Problemas de Álgebra Lineal

José M. Gamboa & Jesús M. Ruiz

1989*

Número 1. Demostrar que el conjunto $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de las funciones reales continuas de variable real con las operaciones naturales es un espacio vectorial real. Se consideran los subconjuntos

$$H = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) : f(0) = \lambda\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

¿Para qué valores de λ es H un subespacio vectorial?

Número 2. Sea $V = \mathbb{C}[t]$ el conjunto de los polinomios en una indeterminada t con coeficientes complejos. Probar que V es un espacio vectorial (con las operaciones naturales). Distinguir cuáles de los subconjuntos siguientes son subespacios vectoriales de V:

$$H = \{f \in V : \mathrm{grado}(f) \leq n\} \cup \{0\}, \quad L = \{f \in V : \mathrm{grado}(f) = n\} \cup \{0\},$$

donde n es un entero ≥ 1.

Número 3. Estudiar la dependencia lineal de los vectores:
(1) $(1,2,1,0), (-1,3,4,1), (3,1,0,4), (5,1,2,1)$ en $\mathbb{R}^4$.
(2) $t^3, t^2+t^3, 2+t+t^3, 6+3t+t^2+6t^3$ en $\mathbb{C}[t]$.

Número 4. Sean $u_1,\dots,u_n$ vectores de $\mathbb{K}^n$. Probar que las siguientes condiciones son equivalentes:
(1) $u_1,\dots,u_n$ son linealmente independientes.
(2) $u_1,\dots,u_n$ forman un sistema de generadores.
(3) $u_1,\dots,u_n$ forman una base.

Número 5. Estudiar si los vectores $(1,0,-1,2), (2,3,1,1), (1,3,2,-1), (1,1,0,1)$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}^4$. Extraer de ellos el mayor número posible que lo sean, y construir una base de $\mathbb{R}^4$ que contenga a esos vectores elegidos.

Número 6. Sean u_1, u_2, u_3 y u_4 vectores de $\mathbb{K}^n$ tales que los conjuntos

$$\{u_1,u_2,u_3\}, \quad \{u_1,u_2,u_4\}, \quad \{u_1,u_3,u_4\} \text{ y } \{u_2,u_3,u_4\}$$

son libres. ¿Se puede asegurar que también es libre el conjunto $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$?

Número 7. Calcular la dimensión de los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$:
(1) $H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : 3x-y-z = x+y-z = 0\}$.
(2) $H = \mathcal{L}[(1,2,1,0), (-1,3,4,1), (3,1,0,4), (5,1,2,1)]$.

*Revisión 2005

Número 8. ¿Es el conjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$? ¿Qué subespacios de $\mathbb{R}^3$ contienen a S?

Número 9. (1) Probar que $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y = z + t = 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$. Encontrar una base y calcular la dimensión de H.

(2) Sea L el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ generado por $(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0)$ y $(1, 0, 0, 1)$. Hallar una base de L y calcular la dimensión de $H \cap L$ y de $H + L$.

Número 10. Sea E un espacio vectorial de dimensión finita y sean V_1, V_2 dos subespacios suyos distintos y de la misma dimensión. Demostrar que:

(1) La unión $V_1 \cup V_2$ no coincide con E.

(2) Existe un subespacio vectorial W de E tal que $E = V_i \oplus W = V_2 \oplus W$.

Número 11. Sea E el espacio vectorial formado por los polinomios de grado $\leq n$ con coeficientes en un cuerpo $\mathbb{K}$. Para cada $a \in \mathbb{K}$ se denota V_a el subespacio de E formado por los polinomios de los que a es raíz. Se pide:

(1) Hallar una base y unas ecuaciones implícitas de V_a. ¿Depende de a la dimensión de V_a?

(2) Calcular la dimensión de $V_a \cap V_b$ y determinar $V_a + V_b$ para cualesquiera dos escalares a, b distintos.

Número 12. (1) Demostrar que existe una única aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que

$$f(1, 0, 0) = (2, -1, 3, 2),\ f(0, 1, 0) = (1, 1, 0, 1),\ f(0, 0, 1) = (1, 0, 1, 1).$$

y calcular su matriz respecto de las bases estándar de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$.

(2) Encontrar bases y calcular las dimensiones de $\ker(f)$ e $\operatorname{im}(f)$.

Número 13. ¿Existe alguna aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1, 0) = (1, 1)$, $f(3, 2) = (1, -1)$ y $f(3, 3) = (2, 2)$?

Número 14. Demostrar que una aplicación lineal $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ es inyectiva si y sólo si es suprayectiva.

Número 15. Demostrar que dos espacios vectoriales de tipo finito de la misma dimensión (y definidos sobre el mismo cuerpo) son isomorfos.

Número 16.* ¿Existe alguna aplicación lineal $\mathbb{Q}^{3157} \to \mathbb{Q}^{3157}$ cuya imagen coincida con su núcleo?

Número 17. Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial de dimensión finita. Si se cumple $\operatorname{im}(f) = \ker(f^2)$, ¿se cumple también $\ker(f) = \operatorname{im}(f^2)$?

Número 18. Sean n un entero positivo y A una matriz cuadrada con coeficientes reales, cuya potencia $(n + 1)$-ésima es nula. Para cada escalar t consideramos la matriz

$$M_t = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k,$$

y el conjunto $\mathcal{E} = \{M_t : t \in \mathbb{R}\}$. Demostrar que $\mathcal{E}$, con el producto de matrices, es un grupo.

Número 19. Se consideran los siguientes vectores de $\mathbb{R}^4$: los de la base estándar e_1, e_2, e_3, e_4, $u_1 = (1,0,1,0)$ y $u_2 = (0,1,0,1)$. Se pide:

(1) Construir un subespacio vectorial H de $\mathbb{R}^4$ tal que $\mathbb{R}^4 = H \oplus \mathcal{L}[u_1, u_2]$.

(2) Construir una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ cuyo núcleo sea $\mathcal{L}[u_1, u_2]$ y cuya imagen sea H.

(3) Obtener la factorización canónica de f.

(4) Decidir si existe alguna aplicación lineal $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ cuyo núcleo sea $\mathcal{L}[e_1, e_4]$ y cuya imagen sea $\mathcal{L}[e_2, e_3, u_2]$.

Número 20. Se llama *traspuesta* de una matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, y se denota A^t, la matriz $A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$. ¿Existe alguna matriz X no nula tal que se cumpla $XA = BX^t$, con $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$?

Número 21. Sea V el espacio vectorial de las matrices 2×3 con coeficientes en $\mathbb{R}$. Probar que el subconjunto $H \subset V$ formado por las matrices del tipo $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 3c & a-3c & b \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, es un subespacio vectorial de V. Determinar una base de H.

Número 22. Demostrar que para cualesquiera dos matrices A, B (de tamaños adecuados) se cumple $(AB)^t = B^t A^t$.

Número 23. Se llama *traza* de una matriz cuadrada de orden n, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, a la suma de los elementos de la diagonal principal: $\mathrm{tr}(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn}$. Demostrar que se verifica $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Número 24. Una matriz A de orden n se llama *simétrica* si $A = A^t$, y *antisimétrica* si $A = -A^t$. Se pide:

(1) Mostrar que el conjunto $\mathcal{S}$ de las matrices simétricas y el conjunto $\mathcal{T}$ de las antisimétricas son dos subespacios vectoriales del espacio $\mathcal{M}$ de todas las matrices cuadradas de orden n.

(2) Encontrar bases y calcular las dimensiones de $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$.

(3) Demostrar que $\mathcal{M} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{T}$.

(4) Construir una aplicación lineal $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ cuyo núcleo sea $\mathcal{T}$ y cuya imagen sea $\mathcal{S}$.

(5) Construir una aplicación lineal $g : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ cuyo núcleo sea $\mathcal{S}$ y cuya imagen sea $\mathcal{T}$.

Número 25. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ y el conjunto $H = \{X \in \mathcal{M} : XA = AX\}$.

Probar que H es un subespacio vectorial del espacio $\mathcal{M}$ de las matrices de orden 2, y calcular su dimensión.

