

TRABAJO DE FIN DE GRADO, JUNIO 2016

LA TOPOLOGÍA DE LOS PROBLEMAS DE DIVISIÓN: REPARTO LIBRE DE ENVIDIA Y DIVISIÓN CONSENSUADA

DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS, UCM

DIRIGIDO POR JESÚS M. RUIZ

AITOR ALONSO LORENZO

RESUMEN. En este trabajo se estudian dos *problemas de división* y la topología que se requiere para resolverlos. Los problemas son el *reparto libre de envidia* y la *división consensuada*, y los resultados topológicos involucrados son el Teorema del Punto Fijo de Brouwer y el Teorema de Borsuk-Ulam. Estos teoremas se deducen de sus análogos discretos: el Lema de Sperner y el Lema de Tucker. También analizamos las equivalencias formales entre estos cuatro resultados.

Palabras clave: División justa y libre de envidia, división consensuada, lema de Sperner, teorema del punto fijo de Brouwer, lema débil de Ky Fan, lema de Tucker, teorema de Borsuk-Ulam.

ABSTRACT. In this work we study two *division problems*, and the topology behind their solutions. The problems are *fair division* and *consensus division*, and the topological results involved are the *Brouwer Fixed Point Theorem* and the *Borsuk-Ulam Theorem*. These theorems are deduced from their discrete versions: the *Sperner Lemma* and the *Tucker Lemma*. Also we discuss the formal equivalences among these four results.

Keywords: Envy-free fair division, consensus division, Sperner's lemma, Brouwer's fixed point theorem, weak Ky Fan's lemma, Tucker's lemma, Borsuk-Ulam's theorem.

ÍNDICE

1. Introducción	2
2. Complejos simpliciales	3
3. Lema de Sperner	11
4. División justa y libre de envidia	16
5. Lema de Tucker	19
6. División 1/2 consensuada	26
Referencias	27

1. INTRODUCCIÓN

Los problemas de división tienen numerosas aplicaciones prácticas, y su tratamiento riguroso involucra resultados importantes de topología algebraica. Aquí nos interesamos especialmente por dos: el Teorema de punto fijo de Brouwer y el Teorema de Borsuk-Ulam.

Para realizar las divisiones, consideramos que hay n observadores. Nuestro objetivo es que al realizar la división cada uno de los observadores otorgue el mismo valor a cada una de las porciones, que no prefieran ninguna sobre otra. No obstante cada uno de los observadores puede tener distintas preferencias, por ejemplo si estamos repartiendo un pastel algunas personas prefieren la nata y otras prefieren el chocolate, e incluso puede darse el caso de que algunas personas consideren algunos ingredientes malos, pues hay personas a las que no les gustan las frutas escarchadas.

Nuestro modelo será un caso muy general, trataremos de dividir el intervalo $I = [0, 1]$, el cual podemos considerar como una proyección del pastel, en nuestro ejemplo anterior.

Las preferencias de los observadores son funciones continuas $\mu_i, 1 \leq i \leq n$ de medida de probabilidad, sin la restricción de que la medida de un conjunto deba ser positiva. De esta forma podemos generalizar fácilmente el caso de que a los observadores no les gusten alguno de los ingredientes. No obstante, dado que si seguimos con el ejemplo del pastel cualquiera podría sencillamente tirar a la basura la parte que no le gustase, en la literatura suele considerarse que en efecto todas las funciones son funciones continuas de medida de probabilidad. La condición de continuidad significa que las funciones $t \mapsto \mu_i([0, t])$ son continuas. En particular, $\mu_i(t) = 0$ y $\mu_i([0, t]) = \mu_i([0, t])$ para todo $t \in I$ y para todo i .

Una *división en k trozos*, o *división $\frac{1}{k}$* , es una partición $\{A_1, \dots, A_k\}$ del intervalo $[0, 1]$ tal que cada uno de los $A_j \subset [0, 1]$ es medible respecto de cada μ_i ,

$$A_1 \cup \dots \cup A_k = I$$

y $A_i \cap A_j$ es un conjunto finito para $i \neq j$.

En el caso concreto $n = k$, donde hay el mismo número de observadores que de trozos en los que nuestro intervalo será dividido, tiene sentido considerar que cada uno de los observadores recibe uno de los trozos. La persona i recibe el trozo $A_{\pi(i)}$ para cierta permutación π . En este caso denotamos la división $(A_1, \dots, A_k; \pi)$.

En este caso, dado que cada observador recibe un trozo, podemos inmediatamente observar dos condiciones que cualquiera desearía que se cumpliesen, que su trozo fuese al menos $\frac{1}{n}$ del total, y que su trozo fuese mayor o igual que todos los demás trozos. Esto da lugar a dos definiciones:

Definición 1.1. Si $n = k$ decimos que $(A_1, \dots, A_n; \pi)$ es *justa* si $\mu_i(A_{\pi(i)}) \geq \frac{1}{n}$ para todo $i = 1, \dots, n$.

En caso de que $\mu_i(A_{\pi(i)}) \geq \mu_i(A_{\pi(j)})$ para todo i, j , decimos que la división es *libre de envidia*.

Relajando esta condición, si para cierto $\varepsilon > 0$ se cumple $\mu_i(A_{\pi(i)}) \geq \mu_i(A_{\pi(j)}) - \varepsilon$ para todo i, j , diremos que es una división *libre de envidia ε -aproximada*.

Trataremos la división $\frac{1}{n}$ justa y libre de envidia en la sección 4, demostrando su existencia y proporcionando un algoritmo para encontrar una solución aproximada.

En el caso $n \neq k$ es más complicado determinar cuál puede ser una división satisfactoria, porque en este caso cada observador no va a recibir un único trozo y por tanto no va a defender que un único trozo sea satisfactorio, sino que todos ellos lo sean.

Definición 1.2. Decimos que una división $\frac{1}{k}$ es *consensuada* cuando $\mu_i(A_j) = \frac{1}{k}$ para todo i y para todo j . Esto significa que para todo observador cualquier trozo es exactamente igual de deseable que cualquier otro.

Asimismo, si para cierto $\varepsilon > 0$ se cumple $\frac{1}{k} - \varepsilon \leq \mu_i(A_j) \leq \frac{1}{k} + \varepsilon$ para todo i y para todo j , decimos que es una división $\frac{1}{k}$ *consensuada ε -aproximada*.

En la sección 6 discutiremos la división $\frac{1}{2}$ consensuada, demostrando su existencia y proporcionando un algoritmo que proporciona una división aproximada.

Terminamos esta introducción enunciando los dos resultados de topología algebraica que intervienen de forma esencial en el estudio de los problemas de división.

Teorema 1.3 (Teorema de punto fijo de Brouwer). *Toda función continua $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$ de la bola cerrada unidad n -dimensional*

$$\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$$

en sí misma tiene un punto fijo, es decir existe un $x \in \mathbb{B}^n$ tal que $f(x) = x$.

Teorema 1.4 (Teorema de Borsuk-Ulam). *Si $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación continua antipodal (es decir, $f(-x) = -f(x)$) de la esfera n -dimensional*

$$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$$

entonces existe un $x \in \mathbb{S}^n$ tal que $f(x) = 0$.

Demostremos estos dos teoremas utilizando sus versiones discretas. La del primero es el *Lema de Sperner* (sección 3) y la del segundo el *Lema de Tucker* (sección 5). Más exactamente, en la sección 5 probaremos la denominada forma débil del *Lema de Ky Fan*, que es un resultado combinatorio que generaliza el lema de Tucker. Asimismo mostraremos que cada uno de los teoremas es de hecho equivalente al lema del que se deduce, y que el teorema de Brouwer se deduce del de Borsuk-Ulam. Como preliminares hemos incluido una sección 2 las definiciones y resultados sobre complejos simpliciales que se utilizan en el trabajo.

La referencia principal utilizada para todo esto ha sido el texto [2] de M. de Longueville, aunque también hemos consultado el libro [3] de J. Matoušek. La demostración del lema de Ky Fan que presentamos usa la terminología de [2], pero está escrita siguiendo el artículo [4] de T. Prescott y F.E. Su. La prueba original de K. Fan es de [1].

2. COMPLEJOS SIMPLICIALES

A continuación introducimos todo el vocabulario simplicial que necesitaremos para trabajar con triangulaciones, que como veremos es una de las herramientas centrales más importantes a nuestra disposición y que emplearemos en la gran mayoría de resultados.

Definición 2.1. Un *símplice* (afín) es un subconjunto σ de \mathbb{R}^m que puede expresarse como

$$\sigma = \text{conv}(\{v_0, \dots, v_n\}) = \left\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i v_i \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 \right\}$$

para ciertos $v_0, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$. Observamos que los v_0, \dots, v_n pueden tomarse afínmente independientes. Supuesto esto, v_0, \dots, v_n son los *vértices* de σ , y lo denotamos $\text{vert}(\sigma) = \{v_0, \dots, v_n\}$.

Nótese que un vértice $v \in \text{vert}(\sigma)$ es un punto de \mathbb{R}^m , y por tanto tiene m componentes: $v = (v_1, \dots, v_m)$. Nótese también que usamos símlices cerrados, que como son conjuntos acotados quiere decir que son compactos.

Para todo k con $-1 \leq k \leq n$ y cualquier subconjunto de $k+1$ elementos $\{v_{i_0}, \dots, v_{i_k}\} \subseteq \{v_0, \dots, v_n\}$, decimos que el símlice $\tau = \text{conv}(v_{i_0}, \dots, v_{i_k})$ (con $i_0 < \dots < i_k$) es una *cara* k -dimensional de σ . Esto lo abreviamos escribiendo $\tau \leq \sigma$, y $\dim(\tau) = k$. Observamos que el caso $k = -1$ en el que obtenemos el conjunto vacío da lugar a una cara de dimensión -1 . Las caras de dimensión $n - 1$ son denominadas *facetas*.

Para abreviar, decimos que un símlice d -dimensional es un *d-símplice*.

Definición 2.2. Un *complejo simplicial* (geométrico finito) Δ es una familia finita de símlices (afines) en \mathbb{R}^m tal que:

1. Si $\sigma \in \Delta$ y $\tau \leq \sigma$, entonces $\tau \in \Delta$
2. Si $\sigma, \tau \in \Delta$, entonces $\sigma \cap \tau$ es una cara tanto de σ como de τ .

Los símlices $\sigma \in \Delta$ son denominados *caras* de Δ y los *vértices* de Δ son los vértices de sus caras,

$$\text{vert}(\Delta) = \cup_{\sigma \in \Delta} \text{vert}(\sigma).$$

La *dimensión* de Δ es el máximo de las dimensiones de sus caras,

$$\dim(\Delta) = \max_{\sigma \in \Delta} \dim(\sigma).$$

Un complejo simplicial es *puro* de dimensión n si sus caras maximales respecto a la inclusión tienen todas dimensión n .

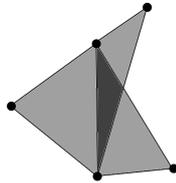


FIGURA 1. Un complejo simplicial puro

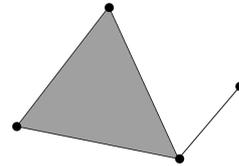


FIGURA 2. Un complejo simplicial no puro

Para analizar la propiedad de dimensión pura utilizaremos un resultado sencillo cuya demostración incluimos por completitud:

Proposición 2.3 (Teorema de Baire lineal, versión finita). Sean $L_1, \dots, L_r \subset \mathbb{R}^n$ subespacios afines de codimensión ≥ 1 . Entonces $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_i L_i$ es denso en \mathbb{R}^n .

