$$

Calcular la derivada de  $f$  en un punto arbitrario  $a \in M$ , y comprobar que es un isomorfismo lineal.

**Número 13.** Sea  $M \subset \mathbb{R}^p$  una variedad diferenciable sin borde y sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable. Demostrar que si  $f$  tiene un extremo local en el punto  $a \in M$ , entonces  $d_a f = 0$ , o equivalentemente, que si  $d_a f \neq 0$ , entonces  $f - f(a)$  cambia de signo en cualquier entorno de  $a$ . Deducir que si una hipersuperficie de  $M$  tiene ecuación global, entonces desconecta  $M$ . Utilizar esto para exhibir en un toro de revolución circunferencias que no tengan ecuación global.

**Número 14.** Sean  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable y  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  un sistema de coordenadas en un punto  $a$  de  $M$  con  $\mathbf{x}(a) = 0$ . Consideramos la forma bilineal simétrica  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  definida por la matriz  $\left( \frac{\partial^2 (f \circ \mathbf{x}^{-1})}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}(a)) \right)_{i,j}$ . Demostrar que si  $d_a f = 0$ , esta forma bilineal simétrica induce otra forma bilineal simétrica  $H_a(f) : T_a M \times T_a M \rightarrow \mathbb{R}$  que no depende del sistema de coordenadas  $\mathbf{x}$  (denominada *la hessiana*). Mostrar con un ejemplo que eso no es así si  $d_a f \neq 0$ .

**Número 15.** Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la aplicación

$$f(s, t) = \left( st + \frac{1}{2}t^2, \frac{1}{2}st^2 + \frac{1}{3}t^3, s \right).$$

¿Es  $f(\mathbb{R}^2)$  una variedad diferenciable?

**Número 16.** Sea  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  la esfera unidad, y  $a = (0, 0, 1) \in \mathbb{S}^2$  su polo norte. Para cada  $i = 1, 2, 3$ , sea  $\pi_i : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la restricción de la proyección lineal  $(x_1, x_2, x_3) \mapsto x_i$ . Demostrar que para cada derivación  $D$  de  $\mathbb{S}^2$  en  $a$  se cumple  $D(\pi_3) = 0$ . ¿Qué derivaciones  $D$  cumplen  $D(\pi_2) = 0$ ?, ¿y  $D(\pi_1) = 0$ ?

**Número 17.** Sean  $M$  una variedad de dimensión  $m$  y  $D_1, \dots, D_m$  derivaciones en un punto  $a \in M$ . Demostrar que  $D_1, \dots, D_m$  son independientes si y sólo si existe un sistema de coordenadas  $\mathbf{x}$  tal que  $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_a$ .

**Número 18.** Sean  $M$  una variedad de dimensión  $m$  y  $a \in M$ . Sean  $f_1, \dots, f_m : U \rightarrow \mathbb{R}$  funciones diferenciables en un entorno  $U$  de  $a$ , y consideremos la aplicación  $f = (f_1, \dots, f_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Demostrar que  $f$  es un difeomorfismo local en  $a$  si y sólo si existen derivaciones  $D_1, \dots, D_m$  en  $a$  tales que  $D_i f_j = 1$  para  $i = j$  y  $D_i f_j = 0$  para  $i \neq j$ , si y sólo si existen derivaciones  $D_1, \dots, D_m$  en  $a$  tales que  $\det(D_i f_j) \neq 0$ .

**Número 19.** Demostrar, utilizando el desarrollo de Taylor con parámetros, que si una función diferenciable  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  definida en un entorno abierto del origen  $U \subset \mathbb{R}^m$  se anula en el hiperplano  $x_1 = 0$ , entonces es divisible por  $x_1$ . Deducir las ecuaciones de una hipersuperficie están unívocamente determinadas salvo producto por funciones diferenciables nunca nulas.

**Número 20.** Sea  $M$  una variedad diferenciable con borde. Construir una ecuación global de  $\partial M$ , esto es, una función diferenciable  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que: (i)  $f \geq 0$ , (ii)  $\partial M = f^{-1}(0)$ , y (iii)  $d_x f$  es suprayectiva para cada  $x \in \partial M$ .