Número 26. Se considera la forma lineal

$$f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}:(x,y,z,t)\mapsto 3x-5y+4z+t.$$

¿Cuáles son sus coordenadas respecto de la base dual de la estándar? Probar que los vectores $(1,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,0,0)$ y $(1,0,0,0)$ forman una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ y calcular las coordenadas de f respecto de $\mathcal{B}^*$. ¿Cuál es la matriz de f respecto de $\mathcal{B}$ y la base estándar de $\mathbb{R}$?

Número 27.* ¿Existen dos aplicaciones lineales $f:E\to F$ y $g:F\to G$ tales que: f sea inyectiva, g sea suprayectiva, e $\operatorname{im}(f)=\ker(g)$, con E isomorfo a G y $\dim(F)=357$?

Número 28. Sea $f:E\to E'$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales, F un subespacio vectorial de E y F' uno de E'. Dígase cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas, razonando la respuesta:
(1) $f(f^{-1}(F'))=F'$.
(2) $f^{-1}(f(F))=F$ si y sólo si F contiene el núcleo de f.

Número 29. Sean $f:E\to E$ un endomorfismo de un espacio vectorial, y $v\in E$ un vector que no está en su núcleo. Se consideran las siguientes afirmaciones:

$$\textit{(i)}\ \operatorname{im}(f)=\mathcal{L}[f(v)];\quad \textit{(ii)}\ E=\mathcal{L}[v]\oplus\ker(f).$$

¿Es cierto que la primera implica la segunda? ¿Y el recíproco?

Número 30. Sean $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ la base estándar de $\mathbb{C}^4$, y $f:\mathbb{C}^4\to\mathbb{C}^3$ la aplicación lineal determinada por $f(e_1)=(2,1,-1)$, $f(e_2)=(1,-1,-2)$, $f(e_3)=(2,-2,4)$ y $f(e_4)=(1,0,-1)$. Sea $\mathcal{B}'=\{\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3\}$ la base estándar de $\mathbb{C}^3$. Comprobar que los vectores $u_1=(2,1,-1)$, $u_2=(1,-1,-2)$, $u_3=(2,-2,4)$ forman una base $\mathcal{B}''$ de $\mathbb{C}^3$ y calcular las matrices de f respecto de: (1) $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$, (2) $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}''$. Calcular también la matriz del cambio de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}''$, y comprobar qué relación cumplen las tres matrices obtenidas.

Número 31. Se consideran el espacio vectorial $\mathcal{M}$ de las matrices cuadradas de orden 2 con coeficientes complejos, y el espacio vectorial E formado por todas las matrices

$$\begin{pmatrix} a & b+d & c+d\\ a+b-d & a+c-d & b+c\end{pmatrix}$$

con $a,b,c,d\in\mathbb{C}$.

(1) Encontrar bases del núcleo y de la imagen de la aplicación lineal $f:E\to\mathcal{M}:A\mapsto AP^t$, para $P=\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&0&-1\end{pmatrix}$.

(2) Hallar una base de un subespacio vectorial H de E cuya dimensión sea mayor que la de $f(H)$ y menor que la de $f^{-1}(f(H))$.

Número 32.* Sea $f:\mathbb{C}^4\to\mathbb{C}^3$ la aplicación lineal $f(x,y,z,t)=(x-y,2y-z,2z-t)$. Se pide:

(1) Encontrar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^4/\ker(f)$ y otra $\mathcal{B}'$ de $\mathrm{im}(f)$, respecto de las cuales la matriz de la aplicación lineal $\bar{f}:\mathbb{C}^4/\ker(f)\to\mathrm{im}(f)$ inducida por f sea la identidad.

(2) Sea $g:\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}$ una aplicación lineal tal que las coordenadas de $g\circ f$ respecto de la base dual de la estándar son $(2,0,1,-1)$. Calcular las coordenadas de g respecto de la base dual de $\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$.

Número 33. Sean E el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de los polinomios de grado menor o igual que 2 con coeficientes reales, y $\mathcal{M}$ el formado por las matrices cuadradas de orden 2 con coeficientes reales. Se considera la aplicación lineal $f:E\to\mathcal{M}$ cuyo núcleo contiene el polinomio $p(t)=1+2t-3t^2$, y cumple que

$$f(t)=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\quad\text{y}\quad f(t^2)=\begin{pmatrix}3&0\\1&0\end{pmatrix}$$

Se pide:

(1) Calcular $f(2+t-3t^2)$.

(2) Hallar bases del núcleo y de la imagen de f.

(3) Hallar una base del espacio cociente $E/\ker(f)$.

(4) Calcular las coordenadas de $(1+t+t^2)+\ker(f)$ respecto de la base del apartado anterior.

Número 34. Sea $E=\mathbb{R}_3[t]$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3 con coeficientes reales, y considérese el subespacio vectorial $H\subset E$ generado por los polinomios

$$3+2t+t^2,\quad -2-3t+t^3,\quad 1-t+t^2+t^3.$$

(1) Encontrar una base del espacio cociente $F=E/H$ y calcular las coordenadas respecto de ella de la clase de equivalencia del polinomio $1+t+t^2$.

(2) Sean $\pi:E\to F$ la proyección canónica y $f,g:E\to\mathbb{R}$ las formas lineales definidas respectivamente por

$$f:P\mapsto 2P(0)-P(1),\quad g:P\mapsto P'(-1).$$

¿Existen aplicaciones lineales $\varphi,\psi:F\to\mathbb{R}$ tales que $f=\varphi\circ\pi$, $g=\psi\circ\pi$? En caso afirmativo, ¿son φ y ψ linealmente independientes?

Número 35. Sea H el subespacio de $V=\mathcal{M}_{2\times 3}$ del número **21**. Se pide:

(1) Construir una aplicación lineal $f:V\to V$ cuya imagen sea H, y calcular la matriz de f respecto de las bases que se desee.

(2) Construir una aplicación lineal $g:V\to V$ cuyo núcleo sea H, y calcular la matriz de g respecto de las bases elegidas antes. ¿Puede ser g suprayectiva? ¿Cuál es la dimensión de $\mathrm{im}(g)\cap\mathrm{im}(f)$?

Número 36. Sea H un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^n$. Denotamos ωH el conjunto de todas las formas lineales $f:\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}$ cuyo núcleo contiene a H. Se pide:

(1) Demostrar que ωH es un subespacio vectorial de $(\mathbb{K}^n)^*$.

(2) Demostrar que si $\mathcal{B}_H=\{u_1,\dots,u_r\}$ es una base de H que se prolonga a una base $\mathcal{B}=\{u_1,\dots,u_n\}$ de $\mathbb{K}^n$ y $\mathcal{B}^*=\{u_1^*,\dots,u_n^*\}$ es la base dual, entonces $\{u_{r+1}^*,\dots,u_n^*\}$ es una base de ωH.

(3) Calcular $\dim(\omega H)$.

(4) Tomemos $n=4, r=2$, $H=\mathcal{L}[(1,3,2,-1),(-2,1,5,1)]$. Hallar una base de $\omega H\subset(\mathbb{K}^4)^*$, dando las coordenadas de sus elementos respecto de la base dual de la estándar de $\mathbb{K}^4$.

Número 37. Sean V un espacio vectorial de dimensión 3 y $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de V. Definimos una aplicación $\wedge = \wedge_{\mathcal{B}} : V \times V \to V$ como sigue. Si $u, u' \in V$ tienen coordenadas $(a_1, a_2, a_3), (a'_1, a'_2, a'_3)$ respecto de $\mathcal{B}$:

$$(\bullet) \qquad \wedge_{\mathcal{B}}(u, u') = u \wedge u' = (a_2a'_3 - a'_2a_3)v_1 - (a_1a'_3 - a'_1a_3)v_2 + (a_1a'_2 - a'_1a_2)v_3.$$

Se pide:
(1) Calcular $v_1 \wedge v_2$, $v_2 \wedge v_1$, $v_1 \wedge v_3$, $v_3 \wedge v_1$, etc..
(2) Demostrar que $\wedge_{\mathcal{B}}$ es bilineal alternada.