Demostración. Por inducción. Para $r = 1$ mediante un isomorfismo afín (que es homeomorfismo) podemos suponer $L_1 \subset \{x_1 = 0\}$, y basta observar que $\mathbb{R}^n \setminus \{x_1 = 0\}$ es denso, pues cualquier bola abierta contiene puntos con primera coordenada no nula. Ahora supongamos $r \geq 2$ y que $V = \mathbb{R}^n \setminus L_2 \cup \dots \cup L_r$ es denso. Tenemos que ver que $U = \mathbb{R}^n \setminus L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_r$ es denso, es decir, que U corta a cualquier abierto no vacío W . Pero por ser V denso, $W \cap V \neq \emptyset$ y como V es abierto, lo es $W \cap V$. Así, por el caso $r = 1$, $W \cap V \setminus L_1 \neq \emptyset$ y como $U = V \setminus L_1$ concluimos que $W \cap U = W \cap (V \setminus L_1) = W \cap V \setminus L_1 \neq \emptyset$. \square

Volvamos a las nociones simpliciales.

Definición 2.4. El espacio dado por la unión de todas las caras de un complejo simplicial Δ se denomina el *poliedro* de Δ , y se denota $|\Delta| = \bigcup_{\sigma \in \Delta} \sigma$.

Un espacio topológico X es un poliedro si existen un complejo simplicial Δ y un homeomorfismo $h : |\Delta| \rightarrow X$. El homeomorfismo h junto con el complejo simplicial Δ es lo que llamamos una *triangulación* de X .

Observamos que los poliedros son espacios compactos.

Definición 2.5. Si Δ y Δ' son complejos simpliciales, decimos que Δ' es una *subdivisión* de Δ si $\text{vert}(\Delta) \subseteq \text{vert}(\Delta')$ y $|\Delta| = |\Delta'|$.

Definición 2.6. Sea Δ un complejo simplicial. Decimos que $f : |\Delta| \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una *extensión lineal afín* de una función $g : \text{vert}(\Delta) \rightarrow \mathbb{R}^m$ si coincide con g en los vértices y es una función afín restringida a cada uno de los símlices de Δ . Esto es, dado $x \in \sigma$ para cierto σ símlice de Δ con vértices v_1, \dots, v_n , y por tanto

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i,$$

se cumple

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i g(v_i).$$

A continuación presentamos el símlice estándar que emplearemos como espacio de soluciones del problema de división $\frac{1}{n}$ y sobre el que se formula el Lema de Sperner.

Definición 2.7. Utilizamos la siguiente notación:

$$\sigma^n = \text{conv}(\{e_1, \dots, e_{n+1}\}) = \left\{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \mid x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

donde e_i son los vectores de la base estándar de \mathbb{R}^{n+1} . En otras palabras, los elementos de σ^n son los puntos de \mathbb{R}^{n+1} cuyas coordenadas suman 1 y están todas en el intervalo $[0, 1]$.

Denotamos Δ^n el complejo simplicial formado por σ^n y sus caras. Una subdivisión K de Δ^n se entenderá como un complejo simplicial obtenido de Δ^n añadiendo vértices extra.

Observamos que el borde de $|\Delta^n|$ son sus puntos que tienen alguna coordenada nula, por tanto un punto x está en el borde de $|\Delta^n|$ si y sólo si está en (al menos) una cara τ de Δ^n que no sea σ^n .

Se observa que cualquier símplice es homeomorfo a este estándar via

$$f : \sigma^n \rightarrow \sigma = \text{conv}(\{v_0, \dots, v_n\}) : x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \sum_{i=0}^n x_i v_i.$$

Es decir, f es la extensión de $e_i \mapsto v_{i-1}$ según 2.6.

Es importante introducir una serie de resultados geométricos bastante intuitivos que necesitaremos para afinar algunas sutilezas cuando tratemos con subdivisiones de Δ^n .

Proposición 2.8. *La bola cerrada unidad euclídea*

$$\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$$

y $|\Delta^n|$ son homeomorfos.

Demostración. Son homeomorfos via el homeomorfismo:

$$h : \mathbb{B}^n \rightarrow |\Delta^n| : x \mapsto \frac{x - c}{\|c + l(x - c)\|},$$

donde $c = (\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$, y $l = \frac{1}{1 - nx_i}$, con i la coordenada donde x_i es mínimo, o en caso de haber varias una cualquiera, puesto que si hay varias el valor de l no cambia. Además $h(0) = 0$.

Este homeomorfismo lo que hace es considerar el vector $x - c$, el rayo desde c hacia x , y ver por qué valor l hay que multiplicarlo para que $y = c + l(x - c)$ esté en la frontera de $|\Delta^n|$, esto es, calcular la intersección del rayo con la frontera. Ahora reescalamos para que la imagen de la frontera de $|\Delta^n|$ sea en efecto la frontera de \mathbb{B}^n , nos basta con dividir por la norma de $c + l(x - c)$. Puesto que la función definida a trozos es continua en cada uno de los trozos, y en la intersección de los trozos coincide, es continua. Para ver la inyectividad y la suprayectividad basta observar que lo que hacemos es reescalar de forma lineal en cada segmento $[c, y] \rightarrow [c, x/\|x\|]$. \square

Proposición 2.9. *Sea K una subdivisión de Δ^n . Entonces K es puro de dimensión n .*

Demostración. Sea σ un símplice de K . Dado que $|K| = |\Delta^n| \subset \text{span}(e_1, \dots, e_{n+1})$, y $\text{span}(e_1, \dots, e_{n+1})$ como espacio afín tiene dimensión n , σ no puede tener más de $n + 1$ vértices afinmente independientes, y por tanto su dimensión es menor o igual que n .

Sea S el complejo simplicial generado por los n -símplices de K ,

$$S = \{\tau \in K \mid \exists \sigma \in K, \dim(\sigma) = n, \tau \leq \sigma\}.$$

Puesto que $|K| = |\Delta^n|$, y $|\Delta^n|$ tiene dimensión n , debe haber al menos un símplice $\sigma \in K$ de dimensión n , luego S no es vacío. Veamos $|S| = |\Delta^n|$. En caso contrario, sea

$$H = \{(t_1, \dots, t_{n+1}) \mid t_1 + \dots + t_{n+1} = 1\}$$

el hiperplano afín en el que $|\Delta^n|$ está contenido. Sea también $U = |\Delta^n| \setminus |S|$ es un abierto no vacío de $|\Delta^n|$, y por tanto no puede estar contenido en la unión de los hiperplanos coordenados

$$\Pi = \{(t_1, \dots, t_{n+1}) | t_1 \cdots t_{n+1} = 0\}.$$

Por tanto $U \setminus \Pi = |\Delta^n| \setminus (\Pi \cup |S|)$ es un abierto no vacío de H , puesto que $|\Delta^n| \setminus \Pi$ es abierto (por ser la imagen continua de un abierto) y $|S|$ es cerrado en H . Sabemos asimismo que H es de dimensión n , y que $U \setminus \Pi$ por construcción debe estar contenido en la unión de las caras de dimensión menor que n de K . Esto es imposible por el Teorema de Baire.

Sea ahora $\tau \in K$ un d -símplice. Como $\tau \subset |S|$, $\tau = \tau \cap \bigcup_{\sigma \in S} \sigma = \bigcup_{\sigma \in S} \tau \cap \sigma$. Por tanto, necesariamente algún $\tau \cap \sigma$ debe tener dimensión d . Por definición de complejo simplicial, $\tau \cap \sigma$ debe ser una cara tanto de τ como de σ , y como tiene la misma dimensión que τ , necesariamente $\tau \cap \sigma = \tau$, por tanto τ es una cara de σ , como queríamos demostrar. \square

Proposición 2.10. *Sea K una subdivisión de Δ^n y τ un $(n-1)$ -símplice de K . Entonces, si $\tau \subset \sigma$ para algún $(n-1)$ -símplice σ de Δ^n , τ es una cara de un único n -símplice de K . En caso contrario, es una cara de exactamente dos n -símplices de K .*

Demostración. Sean v_1, \dots, v_n los vértices de τ . En el primer caso, alguna de las coordenadas de todos los v_i es nula. Puesto que K es puro de dimensión n existe un n -símplice σ tal que τ es una cara de σ , que tiene un vértice más, v_{n+1} . Puesto que los vértices deben ser afínmente independientes, la coordenada i -ésima de v_{n+1} debe ser no nula, y como está en σ^n , debe ser positiva. Sea σ' otro n -símplice que contiene a τ , con otro vértice v_{n+2} , que de nuevo tiene coordenada i -ésima positiva. Dado que la intersección $\sigma \cap \sigma'$ debe ser una cara de ambos y debe contener a τ , que también es una cara de ambos, la intersección es o bien τ , en el caso de que sea una cara $(n-1)$ -dimensional, o bien σ , si es una cara n -dimensional, y en este último caso $\sigma = \sigma'$. Puesto que $\{v_1, \dots, v_{n+2}\}$ es afínmente dependiente hay una combinación lineal afín nula

$$\sum_{j=1}^{n+1} \varepsilon_j \lambda_j v_j = 0,$$

donde $\varepsilon_j = \pm 1$ y $\lambda_j > 0$. Puesto que v_1, \dots, v_{n+1} son los vértices de σ , son afínmente independientes, y por tanto $\lambda_{n+2} \neq 0$. Como v_{n+1} y v_{n+2} son los únicos con coordenada i -ésima no nula, deben tener signo distinto, y $\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2} \neq 0$. Podemos suponer $\varepsilon_{n+1} = 1$, $\varepsilon_{n+2} = -1$. Asimismo, puesto que la suma de las coordenadas de v_i es 1 y la suma de las coordenadas de 0 es 0, obtenemos

$$\sum_{\varepsilon_j=1} \lambda_j = \sum_{\varepsilon_j=-1} \lambda_j.$$

Con esto podemos escribir dos combinaciones convexas de los vértices de σ y de σ' respectivamente que son iguales:

$$\sigma \setminus \tau \ni \frac{\sum_{\varepsilon_j=1} \lambda_j v_j}{\sum_{\varepsilon_j=1} \lambda_j} = \frac{\sum_{\varepsilon_j=-1} \lambda_j v_j}{\sum_{\varepsilon_j=-1} \lambda_j} \in \sigma' \setminus \tau.$$

Recordamos que estas combinaciones convexas no están en τ porque $\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2} \neq 0$. Por consiguiente, la posibilidad $\sigma \cap \sigma' = \tau$ queda descartada y obtenemos $\sigma \cap \sigma' = \sigma = \sigma'$. Con esto queda demostrada la unicidad.

Para el segundo caso trabajaremos en la topología relativa al hiperplano $x_1 + \dots + x_{n+1} = 1$. Como aclaración, cuando hablemos de otro hiperplano, será relativo a este, y por tanto tendrá codimensión 2 en \mathbb{R}^{n+1} . Comenzamos recordando que la frontera de $|\Delta^n|$ es la unión de los $(n-1)$ -símplices de Δ^n . Puesto que estamos en el segundo caso, τ no está completamente contenida en ningún $(n-1)$ -símplice de Δ^n , por tanto tiene un punto x que no está en ninguna.

En efecto, supongamos que τ tiene un punto x_1 y otro punto x_2 ambos en la frontera pero no hay ningún $(n-1)$ -símplices de Δ^n que los contenga a ambos. Entonces $\frac{x_1+x_2}{2}$ está en τ y no está en la frontera de $|\Delta^n|$: si $\frac{x_1+x_2}{2}$ estuviese en la frontera, una de sus coordenadas sería nula, y por tanto sería forzosamente nula tanto en x_1 como en x_2 , y por tanto sí que estarían ambos en el mismo $(n-1)$ -símplice de Δ^n .