## Campos y EDOs

**Número 1.** Sea  $X$  un campo en la esfera unidad  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ . Sea  $p : (x, y, z) \mapsto (u, v)$  la proyección estereográfica desde el polo norte  $p_N = (0, 0, 1)$ , y sean  $(u, v)$  las coordenadas correspondientes. Calcular  $X : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , sabiendo que  $X = v \frac{\partial}{\partial u} - u \frac{\partial}{\partial v}$  en esas coordenadas.

**Número 2.** Con las notaciones del problema anterior, considérese el campo  $Y$  de  $\mathbb{S}^2$  que en las coordenadas  $(u, v)$  tiene la expresión  $Y = v \frac{\partial}{\partial u} + u \frac{\partial}{\partial v}$ . Demostrar que definiendo  $Y_{p_N} = 0$ ,  $Y$  es un campo continuo, pero no diferenciable.

**Número 3.** Sea  $M \subset \mathbb{R}^3$  la superficie de revolución generada por una curva  $x = f(z) > 0$  del plano  $y = 0$  al girar alrededor del eje de las  $z$ 's. Demostrar que los paralelos y los meridianos de  $M$  definen una referencia móvil.

**Número 4.** Paralelizar el cono  $x^2 + y^2 = z^2$ ,  $z > 0$ , como superficie de revolución y como superficie topográfica, y comparar los dos resultados.

**Número 5.** Calcular las órbitas de los siguientes flujos completos de  $\mathbb{R}^2$ , denominados respectivamente *fuelle* y *sumidero*, y calcular su generador infinitesimal:

$$\varphi_t(x, y) = (xe^t, ye^t) \quad \begin{array}{c} \nearrow \\ \rightarrow \\ \searrow \\ \leftarrow \\ \downarrow \\ \nearrow \\ \rightarrow \\ \searrow \\ \leftarrow \\ \downarrow \end{array} \quad \varphi_t(x, y) = (xe^{-t}, ye^{-t}) \quad \begin{array}{c} \nearrow \\ \rightarrow \\ \searrow \\ \leftarrow \\ \downarrow \\ \nearrow \\ \rightarrow \\ \searrow \\ \leftarrow \\ \downarrow \end{array}$$

**Número 6.** Construir un flujo completo en el paraboloides  $M : z = x^2 + y^2$  cuyas órbitas sean el origen y los semimeridianos correspondientes a secciones planas  $M \cap \{ax + by = 0\}$ .

**Número 7.** Calcular las órbitas del siguiente flujo completo de  $\mathbb{R}^2$ , denominado *circulación*, y calcular su generador infinitesimal:

$$\varphi_t(x, y) = (x \cos(at) + \frac{1}{a}y \sin(at), -ax \sin(at) + y \cos(at)).$$

**Número 8.** Construir en la esfera un flujo completo cuyas órbitas sean los meridianos, y otro cuyas órbitas sean los paralelos.

**Número 9.** Construir en el semicono  $x^2 + y^2 = z^2$ ,  $z > 0$ , un flujo completo cuyas órbitas sean las generatrices.

**Número 10.** Sea  $M$  una superficie de revolución  $x^2 + y^2 = f(z)^2$ . Construir un flujo completo de  $M$  cuyas órbitas sean los paralelos  $z = \text{cte}$ .

**Número 11.** Probar que si un flujo completo tiene alguna órbita no periódica, entonces el grupo de difeomorfismos correspondiente es isomorfo a  $\mathbb{R}$ .

**Número 12.** Sea  $T \subset \mathbb{R}^3$  el toro de revolución parametrizado por el difeomorfismo periódico local suprayectivo

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow T : (u, v) \mapsto ((2 + \cos u) \cos v, (2 + \cos u) \sin v, \text{sen } u).$$

demostrar que el flujo completo de  $\mathbb{R}^2$  de ecuaciones  $\psi_t(u, v) = (u + t, v + \lambda t)$  induce un flujo completo  $\varphi$  en  $T$ . Determinar para qué valores de la constante  $\lambda$  las órbitas de  $\varphi$  son todas periódicas, y para qué valores no lo es ninguna.

**Número 13.** Probar que si un flujo de la circunferencia tiene una curva integral periódica, su generador infinitesimal no tiene ceros.