Número 38. Sean V un espacio vectorial de dimensión 3 y $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$, $\mathcal{B}' = \{v'_1, v'_2, v'_3\}$ dos bases de V. Consideramos las correspondientes aplicaciones bilineales alternadas $\wedge = \wedge_{\mathcal{B}}$, $\wedge' = \wedge_{\mathcal{B}'}$ del número anterior, y la aplicación lineal $\varphi : V \to V$ caracterizada por $\varphi \circ \wedge = \wedge'$. Calcular la matriz de φ respecto de las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$.

Número 39. Generalizar los números **37** y **38** a $V \times \cdots^{(n-1} \times V \to V$, $\dim(V) = n$.

Número 40.* Sean $\mathcal{B}_e = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base estándar de $\mathbb{R}^3$ y $\wedge : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la aplicación bilineal alternada del número **37**. Sea u_0 un vector no nulo de $\mathbb{R}^3$, y consideremos la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : u \mapsto u_0 \wedge u$. Probar que f es lineal y hallar su núcleo y su imagen.

Número 41. Calcular las raíces de la ecuación $\det(A(x)) = 0$ en los dos casos siguientes:

$$A(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & x \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & x & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & x & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x & 6 \end{pmatrix}$$

Número 42. Sea x un número real no nulo. Para cada entero $n \geq 1$ calcular el siguiente determinante de orden n

$$a_n = \det \begin{pmatrix} 2/x & 1/x^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2/x & 1/x^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/x & 1/x^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2/x & 1/x^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2/x \end{pmatrix}$$

Número 43. Calcular el determinante de Vandermonde

$$V(n) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

con $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. ¿Cuándo es nulo?

Número 44. Sea n un entero positivo, t una indeterminada y $A = (a_{ij})$ la matriz de orden $n+1$ dada por

$$a_{ij} = \begin{cases} j & \text{si } i > j \\ t & \text{si } i = j \\ j-1 & \text{si } i < j \end{cases}$$

¿Para qué valores de t se anula el determinante de A?

Número 45. Calcular el rango de $\begin{pmatrix} x & -1 & x & 0 & x \\ 0 & x & x & 0 & -1 \\ 1 & x & 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & x & x & 0 \end{pmatrix}$ en función de $x \in \mathbb{C}$.

Número 46. Discutir, según los valores de los parámetros, y resolver cuando sea posible los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$(1) \quad \begin{cases} \lambda x & +y & +z & +t & = & 1 \\ x & +\lambda y & +z & +t & = & -1 \\ x & +y & +\lambda z & +t & = & 1 \\ x & +y & +z & +\lambda t & = & -1 \end{cases} \qquad (2) \quad \begin{cases} (\lambda-1)x & +\lambda y & +\lambda z & -t & = & 2\lambda \\ x & +\lambda y & & -\lambda t & = & 1 \\ 2x & & +\lambda z & -2\lambda t & = & \lambda \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} 3x & +y & +\alpha z & = & 0 \\ x & -y & -z & = & 0 \\ \beta x & +y & +z & = & 0 \\ x & +\beta y & -z & = & 0 \end{cases} \qquad (4) \quad \begin{cases} x & +y & +z & = & 3 \\ 2x & -\alpha y & +3z & = & 4 \\ 3x & -3y & +4z & = & 7 \\ 3x & -(\alpha+\beta)y & +7z & = & \beta \end{cases}$$

$$(5) \quad \begin{cases} \lambda x & +y & +z & = & 1 \\ \lambda x & +\lambda y & +z & = & \mu \\ \lambda x & +\lambda y & +\lambda z & = & \mu \\ \mu x & +y & +z & = & 1 \end{cases} \qquad (6) \quad \begin{cases} \alpha x & +\beta y & +z & = & 1 \\ x & +\alpha\beta y & +z & = & \beta \\ x & +\beta y & +\alpha z & = & 1 \end{cases}$$

Número 47. Discutir, según los valores de los escalares a y b, el sistema

$$\begin{cases} ax_1 & +x_2 & +x_3 & + & \cdots & +x_n & = & 1 \\ x_1 & +ax_2 & +x_3 & + & \cdots & +x_n & = & b \\ x_1 & +x_2 & +ax_3 & + & \cdots & +x_n & = & b^2 \\ & \cdots & & \cdots & & & \cdots & \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & + & \cdots & +ax_n & = & b^{n-1} \end{cases}$$

Número 48. Encontrar todas las ternas de escalares a, b, c que satisfacen las igualdades:

$$\begin{cases} a & +b & +c & = & 3 \\ a^2 & +b^2 & +c^2 & = & 3 \\ a^3 & +b^3 & +c^3 & = & 3 \end{cases}$$

Número 49. (1) Un excursionista comprueba, tras recorrer 7 kilómetros en la primera hora, que manteniendo ese ritmo llegaría con una hora de retraso al tren que pretende tomar. Acelera el paso, y durante el resto del camino recorre 10 kilómetros por hora, y llega a la estación con media hora de adelanto. ¿Qué distancia recorrió? ¿Cuánto tiempo estuvo andando?

(2) Un comerciante de telas vende cada metro un 30.2 % más caro que el precio al que lo compra. Desea aumentar sus ganancias sin aumentar los precios, para lo cual decide emplear un metro *falso* al medir la tela delante de sus clientes. ¿Cuánto ha de medir ese metro falso para que sus ganancias pasen a ser del 40 %?

Número 50. Sea $A = (a_{ij})$ la matriz cuadrada de orden n definida por $a_{ij} = 1$ si $i \leq j$, y $a_{ij} = 0$ si $i > j$. Mostrar que A es invertible y calcular su inversa $B = (b_{ij})$.

Número 51. Sea H el subespacio de $\mathbb{R}^4$ de ecuaciones parámetricas

$$\begin{cases} x &= 2\lambda_1 & -\lambda_2 & +\lambda_3 & +\lambda_4 \\ y &= \lambda_1 & +\lambda_2 & +2\lambda_3 & +\lambda_4 \\ z &= 3\lambda_1 & & +3\lambda_3 & +2\lambda_4 \\ t &= -\lambda_1 & +5\lambda_2 & +4\lambda_3 & +\lambda_4 \end{cases}$$

Hallar una base de H, su dimensión y unas ecuaciones implícitas.

Número 52. Hallar una base y unas ecuaciones paramétricas del subespacio de $\mathbb{R}^5$ de ecuaciones implícitas

$$\begin{cases} 3x_1 & -x_2 & +x_3 & -2x_4 & +x_5 & = 0 \\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -4x_4 & +2x_5 & = 0 \\ -2x_1 & +3x_2 & +2x_3 & -2x_4 & +x_5 & = 0 \\ x_1 & & -x_3 & +2x_4 & & = 0 \\ & 5x_2 & +4x_3 & -4x_4 & +3x_5 & = 0 \end{cases}$$

Número 53. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal:

$$(x, y, z, t) \mapsto (2x - y, z + t, x - z + t, 3x - y + 2t),$$

y denotemos por H su núcleo y por L su imagen. Hallar bases, dimensiones, ecuaciones implícitas y ecuaciones parámetricas de los subespacios H, L, $H \cap L$ y $H + L$.

Número 54. Sea H el subespacio de $\mathbb{C}^4$ generado por $(1, 2, 1, 3), (2, 3, 4, 0), (1, 1, 3, -3)$ y $(4, 6, 8, 0)$. Se pide:

(1) Ecuaciones implícitas y dimensión de H.

(2) Construir una aplicación lineal $f : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^2$ cuyo núcleo sea H, y calcular la matriz de f respecto de las bases estándar.

Número 55. Sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la única aplicación lineal cuya matriz $M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ es $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Sean u_1, u_2, u_3 tres vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$f(v_1) = 2u_1 + u_3,\ f(v_2) = 3u_1 + u_3,\ f(v_3) = 2u_1 + u_2.$$

Probar que $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y calcular la matriz $M(f, \mathcal{B}', \mathcal{B})$.

Número 56. Sea E el espacio vectorial de los polinomios de grado ≤ 2 con coeficientes reales, y $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ su base estándar. Se considera el endomorfismo $\varphi : E \to E$ determinado por las siguientes condiciones:

(a) $\varphi(1) = 3 - 2t + t^2$.
(b) $t - 2t^2 \in \operatorname{im}(\varphi)$.
(c) $\ker(\varphi) = \{a + bt + ct^2 \in \operatorname{im}(\varphi) : b = 0\}$.
(d) $\operatorname{im}(\varphi^2) = \ker(\varphi)$.
(e) La primera coordenada de $\varphi(1 - t)$ respecto de $\mathcal{B}$ es -2.