Puesto que K es puro de dimensión n , sabemos que tiene al menos un n -símplice σ con $\tau \subset \sigma$. Sea H el hiperplano definido por τ , de ecuación $h(x) = a_1x_1 + \dots + a_{n+1}x_{n+1} = 0$, definimos $H^+ = \{x|h(x) > 0\}$, y $H^- = \{x|h(x) < 0\}$. De nuevo τ tiene vértices v_1, \dots, v_n que generan H , y σ tiene un vértice adicional, v_{n+1} . Puesto que $\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ son afinmente independientes, v_{n+1} no está en H , luego sin pérdida de generalidad $v_{n+1} \in H^+$. Todo entorno de un punto de τ contiene puntos x tanto en H^+ como en H^- arbitrariamente cerca. Puesto que todo símplice es cerrado, la distancia a ellos se alcanza, no obstante $|K|$ contiene puntos en H^- arbitrariamente cerca, por tanto debe haber otro n -símplice que contenga a τ y que no esté completamente contenido en H^+ , como lo está σ , al que llamaremos σ' . Este otro símplice tiene otro nuevo vértice que necesariamente está en H^- .

Llegados a este punto se trata sencillamente de repetir la demostración de la primera parte, para ver la unicidad tanto de σ como de σ' . La única diferencia es que en lugar de asumir que una coordenada es positiva, asumimos que $h(x) > 0$ o que $h(x) < 0$. \square

Tras estos resultados sobre Δ^n , introducimos el símplice que emplearemos como espacio de soluciones del problema de división $\frac{1}{2}$ y sobre el que se formula el Lema de Tucker.

Definición 2.11. Utilizamos la siguiente notación:

$$\Gamma^n = \{\text{conv}(\varepsilon_{i_1}e_{i_1}, \dots, \varepsilon_{i_k}e_{i_k}) \mid \varepsilon_{i_j} = \pm 1, 0 \leq k \leq n+1, 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n+1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Observamos que en el conjunto del cual hacemos la envolvente convexa nunca puede haber un par antipodal, y que además $\Gamma^n \cap \mathbb{R}_+^{n+1} = \sigma^n$, donde

$$\mathbb{R}_+^{n+1} = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \forall i, x_i \geq 0\}.$$

En otras palabras, $|\Gamma^n|$ es la bola cerrada unidad de \mathbb{R}^{n+1} para la norma $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n+1} |x_i| = 1$.

Proposición 2.12. *La esfera unidad euclídea*

$$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$$

y $|\Gamma^n|$ son homeomorfos.

Demostración. Lo son via el homeomorfismo

$$h : |\Gamma^n| \rightarrow \mathbb{S}^n : (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \frac{(x_1, \dots, x_{n+1})}{\|(x_1, \dots, x_{n+1})\|}.$$

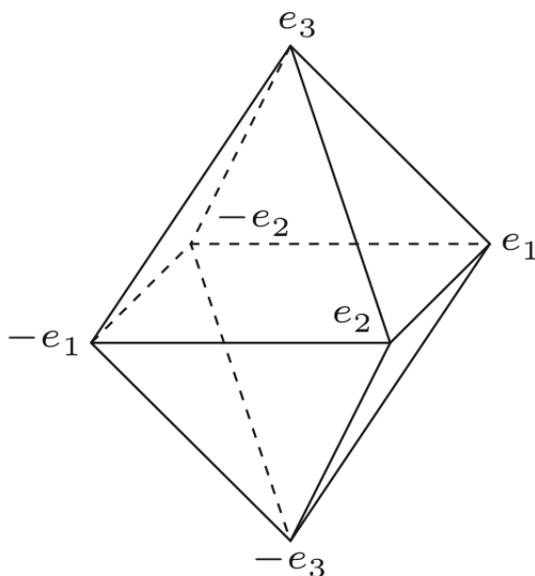


FIGURA 3. $|\Gamma^n|$

Este homeomorfismo lo que hace es ajustar la norma de cada punto de $|\Gamma^n|$ para que esté en la esfera unidad. Para ver que es un homeomorfismo nos basta proporcionar la transformación inversa, también continua, que de nuevo es tan sólo ajustar la norma, aunque esta vez la norma 1,

$$h^{-1} : \mathbb{S}^n \rightarrow |\Gamma^n| : (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \frac{(x_1, \dots, x_{n+1})}{\|(x_1, \dots, x_{n+1})\|_1}.$$

□

Proposición 2.13. *Sea K una subdivisión de Γ^n y τ un $(n - 1)$ -símplice de K . Entonces τ es faceta de exactamente dos n -símplices. Además, si la coordenada i -ésima de todos los vértices de τ es nula, en uno de estos símplices es siempre mayor o igual que cero, y en el otro menor o igual que cero.*

Demostración. Puesto que podemos hacer simetrías respecto a los hiperplanos coordenados, sin pérdida de generalidad, $\tau \subset \sigma^n$. Si τ no está contenido en ningún $(n - 1)$ -símplice de Δ^n , aplicando la proposición 2.10 es cara de dos n -símplices. No es cara de ninguno más porque puesto que τ no está contenido en el borde, luego para todas las coordenadas hay alguno de los vértices que tiene esa coordenada estrictamente positiva, y por tanto τ no pertenece a ninguna envolvente convexa de Γ^n que no sea σ^n .

El caso de que τ está contenido en el borde, se da si y sólo si para algún i todos sus vértices tienen la coordenada i -ésima nula. Además es el único índice con esta propiedad por dimensionalidad. Aplicando de nuevo 2.10 es cara de un único n -símplice contenido en σ^n . Observamos que si aplicamos la simetría respecto al hiperplano $x_i = 0$,

$$(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n + 1) \mapsto (x_1, \dots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, \dots, x_n + 1)$$

todo lo que hemos observado se sigue cumpliendo, y por tanto τ es cara de otro n -símplice contenido en la imagen por esa simetría de σ^n , el único contenido en esa imagen, y por tanto el único tal que sus vértices tienen todas las coordenadas positivas salvo la i -ésima negativa. Estos dos son los únicos n -símplices de los que τ es cara, porque como todas las coordenadas de τ salvo la i -ésima son positivas, τ no está contenido en ninguna envolvente convexa n -dimensional de Γ que no tenga todas las coordenadas salvo la i -ésima positivas. \square

La última definición de este apartado es la subdivisión baricéntrica, prácticamente la única subdivisión de Δ^n que emplearemos.

Definición 2.14. La *subdivisión baricéntrica* de un n -símplice σ consta de $(n+1)!$ símplices, y se define como

$$\text{sd } \sigma = \left\{ \text{conv}(v_0, \dots, v_n) \left| v_i = \frac{1}{i+1} \sum_{k=0}^i \pi(x_k), \pi \in S_{n+1} \right. \right\},$$

donde $\text{vert}(\sigma) = \{x_0, \dots, x_n\}$, y S_{n+1} es el grupo de las permutaciones de $n+1$ elementos, en este caso del conjunto $\{0, \dots, n\}$.

Denotamos la subdivisión baricéntrica iterada de un símplice σ recursivamente: $\text{sd}^0 \sigma = \sigma$, $\text{sd}^{n+1} \sigma = \text{sd } \text{sd}^n \sigma$.

La *subdivisión baricéntrica* de un complejo simplicial Δ se define como el complejo simplicial formado por las caras de los símplices de las subdivisiones baricéntricas de los símplices de Δ :

$$\text{sd } \Delta = \cup_{\sigma \in \Delta} \{ \tau \leq \sigma' \mid \sigma' \in \text{sd } \sigma \}.$$

La subdivisión baricéntrica iterada se define de forma análoga al caso de un símplice.

Por último introducimos una propiedad vital de la subdivisión baricéntrica, de hecho es el único motivo por el que vamos a emplear esta subdivisión y no cualquier otra. La necesitaremos para demostrar el Teorema de punto fijo de Brouwer mediante el Lema de Sperner y para construir el algoritmo que permite encontrar una solución libre de envidia.

Proposición 2.15. *El diámetro de un símplice $\sigma = \text{conv}(\{v_1, \dots, v_n\})$ se alcanza entre dos vértices.*

Demostración. Sean $x, y \in \sigma$. El punto y es una combinación convexa de los vértices de σ , por tanto podemos escribir

$$y = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1,$$

y por tanto,

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= \left\| x - \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i (x - v_i) \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \|x - v_i\| \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \|x - v\| \leq \|x - v\|. \end{aligned}$$

Obtenemos la segunda igualdad aprovechando que la suma de los λ_i es 1, la tercera aplicando la desigualdad triangular y que $\lambda_i \geq 0$. La primera desigualdad resulta al tomar v el vértice en el que la distancia $\|x - v\|$ es máxima. El último paso es de nuevo consecuencia de que los λ_i suman 1.

Sean ahora $x' = v$ y $y' = x$. Aplicando lo que acabamos de demostrar, $\|x' - y'\| \leq \|x' - v'\|$ para cierto vértice v' . Por tanto $\|x - y\| \leq \|v - v'\|$. \square

Proposición 2.16. *La subdivisión baricéntrica disminuye el diámetro máximo de las caras de un complejo simplicial por un factor de al menos $\frac{n}{n+1}$,*

$$\max_{\sigma} \text{diam}(\sigma) \leq \frac{n}{n+1} \max_{\tau} \text{diam}(\tau),$$

donde σ es una cara de $\text{sd } \Delta$ y τ es una cara de Δ .

En consecuencia,

$$\max_{\sigma} \text{diam}(\sigma) \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^k \max_{\tau} \text{diam}(\tau),$$

donde σ es una cara de $\text{sd}^k \Delta$ y τ es una cara de Δ .

Demostración. Aplicando la proposición previa, sólo debemos preocuparnos por la distancia entre los vértices. Sean v_i y v_j vértices de la subdivisión baricéntrica de un símplice σ , con $i \leq j$. Entonces,

$$\begin{aligned} \|v_i - v_j\| &= \left\| \frac{1}{i+1} \sum_{k=0}^i \pi(x_k) - \frac{1}{j+1} \sum_{k=0}^j \pi(x_k) \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{(i+1)(j+1)} \sum_{k_1=0}^i (j-i)\pi(x_{k_1}) - \frac{1}{(i+1)(j+1)} \sum_{k_2=i+1}^j (i+1)\pi(x_{k_2}) \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{(i+1)(j+1)} \sum_{(k_1, k_2)} (\pi(x_{k_1}) - \pi(x_{k_2})) \right\| \\ &\leq \frac{1}{(i+1)(j+1)} \sum_{(k_1, k_2)} \|\pi(x_{k_1}) - \pi(x_{k_2})\| \\ &\leq \frac{(i+1)(j-i)}{(i+1)(j+1)} \text{diam}(\sigma) \leq \frac{j}{j+1} \text{diam}(\sigma) \leq \frac{n}{n+1} \text{diam}(\sigma). \end{aligned}$$

Obtenemos la primera igualdad por definición de subdivisión baricéntrica, tan sólo sustituimos cada uno de los vértices por su expresión. Para llegar a la segunda, extraemos de la segunda suma los índices desde 0 hasta i y los introducimos en la primera suma. La tercera igualdad es un poco más sutil, se obtiene reordenando bien todos los sumandos.

La primera desigualdad es la desigualdad triangular, y la segunda la definición de diámetro. La tercera desigualdad es observar que $i \geq 0$, y la cuarta y última es porque $\frac{j}{j+1} = 1 - \frac{1}{j+1} \leq 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$. \square

3. LEMA DE SPERNER

En esta sección demostraremos un teorema de naturaleza combinatoria que como veremos es equivalente al Teorema de punto fijo de Brouwer. En esta y otras demostraciones

de geometría combinatoria se construye a un grafo auxiliar y se usa la siguiente propiedad básica.