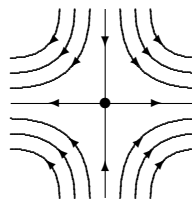
**Número 14.** Construir un flujo en  $\mathbb{R}^2$  cuyo generador infinitesimal sea  $X = \frac{\partial}{\partial x} - y^2 \frac{\partial}{\partial y}$ , y calcular su dominio de definición. (Compárese con el flujo de  $\mathbb{R}$  del ejemplo III.3.1.)

**Número 15.** Mostrar que una aplicación  $\varphi_t(x) = (1 + tf(x))x$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , no puede ser nunca un flujo (salvo si  $f \equiv 0$ ). ¿Y si sólo se define  $f$  en un intervalo abierto de  $\mathbb{R}$ ?

**Número 16.** Sea  $P$  un polinomio en  $m$  variables y consideremos la aplicación  $\varphi_t(x) = x/(1 + tP(x))$ ,  $x \in \mathbb{R}^m$ . Demostrar que  $\varphi$  es un flujo de  $\mathbb{R}^m$  si y sólo si  $P$  es una forma lineal. (Compárese con el primer ejemplo de esta sección.)

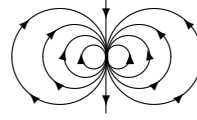
**Número 17.** Demostrar que los únicos flujos polinomiales de  $\mathbb{R}$  son  $\varphi_t(x) = x + ct$  con  $c$  constante. (Si  $\varphi_t(x) = P(t, x)$  es un polinomio, podemos comparar en  $P(s + t, x) = P(s, P(t, x))$  los coeficientes de las potencias de  $s$ , y derivar las igualdades resultantes respecto de  $t$  en  $t = 0$ .)

**Número 18.** Calcular las órbitas del siguiente campo del plano, denominado *silla*:

$$X = x \frac{\partial}{\partial x} - ay \frac{\partial}{\partial y}, \quad a > 0.$$


**Número 19.** (1) Calcular las órbitas del campo de  $\mathbb{R}^2$  siguiente, denominado *dipolo*:

$$X = -2xy \frac{\partial}{\partial x} + (x^2 - y^2) \frac{\partial}{\partial y}.$$



(2) Mostrar que en la esfera unidad  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 + w^2 = 1$  se puede definir un campo tangente  $Y$  que en las coordenadas  $(x, y)$  asociadas a la proyección estereográfica desde el polo norte coincide con el dipolo del apartado anterior.

(3) Utilizar la expresión de  $Y$  en las coordenadas asociadas a la proyección estereográfica desde el polo sur para obtener el flujo de  $Y$ .

(4) Obtener el flujo del dipolo  $X$ , y concluir que no es un campo completo. ¿Qué curvas integrales de  $X$  no pueden definirse en toda la recta  $\mathbb{R}$ ?

**Número 20.** Se considera el difeomorfismo  $f(x, y, z) = (x, y, z)/\sqrt{1+z^2}$ , definido del cilindro  $M : x^2 + y^2 = 1$  sobre un abierto  $U$  de la esfera, y el campo  $Y$  en  $U$  transformado por  $f$  de  $X = g(z)(-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y})$ . Describir las órbitas de  $Y$ , y mostrar que si  $Y$  se extiende a toda la esfera, entonces se cumple  $\lim_{z \rightarrow \pm\infty} g(z)/\sqrt{1+z^2} = 0$ .

## Formas diferenciales

**Número 1.** Probar que si  $\alpha$  es una forma multilineal alternada de grado  $r$  de un espacio vectorial  $E$ , y  $u_1, \dots, u_r$  son vectores linealmente dependientes, entonces se tiene  $\alpha(u_1, \dots, u_r) = 0$ . Deducir directamente de esto que  $\Lambda^r(E) = 0$  para  $r > \dim E$ .

**Número 2.** Demostrar que  $k$  formas lineales  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$  de un espacio vectorial  $E$  son linealmente independientes si y sólo si  $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k \neq 0$ .

**Número 3.** Sean  $\alpha$  y  $\omega$  formas de grados 1 y 2 respectivamente, la primera no nula, de un espacio vectorial  $E$ . Demostrar que  $\alpha \wedge \omega = 0$  si y sólo si existe otra forma  $\beta$  de grado 1 tal que  $\omega = \alpha \wedge \beta$ .