Se pide:

(1) Encontrar bases del núcleo y de la imagen de φ.
(2) Obtener la matriz del endomorfismo φ respecto de $\mathcal{B}$.

Número 57. Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Sea $H \subset \mathbb{R}^4$ el subespacio vectorial generado por los vectores $(1, 0, 2, 2)$ y $(0, 1, 1, 3)$. Encontrar una base, unas ecuaciones implícitas y unas ecuaciones paramétricas de $f^{-1}(H) \subset \mathbb{R}^3$.

Número 58.* Se consideran la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ \mu & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

y el vector $v = (1 - \lambda, \lambda, 1 - \lambda) \in \mathbb{R}^3$, donde λ y μ son dos parámetros reales. Se pide:

(1) Determinar λ y μ para que $v \in \operatorname{im}(f) \neq \mathbb{R}^3$.
(2) Encontrar un subespacio $H \neq \mathbb{R}^3$ tal que $f(H) = \operatorname{im}(f)$.
(3) Hallar bases, dimensiones y ecuaciones de $\ker(f)$ e $\operatorname{im}(f)$.

Número 59. Sea $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$ una base de un espacio vectorial E, y $\mathcal{B}_{\mathcal{L}} = \{f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}\}$ la base de $\mathcal{L}(E, E)$ inducida por $\mathcal{B}$, esto es, tal que

$$f_{ij}(u_k) = \begin{cases} u_i & \text{si } k = j \\ 0 & \text{si } k \neq j \end{cases}$$

Se considera el endomorfismo de $f \in \mathcal{L}(E, E)$ cuya matriz respecto de $\mathcal{B}$ es $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) Calcular las coordenadas respecto de $\mathcal{B}_{\mathcal{L}}$ de Id_E, f y f^2.
(2) Calcular la dimensión y una ecuación del subespacio de $\mathcal{L}(E, E)$ generado por Id_E, f y f^2.

Número 60. Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3 : (x, y, z) \mapsto (x - y, ay + 2z, ax + 2z)$, donde a es un número complejo. ¿Existe algún a tal que $(0, 1, -1) \in \operatorname{im}(f)$?

Número 61. Sean E y F dos espacios vectoriales de dimensión finita, $f : E \to F$ una aplicación lineal y $f^* : F^* \to E^*$ la aplicación lineal definida por: $\psi \mapsto \psi \circ f$. Sean $\mathcal{B}_E$ y $\mathcal{B}_F$ bases de

E y F respectivamente, y $\mathcal{B}_E^*$ y $\mathcal{B}_F^*$ las correspondientes bases duales. ¿Qué relación existe entre las matrices de f y f^* calculadas respecto de estas bases?

Número 62. Sea E el espacio vectorial de los polinomios de grado ≤ 2 con coeficientes reales. Se consideran los siguientes tres elementos del espacio dual E^*:

$$\varphi_i : E \to \mathbb{R} : p(t) \mapsto \int_0^1 p(t)t^{i-1}dt \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Probar que $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ es una base de E^* y determinar su base dual.

Número 63. Sea $\mathcal{M}$ el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2 con coeficientes en un cuerpo $\mathbb{K}$. Para cada matriz $A \in \mathcal{M}$ se considera la aplicación

$$f_A : \mathcal{M} \to \mathbb{K} : X \mapsto \operatorname{tr}(XA),$$

siendo tr la traza. Se pide:

(1) Demostrar que f_A es un elemento del espacio dual $\mathcal{M}^*$ de $\mathcal{M}$. ¿Es lineal la aplicación $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}^* : A \mapsto f_A$? ¿Es biyectiva?

(2) Dadas las matrices

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

demostrar que $\{f_{A_{11}}, f_{A_{12}}, f_{A_{21}}, f_{A_{22}}\}$ es una base de $\mathcal{M}^*$, y encontrar otra de $\mathcal{M}$ de la que sea su dual.

Número 64.* Sean V el espacio vectorial de las matrices 2×2 con coeficientes reales y H el subespacio formado por las de la forma $\begin{pmatrix} a & c \\ a-b & c-b \end{pmatrix}$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ consideramos la aplicación lineal

$$f_\lambda : H \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mapsto (\lambda z, \lambda t + (1-\lambda)y + (1-\lambda)z),$$

y su núcleo $K_\lambda = \ker(f_\lambda)$. Se pide:

(1) Calcular, según los valores de λ, $\dim(K_\lambda)$.

(2) Construir una base $\mathcal{B}_\lambda$ de K_λ, y calcular las coordenadas respecto de la base dual $\mathcal{B}_\lambda^*$ de la forma lineal

$$h_\lambda : K_\lambda \to \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mapsto x + y + z + t.$$

Número 65.* Se tiene la aplicación lineal

$$f_\mu : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 : (x, y, z, t) \mapsto (x + y + \mu z, -2\mu z + t, -x + \mu y + z).$$

(1) Determinar μ para que $\ker(f_\mu)$ tenga dimensión ≥ 2, y calcularla exactamente entonces.

(2) Con el valor de μ obtenido, determinar para qué λ las formas lineales

$$g_\lambda : \operatorname{im}(f_\mu) \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto \lambda x + y + 2z, \quad \text{y} \quad h_\lambda : \operatorname{im}(f_\mu) \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto -2x + \lambda y - z,$$

no son un sistema de generadores del espacio dual de $\mathrm{im}(f_\mu)$.

Número 66.* Sea H el subespacio de $\mathbb{R}^3$ de ecuaciones $x - z = y - \alpha z = 0$. Se consideran las formas lineales:

$$f : \mathbb{R}^3/H \to \mathbb{R} : (x,y,z)+H \mapsto \beta x + y + \gamma z, \quad \text{y} \quad g : \mathbb{R}^3/H \to \mathbb{R} : (x,y,z)+H \mapsto (1+\gamma)x - \beta z.$$

Determinar α, β y γ para que f y g estén bien definidas, y ***no*** sean una base del espacio dual de $\mathbb{R}^3/H$.

Número 67. Sean $\mathcal{B}$ una base de $\mathbb{R}^5$, $\mathcal{B}'$ una de $\mathbb{R}^3$, y $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal cuya matriz respecto de esas bases es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & a & 1 & 6 & a \\ 1 & 0 & 2 & 3 & b \end{pmatrix}$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Calcular a y b sabiendo que el núcleo de f tiene dimensión 3.

Número 68. Sea V el espacio vectorial de los polinomios de grado ≤ 3 de $\mathbb{C}[t]$, y sea $\mathcal{B}$ la base $\{1, t, t^2, t^3\}$. Sea $W = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ y consideremos su base

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ fijo, consideramos la matriz $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$, y definimos una aplicación lineal

$$\varphi : V \to W : P \mapsto P(A),$$

cuya matriz respecto de las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ denotamos M. Se pide:

(1) Calcular, en función de λ, las dimensiones de $\ker(\varphi)$ e $\mathrm{im}(\varphi)$.

(2) Comprobar que $H = \{D \in \mathrm{im}(\varphi) : \mathrm{tr}(D) = 0\}$ es un subespacio vectorial de W, y calcular su dimensión.

(3) Sea $f : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ la aplicación lineal cuya matriz respecto de las bases estándar es M ¿Para qué valores de λ es $\ker(f) \cap \mathrm{im}(f) \neq \{0\}$?

Número 69.* Demostrar que las formas lineales $f_1, \dots, f_n \in (\mathbb{K}^n)^*$ son linealmente independientes si y sólo si $\ker(f_1) \cap \cdots \cap \ker(f_n) = \{0\}$.

Número 70. Demostrar que si A es una matriz cuadrada con coeficientes complejos, entonces $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\bar{A}^t A)$.

Número 71.* Sean A y B matrices cuadradas del mismo orden. ¿Se cumple siempre $\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(BA)$?

Número 72. Sean A y B matrices cuadradas de orden n. Demostrar que

$$\mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B) \leq \mathrm{rg}(AB) + n.$$

¿Existe alguna matriz A de orden 3 y rango 2 tal que A^2 sea nula?