Observación 3.1. Un *grafo* es un conjunto V de *vértices* conectados por *aristas*, que son a su vez pares de vértices. El *grado* de un vértice es el número de aristas que lo contienen.

El número de vértices de grado impar de un grafo es par.

Demostración. La suma de los grados de todos los vértices es exactamente el doble del número de aristas del vértice, puesto que cada arista la contamos una vez para cada uno de sus vértices. Tomando módulo 2 en la suma de los grados de los vértices, todos los vértices de grado par desaparecen, y queda un 1 por cada vértice de grado impar. Como la suma es par, módulo 2 debe ser 0, por tanto necesariamente hay un número par de sumandos. \square

Pasemos ya a establecer la terminología necesaria para enunciar el Lema de Sperner. A partir de ahora denotaremos $[n] = \{1, \dots, n\}$. En todo lo que sigue consideramos *un complejo simplicial K que es una subdivisión K del símplice σ^n* .

Definición 3.2. Un *etiquetado* del complejo simplicial K es una función $\lambda : \text{vert}(K) \rightarrow \mathbb{Z}$.

Decimos que un n -símplice σ de K está *totalmente etiquetado* si todos los elementos de $[n + 1]$ son la etiqueta de un vértice. Esto implica que sus $n + 1$ vértices tienen todas etiquetas distintas y cada uno de los elementos de $[n + 1]$ es la etiqueta de exactamente un vértice.

Definición 3.3. Un *etiquetado* λ del complejo simplicial K se denomina de Sperner si para todo vértice v , $v_{\lambda(v)} \neq 0$.

Proposición 3.4 (Lema de Sperner). *Sea $\lambda : \text{vert}(K) \rightarrow [n + 1]$ un etiquetado de Sperner del complejo simplicial K . Entonces existe al menos un n -símplice totalmente etiquetado en K .*

De hecho, el número de n -símplices totalmente etiquetados es impar.

Demostración. Demostraremos el teorema realizando inducción sobre n .

En el caso $n = 1$, el símplice es un segmento con un extremo etiquetado con un 1 y el otro etiquetado con un 2. Por tanto podemos empezar en el extremo con el 1 e ir avanzando, y encontraremos cierto número de vértices etiquetados con 1s hasta encontrar el primero con un 2. El símplice formado por el último vértice etiquetado con un 1 y el primer vértice etiquetado con un 2 está totalmente etiquetado. Si ahora empezamos por este primer vértice etiquetado por 2 y procedemos análogamente, o bien alcanzamos el extremo de todo el segmento y hay un sólo símplice totalmente etiquetado, es decir un número impar, o bien encontramos un primer vértice etiquetado por 1, obteniendo un segundo símplice totalmente etiquetado. Como este segundo símplice totalmente etiquetado termina con etiqueta 1, y la última de todas las etiquetas es 2, al repetir el proceso encontraremos necesariamente un tercer símplice totalmente etiquetado. Es claro que de este modo enumeramos todos símplices totalmente etiquetados y el proceso termina con un número impar de ellos.

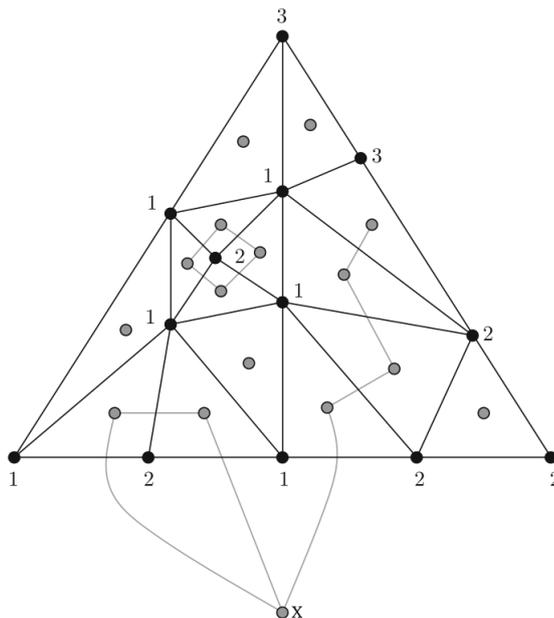


FIGURA 4. Ejemplo del grafo asociado al etiquetado de Sperner

Ahora sea $n \geq 2$. Consideramos la cara $(n - 1)$ -dimensional σ^{n-1} de Δ^n dada por la envolvente convexa de e_1, \dots, e_n , y denominamos K' al complejo simplicial formado por los n -símplices de K contenidos en σ^{n-1} . El etiquetado λ induce por restricción a K' un etiquetado de Sperner λ' con etiquetas en $[n]$, porque λ es de Sperner y para todo vértice v de K' , su última componente es $v_{n+1} = 0$.

Consideramos el siguiente grafo. Los vértices son todos los n -símplices σ de K más un vértice extra X . El vértice X está conectado en el grafo a cada n -símplice que tenga una cara $(n - 1)$ -dimensional τ en K' totalmente etiquetada. Dos n -símplices están conectados si y sólo si comparten una cara $(n - 1)$ -dimensional totalmente etiquetada.

En primer lugar, X tiene grado impar.

En efecto, por hipótesis de inducción, hay un número impar de $(n - 1)$ -símplices τ totalmente etiquetados en el etiquetado λ' de K' , y aplicando la proposición 2.10 cada uno de ellos es una cara $(n - 1)$ -dimensional de un único n -símplice σ de K . Además estos n -símplices son todos diferentes, esto es, no se da el caso de que dos $(n - 1)$ -símplices τ_1, τ_2 sean cara del mismo n -símplice σ .

El motivo es que τ_1 y τ_2 están contenidos en σ^{n-1} , que al ser $(n - 1)$ -dimensional el número máximo de vértices afínmente independientes en él es n . Si tal σ existiera, sus $n + 1$ vértices serían necesariamente los vértices de τ_1 y τ_2 , porque cada uno de ellos tiene n vértices y $\tau_1 \neq \tau_2$, y por tanto σ también estaría en σ^{n-1} y por tanto sus vértices no serían afínmente independientes, lo cual contradice la definición de símplice.

Todos los demás vértices tienen grado 0, 1 o 2. Para demostrar esto, contaremos el número de caras $(n - 1)$ -dimensionales totalmente etiquetadas de cada símplice. Consideramos las etiquetas de los vértices de los n -símplices y hacemos la siguiente distinción de casos:

- Si la imagen por λ de los vértices de un n -símplice σ no contiene a $[n]$, entonces la de sus caras tampoco, por tanto no tiene ninguna cara $(n-1)$ -dimensional totalmente etiquetada y σ tiene grado $\deg(\sigma) = 0$.
- Si la imagen de los vértices de un n -símplice σ es $[n+1]$, entonces la única cara $(n-1)$ -dimensional τ totalmente etiquetada es la única que no contiene al vértice con etiqueta $n+1$, porque $n+1 \notin [n]$. Hacemos una distinción de casos adicional:
 - Si τ está en el borde, como τ está totalmente etiquetada, la coordenada $(n+1)$ -ésima de todos sus vértices es nula, luego $\tau \in K'$ y σ está conectado en el grafo únicamente a X .
 - Si τ no está en el borde, aplicando la proposición 2.10 es cara de exactamente dos n -símplices, luego σ está conectado en el grafo únicamente a este otro símple.

Por consiguiente, σ tiene grado 1.

- Si la imagen es $[n]$, entonces hay dos vértices con la misma etiqueta. Las dos únicas caras $(n-1)$ -dimensionales τ, τ' totalmente etiquetadas son las que no contienen a uno de los dos vértices con la etiqueta repetida. De nuevo distinguimos dos casos:
 - τ o τ' está en la frontera de σ^n . Sólo una de las dos puede estar en K' puesto que como vimos al calcular el grado de X no puede haber un n -símplice de K con dos caras $(n-1)$ -dimensionales totalmente etiquetadas en K' . De esta manera, si τ está en el borde, σ se conecta a X , y entonces τ' es la cara de otro σ' , al que σ se conecta también. Ya no hay más caras con las que σ se conecte.
 - Si ni τ ni τ' están en el borde, aplicando de nuevo la proposición 2.10 cada una de ellas a cara de otro n -símplice. Estos dos n -símplices son distintos porque de ser el mismo compartiría con σ al menos $n+1$ vértices, esto es, todos. En suma σ está conectado en el grafo exactamente a esos dos n -símplices.

Por consiguiente, el símple σ tiene grado 2.

Esto quiere decir que los vértices con grado impar que no sean X son los vértices totalmente etiquetados. Dado que un grafo tiene un número par de vértices de grado impar y X tiene grado impar, hay un número impar de n -símplices totalmente etiquetados. \square

Hemos escogido esta prueba del Lema de Sperner porque tiene asimismo una utilidad algorítmica: si recorremos el grafo empezando en el vértice X en algún momento llegaremos a un símple de grado 1, que es un símple totalmente etiquetado. No obstante no podemos proporcionar ninguna garantía de que este método sea mejor que recorrer todos los símplices posibles por fuerza bruta.

Como ya adelantamos al comienzo de la sección, el Lema de Sperner no es un mero resultado combinatorio, pues de hecho es equivalente al Teorema de punto fijo de Brouwer. Esto quiere decir que hay una prueba directa de cada uno de los dos resultados empleando el otro.

Demostración del Teorema de Punto Fijo de Brouwer usando el Lema de Sperner. Dado que la bola cerrada unidad \mathbb{B}^n y $|\Delta^n|$ son homeomorfos por 2.8, basta probar el Teorema del punto fijo para una aplicación continua $f : |\Delta^n| \rightarrow |\Delta^n|$.

Consideramos las subdivisiones baricéntricas iteradas $\text{sd}^k \Delta^n$, $k \geq 1$. Si para algún k alguno de los vértices es un punto fijo, entonces f en efecto tiene un punto fijo y hemos

terminado. Si este no fuese el caso, podemos equipar $\text{sd}^k \Delta^n$ con un etiquetado λ tal que:

$$(f(v) - v)_{\lambda(v)} < 0$$

En efecto, como $f(v)$ y v están en $|\Delta^n|$, las sumas de sus coordenadas son 1, luego la de las coordenadas de $f(v) - v$ es 0. Como $f(v) \neq v$ alguna de las coordenadas de $f(v) - v$ debe ser negativa. Además v no es un punto fijo, por lo que alguna de las coordenadas de $f(v) - v$ debe ser negativa. Este etiquetado es claramente un etiquetado de Sperner, dado que si $v_i = 0$ entonces $(f(v) - v)_i = f(v)_i \geq 0$.