**Número 4.** Sean  $u_1, \dots, u_r$  vectores de un espacio vectorial  $E$  de dimensión  $m$ , y  $B$  una base de  $E$ . Demostrar que la aplicación multilineal alternada

$$\alpha : (v_1, \dots, v_{m-r}) \mapsto \det_B(v_1, \dots, v_{m-r}, u_1, \dots, u_r)$$

es no nula si y sólo si  $u_1, \dots, u_r$  son independientes.

**Número 5.** Sea  $B$  una base de un espacio vectorial  $E$  de dimensión  $m$ . Demostrar que toda forma multilineal alternada de grado  $m-1$  es del tipo  $\det_B(u, \dots)$ , para un vector  $u \in E$ . Deducir un isomorfismo *no canónico*  $E \rightarrow \Lambda^{m-1}(E)$ .

**Número 6.** Se considera un sistema de ecuaciones lineales homogéneas

$$\begin{array}{cccc} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n+1}x_{n+1} & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn+1}x_{n+1} & = & 0 \end{array}$$

cuyo rango es  $n$ . Demostrar que las soluciones del sistema son  $\lambda(c_1, \dots, c_{n+1})$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , donde  $c_i$  es el adjunto con signo de la variable  $x_i$  en la matriz

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_{n+1} \\ a_{11} & \cdots & a_{1n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn+1} \end{pmatrix}.$$

(¡Lo más fácil es comprobar que son soluciones!)

**Número 7.** Se considera la aplicación lineal  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto (x + ay, y, z)$ . ¿Existe algún valor de  $a$  tal que el determinante de la aplicación  $f^* : \Lambda^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$  sea negativo?

**Número 8.** Sean  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  la esfera unidad, y  $(x, y, z) \mapsto (u, v)$  la proyección estereográfica desde el polo norte  $a = (0, 0, 1)$ . Sabiendo que en las coordenadas  $(u, v)$  una forma diferencial  $\omega$  se escribe  $\omega = \frac{u}{(u^2 + v^2 + 1)^3} du \wedge dv$ , calcular  $\omega_a$ . ¿Es cierto que existe tal forma?

**Número 9.** De nuevo, sean  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  la esfera unidad, y  $(x, y, z) \mapsto (u, v)$  la proyección estereográfica desde el polo norte  $a = (0, 0, 1)$ . Estudiar para qué enteros  $n$  existe en  $\mathbb{S}^2$  una forma diferencial cuya expresión en las coordenadas  $(u, v)$  es

$$\frac{u^2 v}{(u^2 + v^2 + 1)^n} du \wedge dv.$$

¿Qué de peculiar tiene el caso  $n = 4$ ?

**Número 10.** Demostrar que una forma diferencial  $\omega = ady \wedge dz - bdx \wedge dz + cdx \wedge dy$  de  $\mathbb{R}^3$  es nula sobre una superficie  $M \subset \mathbb{R}^3$  si y sólo si el campo  $(a, b, c)$  es tangente a  $M$ . Utilizar este hecho para encontrar todas las formas de  $\mathbb{R}^3$  que coinciden en la esfera  $\mathbb{S}^2$  con la forma  $\omega$  del problema 1 anterior.

**Número 11.** Sea  $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$  una hipersuperficie de ecuación  $x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)$ , y sea  $\alpha$  la restricción a  $M$  de la forma  $\sum_i (-1)^{i-1} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_{n+1}$ . Expresar  $\alpha$  en las coordenadas  $(x_1, \dots, x_n)$ .

**Número 12.** Sean  $M$  una variedad de dimensión  $m$  y  $\omega$  una forma de grado  $m$  que no se anula en ningún punto. Demostrar que cada forma  $\alpha$  de grado  $m$  se escribe  $\alpha = f\omega$  para una única función diferenciable  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Número 13.** Sean  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  formas diferenciables de grado 1 de una variedad  $M$  de dimensión  $m$ , tales que la forma de grado máximo  $\omega = \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_m$  no se anula en ningún punto. Demostrar que  $\Gamma^r(M)$  es isomorfo a  $\mathcal{C}^\infty(M)^d$ , con  $d = \binom{m}{r}$ .