Número 73. Sean A y B dos matrices cuadradas de orden n con coeficientes reales, y sean f y g los endomorfismos de $\mathbb{R}^n$ cuyas matrices respecto de las bases estándar son A y B respectivamente. Demostrar que $\operatorname{rg}(A)+\operatorname{rg}(B)=\operatorname{rg}(AB)+n$ si y sólo si $\ker(f)\subset\operatorname{im}(g)$.

Número 74.* Sea M una matriz $m\times n$, $m>n$, y N otra $n\times m$. Calcular $\det(MN)$.

Número 75. Sean $A\in\mathcal{M}_{n\times m}$ y $B\in\mathcal{M}_{m\times n}$ tales que $\det(AB)\neq\det(BA)$. Calcular $\operatorname{rg}(A)$ y $\operatorname{rg}(B)$.

Número 76.* Sea W el espacio vectorial $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$. Se define una aplicación lineal $\varphi: W\to(\mathbb{C}^2)^*: A\mapsto\varphi(A)$ mediante la condición: *las coordenadas de $\varphi(A)$ respecto de la base dual de la estándar son* $(1,1)A$. Se pide:

(1) Probar que $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ inducen una base $\mathcal{B}$ en $W/\ker(\varphi)$.

(2) Calcular $M=M(\bar\varphi,\mathcal{B},\mathcal{B}_e^*)$, donde $\bar\varphi: W/\ker(\varphi)\to\operatorname{im}(\varphi)$ es el isomorfismo canónico.

(3) Para cada $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ se tiene la aplicación lineal $E_{a,b}:(\mathbb{C}^2)^*\to\mathbb{C}: f\mapsto f(a,b)$. Demostrar que el conjunto H de todos los $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ tales que *las dos coordenadas de $E_{a,b}\circ\bar\varphi\in\big(W/ker(\varphi)\big)^*$ respecto de $\mathcal{B}^*$ son iguales*, es un subespacio vectorial de $\mathbb{C}^2$, y calcular su dimensión.

Número 77.* Sean $V,\mathcal{B},W$ y $\mathcal{B}'$ como en el número **68**. Se define la aplicación lineal

$$f: V\to W: P\mapsto\begin{pmatrix}P(0)&P(-1)\\P'(0)&P'(0)-\frac{1}{2}P''(0)+\frac{1}{6}P'''(0)\end{pmatrix}$$

y se pide:

(1) Construir una base del subespacio $H=\{A\in\operatorname{im}(f):\ \operatorname{tr}(A)=0\}$.

(2) Construir una base del subespacio L de W^* cuyos elementos son las formas lineales $g: W\to\mathbb{R}$ tales que las coordenadas segunda y cuarta de $g\circ f$ respecto de $\mathcal{B}^*$ son nulas.

Número 78.* Sean λ un número real y $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ la aplicación lineal

$$f(x,y)=(\lambda x+y,2x+y,(\lambda+4)x+3y).$$

(1) Determinar para qué valores de λ esta aplicación lineal es inyectiva.

(2) Hallar unas ecuaciones implícitas de un subespacio H de $\mathbb{R}^3$ tal que $\operatorname{im}(f)\subset H\neq\mathbb{R}^3$ para todo valor de λ. ¿Cuándo es $\operatorname{im}(f)\neq H$?

(3) Sea $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ una aplicación lineal tal que $g(1,2,5)=5$ y $g(1,1,3)=0$. Calcular las coordenadas de $h=g\circ f$ respecto de la base dual de la estándar. ¿Cuándo es h suprayectiva?

(4) Suponemos h suprayectiva y consideramos el isomorfismo asociado $\bar h:\mathbb{R}^2/\ker(h)\to\mathbb{R}$. Encontrar una base $\bar{\mathcal{B}}$ de $\mathbb{R}^2/\ker(h)$ tal que $M(\bar h,\bar{\mathcal{B}},\mathcal{B}_e)=1$.

Número 79.* Sea $f:\mathbb{C}^4\to\mathbb{C}^3$ la aplicación lineal: $(x,y,z,t)\mapsto(2x,2y,-x-y)$. Se pide:

(1) Calcular la dimensión y hallar unas ecuaciones implícitas de $\operatorname{im}(f)$.

(2) Construir una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^4$ que ***no*** contenga ninguna base de $\ker(f)$.

(3) Sea $g:\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}$ la aplicación lineal cuyas coordenadas respecto de la base dual de la estándar son $(1,-1,-1)$. Calcular las coordenadas de $g\circ f$ respecto de $\mathcal{B}^*$.

Número 80. Discutir según los valores de los parámetros, y resolver cuando sea posible, el sistema

$$\begin{cases} ax & +y & +z & = & a \\ x & +by & +z & = & b \\ x & +y & +cz & = & c \end{cases}$$

Número 81.* Sea $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ una base de un espacio vectorial real E, y para cada par de números reales $a, b \in \mathbb{R}$, sea f el endomorfismo de E cuya expresión respecto de la base $\mathcal{B}$ es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ donde } M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a^2 & 1 & 1 \\ b & -b & a^2 \end{pmatrix}$$

(1) Determinar a y b sabiendo que $E \neq \operatorname{im}(f) + \ker(f)$.

(2) Obtener bases y ecuaciones implícitas de $\operatorname{im}(f)$ y $\ker(f)$.

(3) Obtener una base del subespacio vectorial $f^{-1}(L)$, donde L es la recta generada por e_1.

(4) ¿Existe algún endomorfismo no nulo g de E tal que $f \circ g$ sea la identidad? ¿Y alguno tal que $f \circ g$ sea nulo? En caso de existir tales g, encontrarlos todos.

(5) Sea $F \subset \mathbb{R}[t]$ el subespacio vectorial de los polinomios de grado ≤ 3, y $\varphi : F \to \mathcal{L}(E, E)$ la aplicación lineal: $P \mapsto P(f)$. Hallar la dimensión de $\operatorname{im}(\varphi)$, y obtener una base $\mathcal{B}$ del espacio cociente $H = F/\ker(\varphi)$.

(6) Sea $\pi : F \to H$ la proyección canónica, y para cada número $\lambda \in \mathbb{R}$ consideremos la forma lineal $g_\lambda : F \to \mathbb{R} : P \mapsto P(\lambda)$. Encontrar todos los números $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que $g_\lambda = h_\lambda \circ \pi$ para alguna forma lineal $h_\lambda \in H^*$.

(7) Calcular para cada λ del apartado anterior las coordenadas de h_λ respecto de la base dual de $\mathcal{B}$. ¿Son linealmente independientes las formas h_λ?

(8) Se considera la aplicación $\varphi^* : \mathcal{L}(E, E)^* \to F^* : \gamma \mapsto \gamma \circ \varphi$. Describir su núcleo y su imagen.

Número 82.* Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una aplicación lineal tal que $f \circ f = 0$, $f(0, 1, 1, 1) = (1, 0, 0, 1)$ y $f(2, 1, 0, 1) = (0, 1, 1, 0)$. Calcular:

(1) La matriz de f respecto de las bases estándar.

(2) La matriz respecto de las bases estándar de otra aplicación lineal $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ que cumpla $\ker(g) = \operatorname{im}(f)$ e $\operatorname{im}(g) = \ker(f)$.

(3) Las coordenadas respecto de la base dual de la estándar de la forma lineal $h \in (\mathbb{R}^4)^*$ que cumple $h \circ f = 0$, $h(-1, 1, 1, 1) = 6$ y $h(1, 2, 3, 4) = 7$.

Número 83.* Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal cuya matriz respecto de las bases estándar es $A = \begin{pmatrix} \lambda & 2\mu & \lambda \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ donde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(1) Determinar λ y μ para que f ***no*** sea inyectiva y, además, $u = (1, 1, 0, 1)$ esté en $\operatorname{im}(f)$.

(2) Calcular, para esos valores de λ y μ, una base $\mathcal{B}$ y unas ecuaciones implícitas de $\operatorname{im}(f)$.

(3) Sea $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ una aplicación lineal tal que $g(1, 0, 0, 0) = g(0, 1, 0, 0) = 0$ y $g \circ f(x, y, z) = x + y - z$. Calcular las coordenadas de g respecto de la base dual de la estándar.

Número 84. Sea B la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Buscar otra matriz A tal que $AB = B^t$.