Asimismo, aplicando el Lema de Sperner hay al menos un símplice totalmente etiquetado σ_k , con baricentro x_k . Dado que estamos en un compacto, la sucesión x_k tiene al menos un punto de acumulación x . Puesto que σ_k está totalmente etiquetado, para todo i hay un vértice de σ_k , v , tal que $(f(v) - v)_i < 0$. Asimismo la distancia de los vértices de σ_k a x_k decrece de forma exponencial en k porque el diámetro de σ_k es menor o igual que $(\frac{n}{n+1})^k \text{diam}(|\Delta^n|)$. Es decir, los vértices también se acumulan a x . Como estamos en un compacto f es uniformemente continua, luego para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $\|z - y\| < \delta$ entonces $\|f(z) - f(y)\| < \varepsilon$. Por tanto para todo $\varepsilon > 0$ existe un k tal que para el vértice v de σ_k tal que $(f(v) - v)_i < 0$, $\|f(x_k) - f(v)\| < \varepsilon$, por tanto $(f(x) - x)_i \leq 0$. Si añadimos el hecho de que por estar tanto x como $f(x)$ en $|\Delta^n|$,

$$\sum_{i=1}^{n+1} (f(x) - x)_i = \sum_{i=1}^{n+1} f(x)_i - \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0,$$

nos da $f(x)_i = x_i$ para todo i , y por tanto $f(x) = x$. □

De este modo tenemos demostrados ambos resultados. Pero como ya hemos dicho, en realidad son equivalentes:

Demostración del Lema de Sperner usando el Teorema de punto fijo de Brouwer. Sea $\lambda : \text{vert}(K) \rightarrow [n+1]$ un etiquetado de Sperner de una triangulación K de Δ^n . Construimos la función continua $f : |\Delta^n| \rightarrow |\Delta^n|$ como la extensión lineal afín de la aplicación simplicial de K a Δ^n definida en los vértices de K de la siguiente forma:

$$v \mapsto e_j, \quad j \equiv \lambda(v) + 1 \pmod{n+1}$$

Aplicando el Teorema de punto fijo de Brouwer sabemos que f tiene al menos un punto fijo x . Sabemos que x es una combinación convexa de una serie de vértices v_k ,

$$x = \sum_{k=1}^d \lambda_k v_k$$

para cierto d , en la cual podemos tomar $\lambda_k > 0$. Como $x_i = 0$ y las coordenadas de los v_k son positivas por estar en $|\Delta^n|$, la coordenada i -ésima de todo v_k es nula. Por definición de f ,

$$f(x) = \sum_{k=1}^d \lambda_k f(v_k) = \sum_{k=1}^d \lambda_k e_{\lambda(v_k)+1} \pmod{n+1}$$

Tenemos $f(v_k) = e_j$ si y sólo si $\lambda(v_k) + 1 \equiv j \pmod{n+1}$, que junto con $j \equiv i + 1 \pmod{n+1}$ implica $\lambda(v_k) \equiv i \pmod{n+1}$, lo cual, dado que ambos son menores que $n+1$,

se da si y sólo si $\lambda(v_k) = i$. Esto significa que podemos escribir

$$f(x)_j = \sum_{k=1}^d \lambda_k \delta_{i, \lambda(v_k)}$$

donde usamos la δ de Kronecker, $\delta_{i,i} = 1$, $\delta_{i,j} = 0$ para $i \neq j$. Veamos que $x = (x_1, \dots, x_{n+1})$ no puede estar en la frontera de $|\Delta^n|$, esto es, que no puede haber ningún índice i tal que $x_i = 0$. Si x estuviese en la frontera de $|\Delta^n|$, sea i un índice tal que $x_i = 0$, $x_j \neq 0$, con $j \equiv i + 1 \pmod{n+1}$ (siempre hay un índice así porque $x \neq 0$). Sabemos que $(v_k)_i = 0$, luego $\lambda(v_k) \neq i$ por ser λ un etiquetado de Sperner, con lo cual $f(x)_j = 0$. Esto contradice que x sea un punto fijo, pues habíamos escogido j tal que $x_j \neq 0$.

Por tanto tenemos un punto fijo x que no está en la frontera de $|\Delta^n|$, y por tanto ninguna de sus coordenadas es nula. En particular, para la coordenada j -ésima tenemos

$$0 \neq f(x)_j = \sum_{k=1}^d \lambda_k \delta_{i, \lambda(v_k)},$$

luego existe un vértice v_k con $\lambda(v_k) = i$, con $j \equiv i + 1 \pmod{n+1}$. Por tanto, el símplice en el que se encuentra x está totalmente etiquetado \square

4. DIVISIÓN JUSTA Y LIBRE DE ENVIDIA

La división justa tiene una solución bastante simple. Recordamos nuestro modelo: tratamos de dividir el intervalo $I = [0, 1]$ de acuerdo con medidas continuas de probabilidad que pueden tomar valores negativos μ_i , $1 \leq i \leq n$. Sea t el menor valor tal que existe un i para el cual $\mu_i([0, t]) = \frac{1}{n}$:

$$t = \inf \{ t \in [0, 1] \mid \exists i \in [n], \mu_i([0, t]) = \frac{1}{n} \}.$$

Este t existe porque la función $t \mapsto \mu_i([0, t])$ es continua para todo i , en 0 vale 0 y en 1 vale 1, y por tanto toma todos los valores intermedios. Esto quiere decir que para todas las demás personas el intervalo $[t, 1]$ tiene valor al menos $\frac{n-1}{n}$, pues para j distinto de i y por definición de t , si $\mu_j([0, t]) > \frac{1}{n}$, entonces de nuevo por continuidad sería $\mu_j([0, t']) = \frac{1}{n}$ para cierto $t' < t$, lo cual contradice la definición de t .

Damos a la persona i el intervalo $[0, t]$ y repartimos el resto inductivamente entre los demás.

Esta solución realiza $n - 1$ cortes, claramente el menor número posible, y es conocida como el algoritmo del cuchillo (*moving knife algorithm*).

Pero podemos obtener también una solución libre de envidia. Vamos a exhibir una y a dar un algoritmo para la aproximación de soluciones libres de envidia también realizando únicamente $n - 1$ cortes.

Una división puede ser algo mucho más complicado que dividir el intervalo en n trozos, pero nos restringiremos a este tipo de divisiones puesto que bastan para encontrar una división libre de envidia, y es posible que la división del pastel fuese también costosa. Por ejemplo si en lugar de algo tan trivial como un pastel estuviésemos repartiendo la explotación industrial de cierta región por varias empresas, y cada área de explotación conllevase

ciertos gastos fiscales. Consideraremos únicamente el caso particular $A_i = [l_{i-1}, l_i]$. De hecho emplearemos la siguiente notación para los A_i :

Una división del intervalo unidad en n trozos queda unívocamente determinada por el vector $v = (t_1, \dots, t_n)$ de las longitudes de los intervalos en los que queda dividido,

$$I_i^v = [l_{i-1}^v, l_i^v], \quad l_i^v = \sum_{j=1}^i t_j,$$

para $1 \leq i \leq n$. Por supuesto la suma vacía l_0^v es 0.

Si permitimos intervalos de longitud 0, todos los posibles vectores de longitudes forman el $(n-1)$ -símplice σ^{n-1} .

Lema 4.1. *Cualquier subdivisión baricéntrica iterada $\text{sd}^k \Delta^{n-1}$ ($k \geq 1$) tiene un etiquetado $p : \text{vert}(\text{sd}^k \Delta^{n-1}) \rightarrow [n]$ tal que todo $(n-1)$ -símplice está totalmente etiquetado.*

Demostración. Por definición de subdivisión baricéntrica, todo vértice v' de $\text{sd}^k \Delta^{n-1}$ responde a la fórmula

$$v' = \frac{1}{i+1} \sum_{k=0}^i v_k$$

para ciertos vértices v_k que pertenecen al mismo $(n-1)$ -símplice de $\text{sd}^{k-1} \Delta^{n-1}$. Esta expresión es única dado que los vértices de un símplice son afinmente independientes, en particular el número de sumandos es único. Entonces el etiquetado

$$p : \text{vert}(\text{sd}^k \Delta^{n-1}) \rightarrow [n] : v' \mapsto i$$

es un etiquetado tal que todo $(n-1)$ -símplice está totalmente etiquetado, porque cada vértice es la media de un número distinto de sumandos. \square

Teorema 4.2. *Existe un algoritmo que permite calcular una solución libre de envidia aproximada para cualquier ε . Este algoritmo converge, esto es, la sucesión de las soluciones para $\varepsilon = \frac{1}{m}$ converge a una solución exacta.*

Demostración. Sea $\text{sd}^k \Delta^{n-1}$ una subdivisión baricéntrica, y $p : \text{vert}(\text{sd}^k \Delta^{n-1}) \rightarrow [n]$ un etiquetado tal que todo $(n-1)$ -símplice esté totalmente etiquetado.

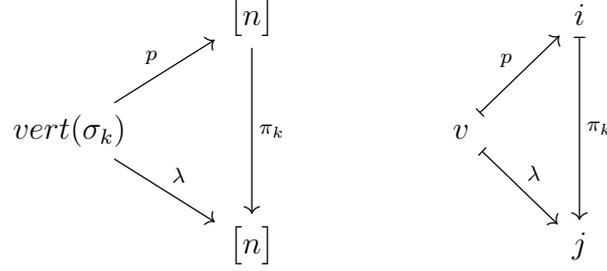
Consideramos el vértice $v = (t_1, \dots, t_n)$ de $\text{sd}^k \Delta^{n-1}$ cuya etiqueta denotamos $p(v) = i$; este v corresponde a una partición (I_1^v, \dots, I_n^v) como se explicó previamente. Sea $\lambda(v)$ el índice j donde $\mu_i(I_j^v)$ alcanza el máximo, o en caso de haber varios, uno cualquiera de ellos. En otras palabras, $\lambda(v)$ es el número de un trozo que es el más grande para la persona i . Adicionalmente, puesto que si $t_j = \text{long}(I_j^v)$ es 0 entonces $\mu_i(I_j^v) = 0$, y dado que

$$\mu_{i_0}(I_1^v) + \dots + \mu_i(I_n^v) = 1$$

es imposible que todos sean menores o iguales que 0, tenemos $0 \neq t_j = v_j$, y así $v_{\lambda(v)} \neq 0$. Por tanto λ es un etiquetado de Sperner.

Aplicando el lema de Sperner obtenemos un $(n-1)$ -símplice σ_k totalmente etiquetado. Dado que σ_k está totalmente etiquetado respecto tanto a p como a λ , p y λ son biyecciones

entre los vértices de σ_k y $[n]$. Componiendo una biyección y la inversa de la otra obtenemos la permutación $\pi_k : [n] \rightarrow [n]$ de la forma siguiente:



Sabemos que para cualesquiera i, i' , se cumple $\mu_i(I_{\pi_k(i)}^v) \geq \mu_{i'}(I_{\pi_k(i')}^v)$ por definición de π_k y de λ . Esto se puede traducir en que cada persona i prefiere el trozo $\pi_k(i)$.

Sea x_k el baricentro de σ_k . Por 2.16 sabemos que

$$|(x_k)_j - v_j| \leq \|x_k - v\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

y por tanto para todo $\delta > 0$ hay un N tal que para todo $k \geq N$, para todo j y para todo v vértice de σ_k , $|(x_k)_j - v_j| < \delta$. Además dado que las funciones μ_i son continuas y las evaluamos en conjuntos compactos, son uniformemente continuas. Esto significa que dado un ε podemos fijar un δ (y por tanto un N) a partir del cual

$$|\mu_i(I_j^{x_k}) - \mu_i(I_j^v)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

y por tanto usando usando que $\mu_i(I_{\pi_k(i)}^v) \geq \mu_{i'}(I_{\pi_k(i')}^v)$, tomando v el vértice de σ_k que tiene $p(v) = i$, para cualquier otro i' ,

$$\begin{aligned} & \mu_i(I_{\pi_k(i')}^{x_k}) - \mu_i(I_{\pi_k(i)}^{x_k}) \\ &= \mu_i(I_{\pi_k(i')}^{x_k}) - \mu_i(I_{\pi_k(i')}^v) + \mu_i(I_{\pi_k(i')}^v) - \mu_i(I_{\pi_k(i)}^v) + \mu_i(I_{\pi_k(i)}^v) - \mu_i(I_{\pi_k(i)}^{x_k}) \\ &\leq |\mu_i(I_{\pi_k(i')}^{x_k}) - \mu_i(I_{\pi_k(i')}^v)| + \mu_i(I_{\pi_k(i')}^v) - \mu_i(I_{\pi_k(i)}^v) + |\mu_i(I_{\pi_k(i)}^v) - \mu_i(I_{\pi_k(i)}^{x_k})| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

y por consiguiente

$$\mu_i(I_{\pi_k(i)}^{x_k}) \geq \mu_i(I_{\pi_k(i')}^{x_k}) - \varepsilon,$$

luego la división $(I_1^{x_k}, \dots, I_n^{x_k}; \pi_k)$ es una división ε -aproximada.