**Número 14.** Sea  $\{X_1, \dots, X_m\}$  una referencia móvil de una variedad  $M$ . Demostrar que existen  $m$  formas diferenciales  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  determinadas por las condiciones de dualidad  $\alpha_i(X_j) = 1$  si  $i = j$ ,  $\alpha_i(X_j) = 0$  en otro caso, y que la forma  $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_m$  no se anula en ningún punto.

**Número 15.** Se considera en  $\mathbb{R}^m$  la forma diferencial  $\alpha = \sum_{ij} a_{ij} x_i dx_j$ ,  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ . Caracterizar mediante la matriz  $(a_{ij})$  el hecho de que  $\alpha$  sea cerrada, y comprobar que en ese caso  $\alpha$  es exacta.

**Número 16.** Sea  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $m$  y sean  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  formas de grado 1 tales que la forma  $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_m$  no se anula nunca. Demostrar:

- (1) Una forma  $\eta$  de grado  $< m$  tal que  $\eta \wedge \alpha_i = 0$  para cada  $i$ , es necesariamente nula.
- (2) Si  $m > 2$ , toda forma  $\eta$  de grado 1 tal que  $\eta \wedge \alpha_i = d\alpha_i$  para cada  $i$ , es necesariamente cerrada.
- (3) Mostrar con un contraejemplo que la condición  $m > 2$  del apartado anterior es necesaria.

**Número 17.** Se considera la forma de  $\mathbb{R}^4$  siguiente

$$\alpha = (y + z + t)dx + (x + z + t)dy + (x + y + t)dz + fdt.$$

Buscar las funciones  $f$  para las que  $\alpha$  es cerrada, y mostrar entonces explícitamente que es exacta.

**Número 18.** Sean  $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funciones diferenciables y considérese en  $\mathbb{R}^3$  la forma de grado 1

$$\alpha = yzdx + (zf(x) + h(x))dy + (yg(x) + h(x))dz.$$

Determinar  $f, g, h$  para que  $\alpha$  sea cerrada, y comprobar que entonces es, de hecho, exacta.

**Número 19.** Se consideran el abierto  $W \subset \mathbb{R}^3$  definido por  $x^2 + y^2 \neq 0$ ,  $z > 0$ , y en él la forma  $\alpha$  de grado 2

$$\alpha = f\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)(xdy \wedge dz - ydx \wedge dz - zdx \wedge dy),$$

donde  $f(t)$  es una función diferenciable en  $t > 0$ . Determinar  $f$  para que  $\alpha$  sea cerrada, y encontrar entonces una primitiva suya. (Úsese la parametrización  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$ ,  $z = \rho t$ .)

**Número 20.** El *rotacional* de una forma diferencial  $\omega = adx + bdy + cdz$  de  $\mathbb{R}^3$  es por definición el campo

$$\text{rot } \omega = \left( \frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z}, -\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial z}, \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right),$$

cuya construcción obedece a la regla del determinante

$$\begin{vmatrix} (1) & \partial/\partial x & a \\ (2) & \partial/\partial y & b \\ (3) & \partial/\partial z & c \end{vmatrix}.$$

Demostrar que  $d\omega = \det(\text{rot } \omega, \dots)$ , y deducir que  $\omega$  es cerrada sobre una superficie  $M \subset \mathbb{R}^3$  si y sólo si su rotacional es tangente a la superficie (recuérdese IV.3 Prob.3).

## Integración en variedades

**Número 1.** Demostrar que una variedad paralelizable es orientable, y mostrar que el recíproco es falso.

**Número 2.** Sea  $M$  una variedad diferenciable de dimensión 3, y supongamos que existe un par de campos tangentes globales  $X_1, X_2$  independientes. Demostrar que  $M$  es orientable si y sólo si es paralelizable.

**Número 3.** Por ser la esfera  $S^m$  orientable, tiene una forma de grado  $m$  nunca nula. Demostrar que una tal forma es

$$\omega = \sum_i (-1)^{i-1} x_i dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_{m+1}.$$

(Utilícese que en la esfera es  $\sum_i x_i dx_i = 0$  para obtener

$$x_i \omega = (-1)^{i-1} \|x\|^2 dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_{m+1},$$

y mostrar que el miembro de la derecha sólo se anula en el plano tangente a la esfera en los puntos con  $x_i = 0$ .)