Número 85. Sean A y B matrices cuadradas de orden n, con $\det(B) \neq 0$. Probar que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(BA) = \mathrm{rg}(AB)$.

Número 86. Sea $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ una aplicación lineal. Probar:
(1) f es biyectiva si y sólo si 0 ***no*** es valor propio de f.
(2) λ es valor propio de f si y sólo si $-\lambda$ es valor propio de $-f$.
(3) Si $f \circ f = f$, entonces 0 o 1 son valores propios de f.
(4) Si $f \circ f = f$, entonces f no puede tener valores propios distintos de 0 y 1.
(5) Si $f \circ f = f$ y f es inyectiva, entonces 1 es el único valor propio de f.

Número 87. Sean A y B matrices cuadradas de orden n. Probar:
(1) A y A^t tienen el mismo polinomio característico.
(2) Si λ es valor propio de A, λ^2 es valor propio de A^2.
(3) Si λ^2 es valor propio de A^2, $+\lambda$ o $-\lambda$ lo es de A.
(4) AB y BA tienen los mismos valores propios.
(5) Si $\det(B) \neq 0$, entonces AB y BA tienen el mismo polinomio característico.

Número 88. Estudiar la diagonalizabilidad de la matriz A y calcular sus potencias n-ésimas en los siguientes casos:

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad\qquad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Número 89. Sea $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ una aplicación lineal cuyo polinomio característico tiene n raíces distintas en $\mathbb{K}$. Probar que f es diagonalizable.

Número 90. Demuéstrese que si todos los vectores de un espacio vectorial E sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ son vectores propios de un endomorfismo dado de E, entonces el endomorfismo es una homotecia.

Número 91. Sean α y β números complejos y $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ la aplicación lineal

$$f(x, y) = (x + \alpha y, \beta x + y).$$

Estudiar la diagonalizabilidad de f en función de α y β.

Número 92. Sea $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ una matriz ***no*** diagonalizable de traza 2. Calcular $\det(A)$.

Número 93. Para cada par de números complejos a, b se considera el endomorfismo $f_{a,b}$ de $\mathbb{C}^3$ cuya matriz respecto de la base estándar es $A_{a,b} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a \\ 3 & 0 & b \end{pmatrix}$. Se pide:

(1) Determinar para qué valores de a, b el endomorfismo es diagonalizable.
(2) Calcular, para cada entero positivo n, la traza del endomorfismo $f_{a,b}^n$.

Número 94. Sea A una matriz diagonalizable. ¿Para qué valores de λ es diagonalizable la matriz $A - \lambda I$?

Número 95. Se consideran los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$:

$$H : \begin{cases} x & -y & +z & -t & = & 0 \\ x & +y & +z & +t & = & 0 \end{cases}, \qquad L : \begin{cases} x & +y & +z & = & 0 \\ x & & +2z & = & 0 \end{cases}$$

(1) Probar que existe una única aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ cuyos valores propios sean 1 y 2, H sea el subespacio propio asociado a 1 y L sea el subespacio propio asociado a 2.

(2) Sea $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forma lineal cuya matriz respecto de las bases estándar es $(1, 1, 1, 2)$. Calcular las coordenadas de $g \circ f$ respecto de la base dual de la estándar.

Número 96.* Sea $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ el endomorfismo cuya matriz respecto de las bases estándar es $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. ¿Para qué valores de λ es f diagonalizable?

Calcular la traza de A^n, $n \geq 1$, para $\lambda = 10$. ¿Cuándo es esa traza < 1000?

Número 97.* Se tienen dos sucesiones (x_n) e (y_n) de números reales tales que

$$x_{n+1} = 6x_n - y_n, \quad y_{n+1} = 3x_n + 2y_n.$$

Calcular $\frac{1}{4}(3x_{n+1} + y_{n+1})$, para $x_1 = 1$, $y_1 = -1$.

Número 98.* Se considera $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3 : (x, y, z) \mapsto (ax - y - z, x - z, by)$. ¿Para qué valores de $a, b \in \mathbb{C}$ tiene el núcleo de f dimensión 1 y, además, f ***no*** es diagonalizable?

Número 99.* ¿Existe alguna aplicación lineal $f : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^9$ con dos subespacios propios H y L tales que $\dim(H) - \dim(L) = 6$ y $\dim(\mathcal{L}(H, L)) = 16$?

Número 100. Consideremos los subespacios de $\mathbb{R}^4$: $K : x = t, y = z$ y $H : y = z = t$. Se pide:

(1) Calcular la matriz, respecto de las bases estándar, de una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ cuyo núcleo sea K y cuya imagen sea H.

(2) ¿Puede construirse f diagonalizable?

(3) Sean λ y μ dos números no nulos tales que el sistema $\lambda x + \lambda z = x + \lambda y = \lambda x + \mu z - 1 = 0$ ***no*** tiene solución, y sea $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ una forma lineal tal que

$$h \circ f = 0, \; h(1, 0, 0, 2) = \lambda, \;\; h(0, 1, 0, 1) = \mu.$$

Calcular $\dim(\ker(h))$ y las coordenadas de h respecto de la base dual de la estándar.

Número 101.* Sea $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ una aplicación lineal y consideremos el polinomio

$$G_m(t) = (1 - t)(2 - t)(3 - t) \cdots (m - t).$$

Probar que si $G_m(f) = 0$, entonces f es diagonalizable. (*Indicación:* Razónese por inducción, utilizando la división $(1-t)\cdots(m-1-t) = Q(t)(m-t)+c$.)

Número 102. Sea $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ una aplicación lineal tal que $\ker(f) \cap \mathrm{im}(f) \neq \{0\}$. ¿Es f diagonalizable?

Número 103.* Si una matriz A es diagonalizable, ¿lo es entonces A^2? Y cuando A^2 es diagonalizable, ¿lo es A necesariamente?

Número 104. Sea A una matriz 2×2 con traza 5 y determinante 4. ¿Es A diagonalizable?

Número 105. Resolver la ecuación en diferencias

$$\begin{cases} x_1 = 1,\ x_2 = -2 \\ x_n = -x_{n-1} + 2x_{n-2} \end{cases}$$

Número 106.* Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal $f(x,y,z) = (2x+\alpha y+\beta z, 2y, \beta x+\beta y+2z)$. Estudiar la diagonalizabilidad de f según los valores de α y β.

Número 107.* ¿Existe alguna matriz regular 7×7 con coeficientes reales cuyo polinomio característico sea $-t^7 + t^3 - t$?

Número 108. Estudiar la diagonalizabilidad de la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(x,y,z) = (x+ay, y+bz, by+az)$$

en función de los valores de $a, b \in \mathbb{R}$. ¿Y si se considera f definida en $\mathbb{C}^3$ con $a, b \in \mathbb{C}$?

Número 109.* Se consideran los vectores $u = (1,-1,0)$, $v = (1,0,-1) \in \mathbb{R}^3$ y un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ tal que $f(u) = 0$, $f(v) = 2v$. Además se sabe que existe otro vector w tal que $f(w) = u$.

(1) Demostrar que $\{u, v, w\}$ es base de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B}'' = \{u, v\}$ lo es de $\mathrm{im}(f)$.

(2) Calcular $\dim(\ker(f))$. Demostrar que las clases de $3v + w$ y $3v - w$ forman una base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3/\ker(f)$.

(3) Sea $\bar{f} : \mathbb{R}^3/\ker(f) \to \mathrm{im}(f)$ el isomorfismo canónico. Calcular la potencia n-ésima de la matriz de $\bar{f}$ respecto de las bases $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{B}''$.

Número 110.* Se consideran los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$:

$$H : \begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}, \qquad L : \begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

¿Existe alguna aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ de la que H y L sean subespacios propios?

Número 111.* Sean $a < b$ dos números reales, y consideremos el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ dado por $f(x,y,z) = (ax + (b-1)z, x + by - z, y - z)$.

(1) Calcular a y b sabiendo que $\ker(f) = \mathrm{im}(f \circ f)$.

(2) Estudiar la diagonalizabilidad de f.

(3) Calcular la traza de la matriz $A = M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B})$, donde $\mathcal{B}$ es la base

$$\{(\pi, e, \pi^e), (0, \pi, e), (0, e, \pi)\}.$$

¿Cuál es la traza de A^n para $n > 1$?