Para calcular la división exacta consideramos la sucesión (x_k) que da la solución ε -aproximada para $\varepsilon = \frac{1}{k}$. Por compacidad tiene una subsucesión convergente, (x_{k_l}) . Dado que el número de permutaciones de $[n]$ es finito, podemos tomar la subsucesión de forma que las permutaciones π_{k_l} sean constantes, $\pi_{k_l} = \pi$. Sea

$$(t_1, \dots, t_n) = x = \lim_{l \rightarrow \infty} x_{k_l}$$

La división asociada $(I_1^x, \dots, I_n^x; \pi)$ es la solución libre de envidia que deseábamos, pues como las μ_i son continuas,

$$\mu_i(I_{\pi(i)}^x) \geq \mu_{i'}(I_{\pi(i')}^x).$$

□

5. LEMA DE TUCKER

En esta sección demostraremos el Lema de Tucker y explicaremos su relación con el Teorema de Borsuk-Ulam. De la misma forma que el Lema de Sperner es el equivalente combinatorio del Teorema de punto fijo de Brouwer, el Lema de Tucker es el equivalente combinatorio de Teorema de Borsuk-Ulam.

El Lema de Tucker se centra en la relación entre los puntos y sus antípodas, especialmente para los vértices. No obstante para ello primero debemos asegurarnos de que las antípodas de los vértices existan.

Definición 5.1. Utilizamos la siguiente notación: $[\pm m] = \{\pm 1, \dots, \pm m\}$.

Decimos que una subdivisión K de un complejo simplicial Δ es *antipodal* si para todo vértice v de K , $-v$ también es un vértice de K . En ese caso, un etiquetado $\lambda : \text{vert}(K) \rightarrow [\pm m]$ es *antipodal* si para todo vértice v , $\lambda(v) = -\lambda(-v)$.

Entonces, un d -símplice es *(+)-alternante* si tiene etiquetas $\{+j_0, -j_1, \dots, (-1)^d j_d\}$, y es *(-)-alternante* si tiene etiquetas $\{-j_0, +j_1, \dots, (-1)^{d+1} j_d\}$, donde $1 \leq j_0 < j_1 < \dots < j_d \leq m$. Si un símplice es *(+)-alternante* o *(-)-alternante*, decimos que es *alternante*.

En otras palabras, para que sea alternante queremos que todas las etiquetas tengan distinto valor absoluto, y que al recorrer los vértices en orden creciente de valor absoluto de sus etiquetas, los signos de esas etiquetas sean alternantes, empezando por $+$ para *(+)-alternante* o por $-$ para *(-)-alternantes*.

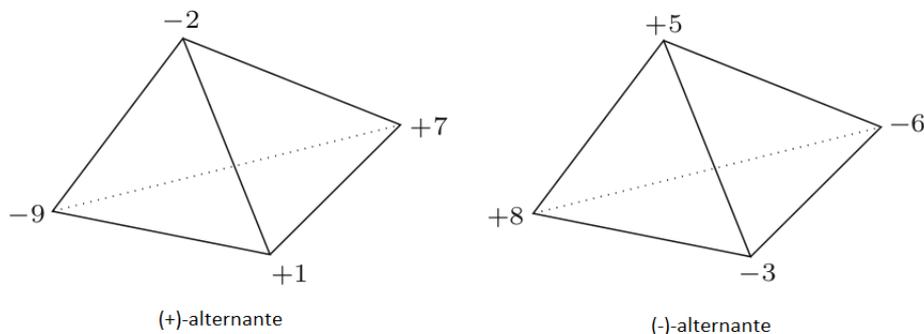


FIGURA 5. Símplices alternantes

Sea K una subdivisión antipodal de un complejo simplicial Δ y $\lambda : \text{vert}(K) \rightarrow [\pm m]$ un etiquetado antipodal. Sea asimismo $\varepsilon = \pm 1$. Decimos que un d -símplice es ε -*casi-alternante* si no es alternante pero tiene una cara de dimensión $d - 1$, esto es, una faceta, que es ε -alternante.

Sea Δ un complejo simplicial, y $\lambda : \text{vert}(\Delta) \rightarrow [\pm m]$ un etiquetado. Decimos que una arista de Δ , es decir, una cara 1-dimensional $\text{conv}(u, v)$, es una *arista complementaria* si $\lambda(u) + \lambda(v) = 0$.

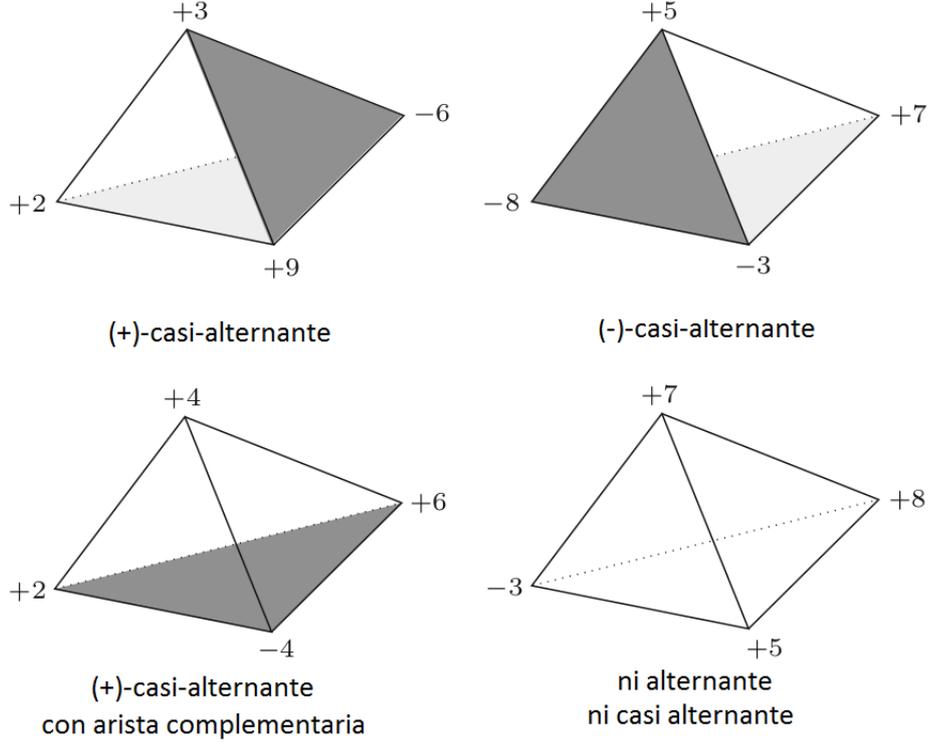


FIGURA 6. Símplices casi-alternantes

Proposición 5.2. Sean K una subdivisión antipodal de Γ^n y $\lambda : \text{vert}(K) \rightarrow [\pm m]$ un etiquetado antipodal sin aristas complementarias. Sea asimismo σ un d -símplice ε -casi-alternante. Entonces σ no es $(-\varepsilon)$ -casi-alternante. Además, σ tiene exactamente dos facetas ε -alternantes.

Demostración. Sean v_k los vértices de σ y j_k los valores absolutos de sus respectivas etiquetas, ordenados de forma creciente, esto es, $1 \leq j_0 \leq \dots \leq j_d \leq m$. Sea τ una faceta ε -alternante de σ , y v_i el único vértice que σ no contiene. Distinguiamos los siguientes casos:

- $i = 0$ o $i = d$. Entonces $\lambda(v_i)$ tiene el mismo signo que $\lambda(v_{i'})$ con $i' = 1$ o $i' = d - 1$ respectivamente, porque si no σ sería $(-\varepsilon)$ -alternante o (ε) -alternante respectivamente. Nuestro σ no puede tener únicamente un vértice porque entonces sería trivialmente alternante, y si tiene dos entonces cada una de las dos facetas es en efecto ε -alternante y hemos terminado. Si este no es el caso y σ tiene más de dos vértices, sea $i'' = 3$ o $i'' = d - 2$.
- $i \neq 0$ y $i \neq d$. Por ser τ alternante, $\lambda(v_{i-1})$ y $\lambda(v_{i+1})$ tienen distinto signo, y por tanto $\lambda(v_i)$ tendrá el mismo signo que alguno de los dos, al que denominamos $v_{i'}$ ($i' = i - 1$ o $i' = i + 1$). Sea $i'' = i + 1$ o $i'' = i - 1$ respectivamente.

Entonces las únicas facetas alternantes son las que no contienen a v_i o a $v_{i'}$, porque si contienen a ambos tendrían dos etiquetas con valores absolutos consecutivos pero con

el mismo signo. Para ver que estas dos facetas son en efecto ε -alternantes, τ lo es por hipótesis, y la otra lo es porque dado que $\lambda(v_i)$ y $\lambda(v_{i''})$ tienen signos distintos y λ es un etiquetado libre de aristas complementarias, $j_i \neq j_{i''}$. Por tanto podemos sustituir en la cadena $1 \leq j_0 < j_1 < \dots < j_{i-1} < j_{i+1} < \dots < j_d \leq m$ la etiqueta j_i por $j_{i''}$ y seguirá siendo una cadena de desigualdades estrictas, y los signos de las etiquetas seguirán siendo alternantes. \square

El requisito de que no haya aristas complementarias es indispensable, un contraejemplo de dimensión 1 con aristas complementarias es:



FIGURA 7. Un s3mplice (+)-casi-alternante y (-)-casi-alternante

En este caso cada una de las facetas es un 3nico v3rtice, por lo que son alternantes, y dado que las etiquetas tienen distinto signo, ser3a tanto (+)-casi-alternante como (-)-casi-alternante.

Teorema 5.3 (Lema de Ky Fan, versi3n d3bil). *Sea K una subdivisi3n antipodal de Γ^n y $\lambda : \text{vert}(K) \rightarrow [\pm m]$ un etiquetado antipodal sin aristas complementarias. Entonces hay un n3mero impar de n -s3mplices (+)-alternantes.*

Demostraci3n. Para $\varepsilon = \pm 1$ denotamos $H_i^\varepsilon \subset |\Gamma^n|$ los puntos $x = (x_1, \dots, x_{n+1})$ de $|\Gamma^n|$ tales que x_{i+1} tiene signo ε o es nulo, y para todo $j > i + 1$, $x_j = 0$.

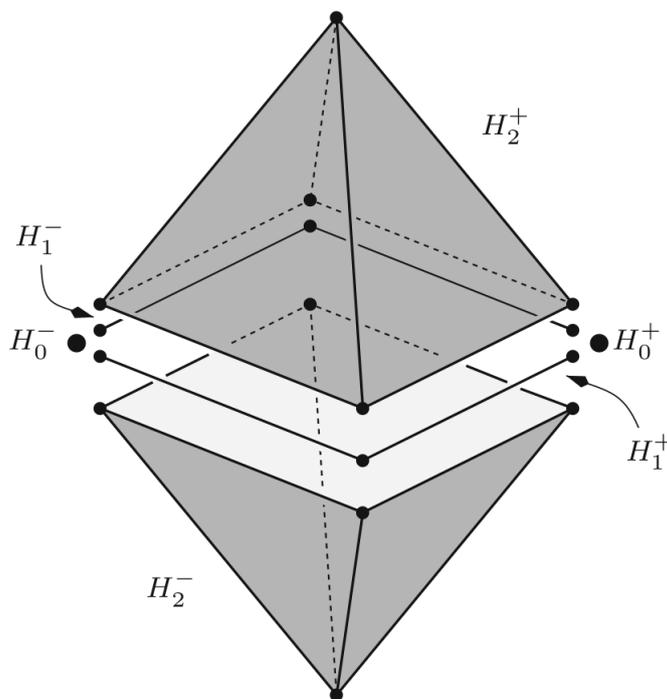


FIGURA 8. Los H_i^ε para $n = 2$

Dado que cada uno de los símplices de Γ^n estı en uno de los H_n^ε , todos los símplices de K tambiın estarın contenidos en al menos uno de los H_i^ε . Para cada símlice σ de K , decimos que el H_i^ε minimal que contiene a σ *lleva a* σ .