**Número 4.** Sea  $M$  una variedad orientable conexa, y fijemos una orientación suya  $\zeta$ . Demostrar que existe una forma diferenciable de grado máximo  $\omega$  nunca nula tal que para cada punto  $a \in M$  y cada base  $u_i$  de  $T_a M$  positiva en  $\zeta_a$  se verifica  $\omega_a(u_1, \dots, u_m) > 0$ . Mostrar que esta condición se cumple si se cumple en algún punto y para alguna base. Una tal forma se llama *compatible* con la orientación.

**Número 5.** Sea  $f : M \rightarrow N$  un difeomorfismo entre dos variedades orientadas. Elijamos formas de grado máximo  $\alpha, \beta$  de  $M, N$  compatibles con las orientaciones dadas. Demostrar que  $f$  conserva la orientación si y sólo si  $f^* \beta = \lambda \alpha$  para una función diferenciable siempre positiva  $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Número 6.** Se consideran en  $\mathbb{R}^3$  el toro  $T$  parametrizado por

$$x = (2 + \cos \alpha) \cos \beta, \quad y = (2 + \cos \alpha) \sin \beta, \quad z = \sin \alpha,$$

el cilindro  $M : x^2 + y^2 = 1$  y la aplicación diferenciable  $f(x, y, z) = (x/\sqrt{x^2 + y^2}, y/\sqrt{x^2 + y^2}, z)$  del primero en el segundo. Orientar las dos superficies y estudiar la conservación de la orientación por  $f$ .

**Número 7.** Orientar el tronco de cilindro  $M \subset \mathbb{R}^3$  dado por  $x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1$  de manera que el difeomorfismo local  $(t, z) \mapsto (\cos t, \sin t, z)$  conserve la orientación. Determinar entonces la orientación de cada componente conexa  $C_0, C_1$  del borde de  $M$  y obtener de nuevo la fórmula  $\partial M = C_0 - C_1$ . ¿Conserva la orientación el difeomorfismo  $C_0 \rightarrow C_1 : (x, y, 0) \mapsto (x, y, 1)$ ?

**Número 8.** Sea  $M \subset \mathbb{R}^3$  el toro de ecuación  $16(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2$  obtenido al girar la circunferencia de centro  $(2, 0, 0)$  y radio 1 del plano  $y = 0$  alrededor del eje de las  $z$ , y consideremos la variedad con borde  $N = M \cap \{y \geq 0\}$ . ¿Es posible orientar  $N$  de tal modo que para la orientación inducida en su borde  $\partial N = N \cap \{y = 0\} = C_+ \cup C_-$  el difeomorfismo  $C_+ \rightarrow C_- : (x, 0, z) \mapsto (-x, 0, z)$  conserve la orientación?

**Número 9.** Se considera la forma diferencial  $\omega = -x^2 y dx + xy^2 dy$  de  $\mathbb{R}^2$ , y la circunferencia  $C : x^2 + y^2 = r^2$ . Calcular  $\int_C \omega$ . ¿Cómo se debe orientar  $C$  para que esa integral sea positiva?

**Número 10.** Se considera el meridiano  $C$  determinado por el plano  $x + y + z = 0$  en la esfera  $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^3$  de centro el origen y radio  $\rho$ . Calcular  $\int_C \omega$ , siendo  $\omega = (y + z)dx + (x + z)dy + (x + y)dz$ .

**Número 11.** Se considera en  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  la forma de grado 2

$$\alpha = \frac{-xz}{x^2 + y^2 + z^2} dy \wedge dz + \frac{yz}{x^2 + y^2 + z^2} dx \wedge dz + f(x, y, z) dx \wedge dy,$$

siendo  $f$  una función diferenciable arbitraria. Sea  $M \subset \mathbb{R}^3$  el tronco de cilindro de ecuaciones  $x^2 + y^2 = a^2$ ,  $0 \leq z \leq b$ , y  $\omega$  la restricción de  $\alpha$  a  $M$ . Calcular  $\int_M \omega$  parametrizando  $M$  mediante:

$$(\theta, t) \mapsto (a \cos \theta, a \sin \theta, t).$$

¿Con qué orientación estamos integrando?

**Número 12.** Calcular la integral de la forma  $xdy \wedge dz - y^2 dx \wedge dz - 2yz dx \wedge dy$  sobre el casquete esférico  $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ .

**Número 13.** Calcular la integral de la forma  $\frac{1}{x^2+y^2}(-ydx \wedge dz + xdy \wedge dz)$  sobre el toro  $M : 16(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2$ .

**Número 14.** Calcular la integral de la forma  $(x^2+y^2)dx \wedge dy \wedge dz$  en el interior del elipsoide  $36x^2+9y^2+4z^2 = 36$ .

**Número 15.** Sea  $f : M \rightarrow N$  un difeomorfismo local entre dos variedades conexas compactas y orientadas. Demostrar que para cada forma  $\omega$  de grado máximo de  $N$  se tiene

$$\int_M f^* \omega = \varepsilon r \int_N \omega,$$

donde  $\varepsilon = \pm 1$  según  $f$  conserve o invierta la orientación, y  $r$  es el número de preimágenes de un punto cualquiera de  $N$ .

**Número 16.** Se consideran en  $\mathbb{R}^3$  las dos superficies diferenciables compactas  $M : x^2 + y^2 + z^4 = 1$  y  $N : x^2 + y^2 + z^2 = 1$  y entre ellas la aplicación diferenciable  $f : M \rightarrow N : (x, y, z) \mapsto (x, y, z^2)$ .

(1) Estudiar dónde es  $f$  un difeomorfismo local, y, después de orientar las dos superficies, dónde conserva la orientación.

(2) Calcular la integral  $\int_M f^* \omega$  para una forma arbitraria de grado máximo  $\omega$  de  $N$ .

**Número 17.** Se considera en  $\mathbb{R}^3$  la forma diferencial

$$\omega = xf(x)dy \wedge dz + (2y - 3yf(x))dx \wedge dz - 2zdx \wedge dy,$$

donde  $f$  es una función diferenciable en  $x > 0$ . Se pide:

(1) Determinar las funciones  $f$  para las que  $\omega$  es cerrada, y encontrar entonces otra forma  $\alpha = Pdx + Qdy$  tal que  $d\alpha = \omega$ .

(2) Calcular la integral de la restricción de  $\alpha$  a la circunferencia del plano  $x = a > 0$  de centro el punto  $(a, 0, 0)$  y radio  $r$ .

(3) Determinar cuando existan los valores  $0 < b < a$  para los que es nula la integral de la restricción de  $\omega$  al tronco de cono  $M : x^2 = y^2 + z^2, b \leq x \leq a$ .

**Número 18.** Sea  $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^3$  la esfera de centro el origen y radio  $\rho$ . Se consideran los dos casquetes superior e inferior,  $\Sigma_+, \Sigma_- \subset \mathbb{S}$ , determinados por el plano  $x + z = t$ . Calcular sobre esos casquetes las integrales de la forma diferencial  $dy \wedge dz - dx \wedge dz + dx \wedge dy$ , integrales que denotaremos  $I_+(t)$  e  $I_-(t)$ . Representar las dos funciones  $t \mapsto I_+(t), I_-(t)$  y calcular sus extremos.

**Número 19.** Sea  $M \subset \mathbb{R}^3$  la superficie  $z(x^2 + y^2) = 1, x^2 + y^2 > 1$ , y para cada  $r > 1$  consideremos  $M_r = M \cap \{x^2 + y^2 \leq r^2\}$ . Se pide:

(1) Mostrar que la forma  $\omega = z^7 dz \wedge (ydx - xdy)$  no tiene primitiva en  $\mathbb{R}^3$ , pero sí en  $M$ .

(2) Orientar las superficies y calcular las integrales  $\int_{M_r} \omega$  mediante el teorema de Stokes.

(3) Deducir de (2) el valor de la integral  $\int_M \omega$ , y explicar cómo, siendo  $\omega$  exacta en  $M$  y  $M$  sin borde, puede esa integral no ser nula.

**Número 20.** Sea  $M \subset \mathbb{R}^3$  el toro de ecuación  $16(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2$ , y sea  $\omega$  la restricción a  $M$  de la forma

$$2z\sqrt{x^2 + y^2}dx \wedge dy + \frac{x^2 + y^2 - z^2 - 3}{\sqrt{x^2 + y^2}}(xdy \wedge dz - ydx \wedge dz).$$

Calcular la integral  $\int_M \omega$  y concluir que  $\omega$  no es exacta.