(4) Sea $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una forma lineal cuyo núcleo contiene al de f, y tal que $h(0,0,1) = a+b$. Calcular las coordenadas de $g = h \circ f$ respecto de la base dual de $\{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$.

Número 112. Para cada tres números complejos a, b, c se considera la matriz

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a+b & a-b+c & a-c \\ a-b-c & a & a+b+c \\ a+c & a+b-c & a-b \end{pmatrix}$$

(1) Demostrar que el conjunto V de todas estas matrices es un subespacio vectorial del de las matrices cuadradas de orden 3. Calcular su dimensión y hallar una base suya.

(2) Calcular las coordenadas, respecto de la base dual de la obtenida en el apartado anterior, de la forma lineal traza $\operatorname{tr} : V \to \mathbb{C}$.

(3) Encontrar un subespacio vectorial $W \subset V$ y una aplicación lineal $g : V/W \to \mathbb{C}$ tales que $g \circ \pi = \operatorname{tr}$, donde $\pi : V \to V/W$ es la proyección canónica.

(4) Sean $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base estándar de $\mathbb{C}^3$ y $\mathcal{B} = \{e_1 + e_2 + e_3, e_2, e_3\}$. Calcular la matriz respecto de $\mathcal{B}$ del endomorfismo $f_{a,b,c}$ cuya matriz respecto de la base estándar es $M(a,b,c)$.

(5) Encontrar a, b, c para que $f_{a,b,c}$ no sea diagonalizable.

(6) Calcular para cada $a \in \mathbb{C}$ y cada entero $n \geq 1$, la traza del endomorfismo $f^n_{a,0,a}$.

Número 113. Sea f un endomorfismo diagonalizable de $\mathbb{K}^n$. Demostrar que si H es un subespacio de $\mathbb{K}^n$ tal que $f(H) \subset H$, entonces $f|H$ es un endomorfismo diagonalizable de H.

Número 114. Sean f y g dos endomorfismos diagonalizables de $\mathbb{K}^n$ que conmutan: $f \circ g = g \circ f$. Demostrar que existe una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$ tal que las dos matrices $M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ y $M(g, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ son diagonales.

Número 115. Una matriz cuadrada se llama *nilpotente* si alguna de sus potencias es nula. Sea A una matriz cuadrada de orden n. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

$$(1)\ A^n = 0, \quad (2)\ A \text{ es nilpotente}, \quad (3)\ \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(A^2) = \cdots = \operatorname{tr}(A^n) = 0.$$

(*Indicación:* Calcúlese la traza en la igualdad de Cayley-Hamilton, para ver que (1), (2) o (3) implican $\det(A) = 0$. Tómese entonces un vector de $Ax = 0$ y extiéndase a una base para razonar por inducción.)

Número 116. Demostrar que el sistema

$$\begin{cases} a_1 & + \cdots + & a_n = 0 \\ a_1^2 & + \cdots + & a_n^2 = 0 \\ & \vdots & \\ a_1^n & + \cdots + & a_n^n = 0 \end{cases}$$

no tiene más solución en $\mathbb{C}$ que la trivial.

Número 117. Una matriz de la forma $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, que por encima de la diagonal principal sólo tiene ceros, se denomina *triangular (inferior)*.

(1) Comprobar que el producto de matrices triangulares es de nuevo triangular.

(2) Caracterizar las matrices triangulares nilpotentes. Demostrar que forman un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{n\times n}$, y calcular la dimensión del subespacio en cuestión.

Número 118. ¿Existe alguna matriz real simétrica y nilpotente no nula?

Número 119. Sea A una matriz de orden $n\times n$ con coeficientes complejos que tiene un único autovalor λ, y sea $m \geq 1$ un entero. Calcular la traza de A^m en función, únicamente, de n, λ y m.

Número 120. Sea E el espacio vectorial de los polinomios de grado $\leq n$ en una indeterminada t, con coeficientes en un cuerpo $\mathbb{K}$. Se considera el endomorfismo $f: E \to E$ definido por

$$f: P(t) \mapsto Q(t) = P(t) - P(t-1),$$

y se pide:

(1) Demostrar que f es nilpotente y calcular su índice de nilpotencia. Calcular el polinomio característico de f.

(2) Demostrar que para todo $P(t) \in E$, el polinomio siguiente es idénticamente nulo:

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k P(t-k).$$

(3) Calcular la forma de Jordan de f.

Número 121. Sea E un espacio vectorial de dimensión finita y $f: E \to E$ un endomorfismo tal que $\operatorname{im}(f) = \ker(f^2)$.

(1) Probar que f es nilpotente, y con índice de nilpotencia 3: $f^3 = \mathrm{Id}$ (y $f^2 \neq \mathrm{Id}$).

(2) Mostrar que si un vector $u \notin \ker(f^2)$, entonces los tres vectores $\{u, f(u), f^2(u)\}$ son linealmente independientes.

(3) ¿Se da necesariamente la igualdad $\operatorname{im}(f^2) = \ker(f)$?

(4) ¿Puede ser 5 la dimensión de E?

(5) Calcular la forma de Jordan de f si la dimensión de E es 6.

Número 122. Calcular la forma canónica de Jordan de las matrices siguientes:

$$(1)\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -7 & -2 & 9 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad (2)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (3)\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

consideradas como matrices de números complejos.

Número 123. Para cada una de las matrices A del número enterior, buscar una matriz regular C tal que CAC^{-1} sea de Jordan, y calcular A^n para $n \geq 1$.

Número 124. Demostrar que toda matriz cuadrada es semejante a su traspuesta.

Número 125. De la tabla de Jordan de una matriz cuadrada A de orden 8 se sabe que:

λ	m	ν	dim's
1	?	?	2
2	?	?	$2 < 4$
3	?	?	$1 < 2$

donde para cada valor propio λ denotamos m su multiplicidad, ν la longitud de la cadena de sus subespacios propios generalizados, y dim's la sucesión de dimensiones de esos subespacios. Completar la tabla, y calcular el polinomio característico, el polinomio mínimo y la forma de Jordan de A.

Número 126. ¿Son semejantes las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?

Número 127. Calcular los polinomios característicos y los polinomios mínimos de las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Se trata de matrices semejantes?

Número 128. Sea A una matriz $n \times n$ con coeficientes complejos. Demostrar que A es diagonalizable si y sólo si cada valor propio λ tiene asociado un único subespacio invariante. ¿Cuál es entonces la forma de Jordan?

Número 129. Sea A una matriz $n \times n$ con coeficientes reales. Demostrar que A es diagonalizable como matriz real si y sólo si lo es como matriz compleja y todos sus valores propios son reales.

Número 130. Sea $P(t) = (-1)^n t^n + \cdots$ un polinomio de grado n. Construir una matriz A de la que $P(t)$ sea el polinomio característico.

Número 131.* Sea $f : \mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{C}^{2n}$ una aplicación lineal tal que $\ker(f) = \mathrm{im}(f)$. Calcular su polinomio mínimo y su forma de Jordan.

Número 132.* Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^4$. Sea $\mathcal{B}_e^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*\}$ la base dual de la estándar y pongamos $f_i = e_i^* \circ f$, $1 \leq i \leq 4$. Se sabe que:

(a) $f(1,0,0,0) = (1,0,2,2)$.

(b) La aplicación $g : \mathbb{R}^4/H \to \mathrm{im}(f) : u + H \mapsto f(u)$, donde H es el subespacio $x = y = z$ está bien definida y es un isomorfismo.

(c) Las coordenadas de f_3 y f_4 respecto de la base dual de la estándar son respectivamente $(\gamma, -1, \alpha, \beta)$ y $(2, 1, \delta, \beta)$ para ciertos $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

(d) $\ker(f) \cap \operatorname{im}(f) \neq \{0\}$.
(e) 3 es un valor propio de f.

Se pide:
(1) Calcular α, β, γ y δ, y la matriz $M(f, \mathcal{B}_e, \mathcal{B}_e)$.
(2) Obtener la forma de Jordan de f.