La subdivisiın K tiene asociado un grafo de modo natural: los vértices son los símplices de K y dos de ellos estın conectados si uno es faceta de otro. Pero este grafo es demasiado grande para nuestros propósitos, y es el siguiente (sub)grafo el que interesa.

Los vértices del nuestro subgrafo son los símplices σ llevados por H_d^ε de uno de estos tres tipos:

- (a) σ tiene dimensiın $d - 1$ y es ε -alternante.
- (b) σ tiene dimensiın d y es ε -casi-alternante.
- (c) σ tiene dimensiın d y es alternante.

Y dos éstos vértices se conectan cuando uno es faceta del otro y se cumplen las condiciones siguientes.

- (i) Un símlice σ de tipo (a) es faceta de exactamente dos símplices ρ_1, ρ_2 que estın en $H_d^\varepsilon \cup H_d^{-\varepsilon}$. Esto es porque

$$H_d^\varepsilon \cup H_d^{-\varepsilon} = \Gamma^n \cap \mathbb{R}^{d+1} = \Gamma^d$$

y podemos aplicar el argumento de 2.13. Esos dos símplices son llevados por H_d^ε porque dado que σ es llevado por H_d^ε y no por H_{d-1}^ε , la coordenada $(d + 1)$ -ésima de alguno de sus vértices debe ser no nula, y un símlice de una subdivisiın de Γ^n no tiene dos vértices que tengan una coordenada con signo distinto. Ademıs, si ρ_i es alternante es de tipo (c), y si no es alternante es ε -casi-alternante llevado por H_d^ε , luego es de tipo (b). En todo caso es un vértice de nuestro grafo.

En esta situaciın, σ se conecta a ρ_1 y a ρ_2 .

Estas otras dos aristas las contaremos nuevamente al considerar las aristas de los símplices de tipo (c) en (iii) y las de los símplices de tipo (b) en (ii).

- (ii) Un símlice σ de tipo (b) tiene exactamente dos facetas τ_1, τ_2 que son ε -alternantes por la proposiciın previa 5.2. Si τ_i es llevada por H_d^ε es de tipo (a), y si es llevada por $H_{d-1}^{\varepsilon'}$ es de tipo (c), luego siempre estı en nuestro grafo.

En este caso, σ se conecta a τ_1 y a τ_2 .

Observamos que si τ_i es de tipo (a) entonces la arista ya la habíamos introducido en (i), y por tanto no estamos aıadiendo aristas extra a los símplices de tipo (a). Si es en cambio de tipo (c), la introduciremos nuevamente en (iv).

- (iii) Un símlice σ de tipo (c) y dimensiın $d \neq 0$ tiene una faceta τ que es ε -alternante y estı contenida en H_d^ε . En efecto, esa faceta se obtiene eliminando el vértice con mayor o menor etiqueta (en valor absoluto) segın convenga por los signos. Si τ es llevada por un $H_{d-1}^{\varepsilon'}$ es de tipo (c), y si no, es llevada por H_d^ε y es de tipo (a).

En este caso, conectamos σ a τ .

Observamos de nuevo que si τ es de tipo (a) entonces la arista ya la habíamos introducido en (i), luego no aıadimos aristas extra a los símplices de tipo (a). Si τ es en cambio de tipo (c), entonces la arista la contaremos en (iv).

- (iv) Un s3mplice σ de tipo (c), ε -alternante y de dimensi3n $d \neq n$ es faceta de dos s3mplices, uno en H_{d+1}^ε y otro en $H_{d+1}^{-\varepsilon}$ (por 2.13). Denotamos ρ el llevado por H_{d+1}^ε . Por construcci3n, ρ tiene dimensi3n $d + 1$, y como tiene una faceta ε -alternante es de tipo (c) o de tipo (b), si es o si no es alternante respectivamente.

En este caso, conectamos σ a ρ .

Si ρ es de tipo (b) ya hab3amos introducido la arista previamente en (ii), y si es de tipo (c) ya la hab3amos introducido en (iii).

Obtenemos un grafo cuyos v3rtices tienen grado ≤ 2 , y los de grado 1 son los de tipo (c) y dimensi3n $d = 0, n$, es decir, son los dos puntos e_1 y $-e_1$ y los n -s3mplices alternantes. En este grafo, nos fijamos en los caminos γ que no son ciclos, que tendr3n dos extremos de grado 1 (entre los anteriormente enumerados). Por ser el etiquetado antipodal, $-\gamma$ es otro camino, y tiene que ser distinto de γ .

En caso $\gamma = -\gamma$, se intercambiar3an los extremos, que ser3an antipodales. Si γ tuviese un n3mero impar de v3rtices tendr3a un v3rtice central, que ser3a necesariamente autoantipodal, lo cual es imposible porque $0 \notin |\Gamma^n|$. Si tuviese un n3mero par de v3rtices habr3a una arista central (τ, σ) , con τ una faceta de σ , no obstante $\sigma = -\tau$, lo cual es imposible porque son de distinta dimensi3n.

Por consiguiente el n3mero de caminos γ es par, digamos $2c$ y el de sus extremos doble, es decir $4c$. Dos de esos extremos son los v3rtices $\pm e_1$, y los restantes $4c - 2$ son los n -s3mplices alternantes. Pero estos vienen en pares antipodales: (+)- y (-)-alternantes. Concluimos que hay $2c - 1$ s3mplices (+)-alternantes: un n3mero impar. \square

De este lema de Ky Fan deducimos como corolario:

Corolario 5.4 (Lema de Tucker). *Sea K una subdivisi3n antipodal de Γ^n y $\lambda : \text{vert}(K) \rightarrow [\pm n]$ un etiquetado antipodal. Entonces hay al menos una arista complementaria.*

Demostraci3n. En las condiciones del Lema de Ky Fan s3lo puede haber un n -s3mplice alternante en el caso $m \geq n + 1$, porque para que un n -s3mplice sea alternante sus $n + 1$ etiquetas deben tener distinto valor absoluto. Por tanto todo etiquetado antipodal $\lambda : \text{vert}(K) \rightarrow [\pm n]$ debe contener al menos una arista complementaria. \square

Si nos hemos decantado por una prueba constructiva del lema de Ky Fan es porque la misma construcci3n nos permite encontrar una arista complementaria en el Lema de Tucker. En esa prueba constructiva la hip3tesis de que no hubiera aristas complementarias interviene en la proposici3n previa 5.2. Si esa hip3tesis no se hace, necesitamos un resultado previo diferente. Espec3ficamente:

Proposici3n 5.5. *Sean K una subdivisi3n antipodal de Γ^n y $\lambda : \text{vert}(K) \rightarrow [\pm m]$ un etiquetado antipodal. Sea asimismo σ un d -s3mplice ε -casi-alternante con una arista complementaria $\text{conv}(u, v)$. Entonces σ tiene como m3ximo dos facetas alternantes. De hecho, si $d = 1$ tiene dos, y en caso contrario s3lo una, que es ε -alternante.*

Demostraci3n. Como $|\lambda(u)| = |\lambda(v)|$, las 3nicas facetas de σ que pueden ser alternantes son las que no contienen a ambos extremos u y v , por tanto s3lo hay dos posibles: la que no contiene a u y la que no contiene a v . Si $d = 1$ esas dos facetas son v y u respectivamente, y por tanto son alternantes. En caso contrario ordenamos los v3rtices

de σ de forma que sus valores absolutos sean crecientes y sea τ una faceta ε -alternante de σ , podemos suponer que u es vértice de τ . Si ordenamos los valores absolutos de los vértices de la faceta que no contiene a u , que denominaremos τ' , obtenemos exactamente la misma secuencia, y como $d > 1$, hay algún vértice w de τ contiguo en la secuencia a u , y como τ es alternante la etiqueta de w tiene distinto signo que la de u . Por tanto en la secuencia de τ' , w y v son también consecutivos, pero sus etiquetas tienen el mismo signo, por lo que τ' no es alternante. \square

Este resultado reemplaza a 5.2 en la construcción del grafo de la prueba del Lema de Ky Fan presentada, y como decíamos nos permite encontrar una arista complementaria dado un etiquetado antipodal $\lambda : \text{vert}(K) \rightarrow [\pm n]$.

En efecto, construyamos el grafo, y analicemos los vértices de grado 1 que obtenemos. Como hemos señalado en la demostración del Lema de Tucker, no hay n -símplices alternantes, luego los símplices de grado 1 que obtenemos en el grafo son

- (i) los de tipo (c) de dimensión 0,
- (ii) los símplices de tipo (b) y dimensión $d > 1$ con una arista complementaria, y
- (iii) tal vez alguna arista complementaria de tipo (b).

Ahora podríamos detallar con toda exactitud qué aristas complementarias de tipo (b) tienen grado 1, pero ni siquiera es necesario, pues en el grafo no aparece ningún vértice de grado mayor que 2 y todos los vértices de grado 1 salvo $\pm e_1$ tienen una arista complementaria. Además, como ya vimos en la demostración del Lema de Ky Fan, $\pm e_1$ no pueden estar conectados por un camino. Por consiguiente, si comenzamos en el vértice e_1 y seguimos el camino del grafo que comienza en él, el extremo de ese camino será un símplice de tipo (b) con una arista antipodal. \square

No obstante, hay que precisar que no podemos afirmar que este método tenga una complejidad mejor que la búsqueda por fuerza bruta.

A continuación demostramos el Teorema de Borsuk-Ulam.

Demostración del Teorema de Borsuk-Ulam usando el Lema de Tucker. Como por 2.12 el poliedro $|\Gamma^n|$ es homeomorfo a \mathbb{S}^n , podemos asumir para buscar la contradicción que hay una aplicación antipodal $f : |\Gamma^n| \rightarrow \mathbb{R}^n$ sin ceros.

Si este fuera el caso, como $|\Gamma^n|$ es compacto, $\max\{f(x)_i : 1 \leq i \leq n+1\}$ alcanza su mínimo $\varepsilon > 0$. En otras palabras, para cada $x \in |\Gamma^n|$ existe un i tal que $|f(x)_i| \geq \varepsilon$. Dado que estamos en un compacto f es uniformemente continua, luego existe un $\delta > 0$ tal que si $\|u - v\| < \delta$, entonces $\|f(u) - f(v)\| < \varepsilon$. Además, por la proposición 2.16 existe un k tal que para cualesquiera vértices u, v de un mismo símplice de $\text{sd}^k \Gamma^n$, $\|u - v\| < \delta$. Dado ese k , definimos $K = \text{sd}^k \Gamma^n$. Por consiguiente, para todas las aristas $\text{conv}(u, v)$ de K , $\|f(u) - f(v)\| < \varepsilon$. Construimos el siguiente etiquetado antipodal λ de la forma siguiente: sea $i(v)$ el mínimo índice tal que $|f(v)_{i(v)}| \geq \varepsilon$. Entonces

$$\lambda(v) = \begin{cases} +i(v) & \text{if } f(v)_{i(v)} \geq \varepsilon, \\ -i(v) & \text{if } f(v)_{i(v)} \leq -\varepsilon \end{cases}$$

Tenemos que λ es antipodal porque, dado que f es antipodal, $|f(-v)_i| = |-f(v)_i| = |f(v)_i|$, luego $i(-v) = i(v)$, y como $f(-v)_{i(v)}f(v)_{i(v)} < 0$, se concluye $\lambda(-v) = -\lambda(v)$.

Aplicando el Lema de Tucker existe una arista $\text{conv}(u, v)$ con $\lambda(u) = -\lambda(v)$. Podemos suponer $\lambda(u) > 0$. Sea $i = \lambda(u)$. Por definición de λ , $f(u)_i \geq \varepsilon$ y $f(v)_i \leq -\varepsilon$, lo cual contradice $\|f(u) - f(v)\| < \varepsilon$. \square

Con lo cual le lema Tucker y el teorema de Borsuk-Ulam quedan demostrados. Veamos que como hemos dicho anteriormente son formalmente equivalentes.

Demostración del Lema de Tucker usando el Teorema de Borsuk-Ulam. Sea $\lambda : \text{vert}(K) \rightarrow [\pm n]$ un etiquetado antipodal. Construimos la función continua $f : |\Gamma^n| \rightarrow \mathbb{R}^n$ como la extensión lineal afín de la siguiente aplicación simplicial de los vértices de K de la siguiente forma:

$$v \mapsto \text{sgn}(\lambda(v))e_{|\lambda(v)|+1 \pmod{n+1}}$$

Se comprueba inmediatamente que f es antipodal, por la definición de extensión y ser antipodal el etiquetado.

Aplicando el Teorema de Borsuk-Ulam sabemos que hay un $x \in |\Gamma^n|$ tal que $f(x) = 0$. Además x es una combinación convexa de una serie de vértices v_k ,

$$x = \sum_{k=1}^n \lambda_k v_k, \quad \lambda_k \geq 0,$$

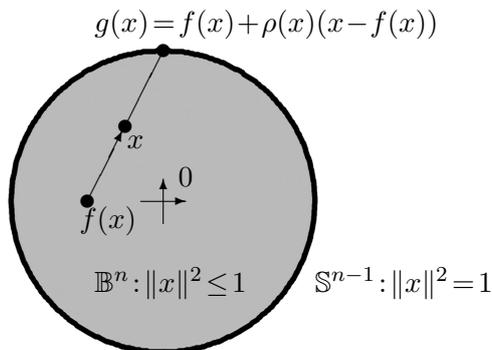
y como $f(x) = 0$, los vectores

$$e_{|\lambda(v_1)|+1 \pmod{n+1}}, \dots, e_{|\lambda(v_n)|+1 \pmod{n+1}}$$

son linealmente dependientes. Por tanto debe haber al menos dos vértices v_i y v_j tales que $|\lambda(v_i)| = |\lambda(v_j)|$. De nuevo por ser $f(x) = 0$, debe haber un par v_i, v_j de esos con $\text{sgn}(\lambda(v_i)) \neq \text{sgn}(\lambda(v_j))$. Por tanto $\text{conv}(v_i, v_j)$ es una arista complementaria. \square

Para completar las comparaciones entre los diversos teoremas y lemas que hemos probado hasta ahora, terminamos la sección con la

Demostración del Teorema del punto fijo de Brouwer usando el Teorema de Borsuk-Ulam. Procedemos por reducción al absurdo, suponiendo que existe una aplicación continua $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$ sin puntos fijos. Es bien sabido que se puede definir una retracción $g : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ como indica la figura



pues g es la identidad en \mathbb{S}^{n-1} . Ahora definimos una aplicación antipodal $h : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ como sigue:

$$h(x_1, \dots, x_{n+1}) = \begin{cases} g(x_1, \dots, x_n) & \text{si } x_{n+1} \geq 0, \\ -g(x_1, \dots, x_n) & \text{si } x_{n+1} \leq 0. \end{cases}$$

Pero vista como aplicación con valores en \mathbb{R}^n , h es una aplicación antipodal sin ceros, lo que es contrario a Borsuk-Ulam. \square

6. DIVISIÓN 1/2 CONSENSUADA

De forma similar a la división libre de envidia, demostraremos que puede encontrarse una solución exacta en como máximo n cortes. Por ello, en esta sección nos restringiremos de nuevo a soluciones que requieran como mucho n cortes. Para representar los n cortes, dividiremos el intervalo $I = [0, 1]$ de la siguiente manera:

$$I = \bigcup_{i=1}^{n+1} [l_{i-1}^x, l_i^x], \quad l_0^x = 0, \quad l_i^x = \sum_{j=1}^i t_j; \quad t_i = l_i - l_{i-1}.$$

Para determinar una partición en 2 mitades, tan sólo resta determinar a qué mitad pertenece cada uno de los trozos. Denominaremos a las dos mitades A_+^x y A_-^x . Definimos $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+1}$ de la siguiente forma: si $[l_{i-1}^x, l_i^x] \subset A_+^x$, entonces $\varepsilon_i = 1$, y si $[l_{i-1}^x, l_i^x] \subset A_-^x$, entonces $\varepsilon_i = -1$. De esta forma podemos definir el punto $x = (\varepsilon_1 t_1, \dots, \varepsilon_{n+1} t_{n+1})$. No obstante la definición de los ε_i tiene un fallo: puede ser que $[l_{i-1}^x, l_i^x]$ esté tanto en A_+^x como en A_-^x , en caso de que sea un único punto. En este caso, puesto que t_i es cero, no nos importa el signo de ε_i para la construcción de x , ni nos importa asignar formalmente ese punto a ninguna de las dos particiones, por tanto podemos olvidarnos de ese corte.

En definitiva, una división en dos mitades A_+^x y A_-^x queda unívocamente determinada por este punto x , y por ello las hemos estado escribiendo con superíndice x . Asimismo observamos que x pertenece a $|\Gamma^n|$. Por consiguiente, de aquí en adelante, consideraremos $|\Gamma^n|$ nuestro espacio de soluciones.

Para construir un algoritmo que encuentra una división $\frac{1}{2}$ consensuada ε -aproximada, emplearemos el Lema de Tucker. No obstante, es posible demostrar directamente la existencia de una solución exacta en n cortes empleando tan sólo el Teorema de Borsuk-Ulam, aunque sin un método para encontrarla.

Teorema 6.1. *Existe una división $\frac{1}{2}$ consensuada en como mucho n cortes.*

Demostración. Definimos la aplicación

$$f : |\Gamma^n| \rightarrow \mathbb{R}^n : x \mapsto (\mu_1(A_+^x) - \mu_1(A_-^x), \dots, \mu_n(A_+^x) - \mu_n(A_-^x)).$$

Se observa que $A_+^x = A_-^{-x}$, con lo que f es antipodal. En consecuencia, por el Teorema de Borsuk-Ulam esta función tiene al menos un cero, x , y por consiguiente A_+^x y A_-^x es la división que buscamos, pues $\mu_i(A_+^x) = \mu_i(A_-^x)$ implica $\mu_i(A_+^x) = \mu_i(A_-^x) = \frac{1}{2}$. \square

Procedemos ahora a desarrollar el algoritmo que permite encontrar soluciones aproximadas.

Teorema 6.2. *Existe un algoritmo que permite calcular una solución $\frac{1}{2}$ consensuada aproximada para cualquier ε .*

Demostración. Consideramos las subdivisiones baricéntricas $\text{sd}^k \Gamma^n$ de Γ^n . Por 2.16 sabemos que

$$|u_j - v_j| \leq \|u - v\| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$$

para cualesquiera vértices u, v de un mismo símlice de $\text{sd}^k \Gamma^n$. Por tanto para todo $\delta > 0$ hay un k , tal que para todo j es $|u_j - v_j| < \delta$. Además dado que las funciones μ_i son continuas y las evaluamos en conjuntos compactos, son uniformemente continuas. Esto significa que dado un ε podemos fijar un δ (y por tanto un k) a partir del cual

$$|\mu_i(A_+^u) - \mu_i(A_+^v)| < \varepsilon.$$

Dado ese k , sea $K = \text{sd}^k \Gamma^n$. En caso de que uno de los vértices de K sea una solución exacta, hemos terminado. En caso contrario, definimos un etiquetado $\lambda : \text{vert}(K) \rightarrow [\pm n]$ como sigue. El valor absoluto $|\lambda(v)|$ será el índice i donde $\min\{\mu_i(A_+^v), \mu_i(A_-^v)\} \leq \frac{1}{2}$ alcanza el mínimo, y $\lambda(v)$ será el signo en el que $\mu_i(A_\pm^v)$ alcanza el mínimo. Para que λ sea antipodal, en caso de haber varios índices en los que $\min\{\mu_i(A_+^v), \mu_i(A_-^v)\}$ alcanza el mínimo, debemos tomar el mismo índice en v y en $-v$, por ejemplo tomando siempre el mínimo. Observamos que en el signo de $\lambda(v)$ no hay ambigüedad posible, porque si ese mínimo es $\mu_i(A_+^v) = \mu_i(A_-^v)$, entonces $\mu_j(A_+^v) = \mu_j(A_-^v) = \frac{1}{2}$ para todo j , y v sería una solución exacta, lo cual ya habíamos descartado. En otras palabras, $\lambda(v)$ nos indica cuál es la persona que considera la división por v más injusta con su valor absoluto, y cuál es el trozo más pequeño, con el signo.

Aplicando el Lema de Tucker, existe una arista $\text{conv}(u, v)$ en K con $\lambda(u) = -\lambda(v)$. Podemos suponer $\lambda(u) > 0$. Sea $i = \lambda(u)$. Entonces, u determina la división consensuada aproximada que buscamos. Para ver esto, por definición de λ , $\mu_i(A_-^u) > \frac{1}{2}$, y como $|\mu_i(A_+^u) - \mu_i(A_+^v)| < \varepsilon$ y $\mu_i(A_+^v) > \frac{1}{2}$, $\mu_i(A_+^u) > \frac{1}{2} - \varepsilon$. Así, por definición de λ , para todo índice j tenemos que

$$\min\{\mu_j(A_+^u), \mu_j(A_-^u)\} \geq \min\{\mu_i(A_+^u), \mu_i(A_-^u)\} > \frac{1}{2} - \varepsilon.$$

Visto esto, además resulta

$$\mu_j(A_\pm^u) = 1 - \mu_j(A_\mp^u) < 1 - (\frac{1}{2} - \varepsilon) = \frac{1}{2} + \varepsilon.$$

En suma, $\frac{1}{2} - \varepsilon \leq \mu_j(A_\pm^u) \leq \frac{1}{2} + \varepsilon$, y la división determinada por u es en efecto una división $\frac{1}{2}$ consensuada ε -aproximada. \square

También se podría ahora obtener la existencia de una solución exacta por un paso al límite $\varepsilon = \frac{1}{k} \rightarrow 0$, como en la demostración de 4.2.

REFERENCIAS

- [1] K. FAN: *A generalization of Tucker combinatorial lemma with topological applications.* Ann. of Math. 56 (1952) 431–437.
- [2] M. DE LONGUEVILLE: *A course in Topological Combinatorics.* Springer, 2013.
- [3] JIŘI MATOUŠEK: *Using the Borsuk-Ulam Theorem.* Springer 2003.
- [4] T. PRESCOTT, F.E. SU: *A constructive proof of Ky Fan's generalization of Tucker's lemma.* J. Comb. Theory 111 (2005) 2, 257–265.