Número 133. Sean f y g dos endomorfismos de $\mathbb{C}^4$ que verifican:
(a) $f|H = g|H$, $f(H) = H$, para $H : x + y - z - t = x + z + t = 0$.
(b) $\operatorname{tr}(f) = 2$, $\operatorname{tr}(g) = 4$ y $\det(g) = 1$.
(c) $f \circ g = g \circ f$.
(d) f ***no*** es diagonalizable.
(e) $f(u) = v$, $f(v) = u$, para $u = (1, 1, 0, 0)$ y $v = (0, 1, 1, 0)$.

Calcular las formas de Jordan de f y de g.

Número 134.* Calcular la forma de Jordan de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ ¿Cuánto vale la traza de A^{2000}?

Número 135. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{C}^2$ tal que $f^k = \mathrm{Id}$ para cierto entero $k \geq 1$. ¿Es f diagonalizable?

Número 136. Establecer una clasificación por semejanza de matrices 3×3 utilizando sólo el polinomio mínimo y el polinomio característico. ¿Es esto posible para matrices de orden > 3?

Número 137.* ¿Existe algún endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ con un valor propio λ para el que se verifique $\dim(\operatorname{im}(f - \lambda I)) = 2$ y $\dim(\operatorname{im}(f - \lambda I)^2) = 0$?

Número 138. Sean $a, b \in \mathbb{C}$ y $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3 : x \mapsto Ax$ la aplicación lineal definida por la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & a-1 & -1 \\ 1 & b & a+1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular a y b sabiendo que $\operatorname{im}(f) = \ker(f \circ f)$, y obtener la forma de Jordan de f.

Número 139. Sea A una matriz cuadrada y $P(t)$ su polinomio mínimo. Demostrar que un polinomio $Q(t)$ cumple $Q(A) = 0$ si y sólo si $P(t)$ divide a $Q(t)$.

Número 140.* Calcular la forma de Jordan de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y la suma $\sum_{n=0}^{2000} (-1)^n A^n$.

Número 141. ¿Es cierto que si los polinomios mínimo y característico de un endomorfismo coinciden, entonces el endomorfismo es diagonalizable?

Número 142.* El polinomio mínimo de un endomorfismo de $\mathbb{C}^n$ es $(-t)^n$. ¿Cuál es su forma de Jordan?

Número 143.* Determinar qué condiciones deben cumplir α y β para que la forma de Jordan de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha\beta \\ 0 & 1 & \alpha^2\beta \\ 0 & \alpha(1+\beta) & 1 \end{pmatrix}$ sea $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Número 144. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{C}^3$ tal que $\ker(f) = \operatorname{im}(f \circ f)$. Calcular su forma de Jordan.

Número 145. Calcular la forma de Jordan de las matrices

$$(1)\quad \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad (2)\quad \begin{pmatrix} 4 & -17 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (3)\quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 6 \\ -6 & -9 & 8 \end{pmatrix}$$

Número 146.* Calcular la forma de Jordan de la matriz $\begin{pmatrix} 2\alpha & -1 & 0 \\ \beta & 2 & 0 \\ 4 & 0 & \beta \end{pmatrix}$ según los valores de los parámetros α y β.

Número 147.* Calcular la forma de Jordan de $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & \lambda & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & \lambda & 0 \\ 1 & a_2 & a_1 & \lambda \end{pmatrix}$ según los valores de a_1, a_2.

Número 148. Sea g un endomorfismo de $\mathbb{C}^3$ cuya forma de Jordan es $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$. Calcular la forma de Jordan de $f : \operatorname{End}(\mathbb{C}^3) \to \operatorname{End}(\mathbb{C}^3) : h \mapsto g \circ h$.

Número 149. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{C}^n$ tal que $f^4 = f + \mathrm{Id}$. ¿Es f diagonalizable?

Número 150. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$ tal que $f^2 = -\mathrm{Id}$, y sea $\widetilde{f}$ su complexificación. Se pide:

(1) Probar que n es par.
(2) Demostrar que $\widetilde{f}$ es diagonalizable.
(3) Calcular la forma de Jordan de f.

Número 151. ¿Cuál es la forma de Jordan de una matriz 3×3 cuyo polinomio mínimo es t^2?

Número 152. Obtener las formas de Jordan de los endomorfismos f de $\mathbb{C}^n$ tales que $f \circ f = f$.

Número 153. Sea $\mathcal{M}_7$ el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 7 con coeficientes complejos, y $\mathbb{C}_7[t]$ el de los polinomios de grado ≤ 7 con coeficientes complejos. Sea $A \in \mathcal{M}_7$ una matriz, cuyo polinomio caracteristico tiene por raíces 0 y 1, ésta última con multiplicidad 4; además, el rango de A es 5 y el de $(A - I)^2$ es 4. Calcular el rango de $A - I$ y la dimensión de la imagen de la aplicación lineal $\mathbb{C}_7[t] \to \mathcal{M}_7 : P \mapsto P(A)$.

Número 154. Sea X el conjunto formado por las matrices cuadradas A con coeficientes complejos cuyo polinomio característico es $P(t) = t^2(t-1)^4$ y tales que $\mathrm{rg}(A) = 5$, $\mathrm{rg}(A-I) = 4$. Calcular el número de clases de equivalencia de matrices de X para la semejanza de matrices, y exhibir una matriz representante de cada clase.

Número 155. Sea J una matriz de Jordan de orden n del tipo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

Demostrar que existe un polinomio $F(t) \in \mathbb{C}[t]$ tal que $F(J)^2 = J$. (*Indicación:* Escribir $J = I + N$, con N nilpotente, y recordar el desarrollo en serie $\sqrt{1+t} = 1 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{8}t^2 - \cdots$.)

Número 156. Generalizar el ejercicio anterior para $J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & \lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$ con $\lambda \neq 0$.

Número 157. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{C}^{2n}$ tal que $\ker(f^n) = \mathrm{im}(f^n)$. Calcular su forma de Jordan.

Número 158. Calcular la traza de la inversa de una matriz A cuyo polinomio característico es

$$P_A(t) = (2-t)^5(-4-t)^4,$$

sabiendo que los rangos de las matrices $A + 4I$, $A - 2I$ y $(A-2I)^2$ son, respectivamente $8, 7$ y 5. (I denota la matriz identidad.)

Número 159. (1) Probar que si f es un endomorfismo de un espacio vectorial complejo E de dimensión n, su polinomio característico es de la forma

$$P_f(t) = (-1)^n t^n + (-1)^{n-1}\mathrm{tr}(f)t^{n-1} + \cdots + \det(f).$$

(2) Sea g otro endomorfismo de E. ¿Tienen $f \circ g$ y $g \circ f$ los mismos valores propios?
(3) ¿Es cierto que $f \circ g$ y $g \circ f$ tienen el mismo polinomio característico? ¿Y si $\dim(E) \leq 3$?

Número 160. ¿Existe algún endomorfismo f de $\mathbb{C}^n$ tal que $\ker(f^n) = \mathrm{im}(f^{n-1})$?

Número 161. Demostrar que toda matriz compleja A con $\det(A) \neq 0$ tiene raíz cuadrada.

Número 162. Utilizar el *método de Gram-Schmidt* para construir una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$ (con el producto escalar euclídeo) a partir de la base formada por los cuatro vectores siguientes:

$$(1,0,0,0),\ (1,1,0,0),\ (1,1,1,0)\ \text{ y }\ (1,1,1,1).$$

Número 163. Demostrar que una matriz A con coeficientes reales tiene el mismo rango que la matriz producto A^tA.

Número 164. Sean v, w vectores de $\mathbb{R}^3$, el primero no nulo. Demostrar que existe un tercer vector u tal que $u \times v = w$ si y sólo si $\langle v, w\rangle = 0$. Determinar entonces todos los vectores u que cumplen esa condición $u \times v = w$.

Número 165. Sea E el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2 con coeficientes reales.

(1) Comprobar que la aplicación

$$\langle\ ,\ \rangle : E \times E \to \mathbb{R} : (A, B) \mapsto \operatorname{tr}(AB^t)$$

define un producto escalar en E.

(2) Hallar una base ortonormal de E para ese producto.

(3) Construir una isometría entre E con ese producto y $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar euclídeo.

Número 166. Encontrar una base ortonormal, respecto del producto escalar euclídeo, del subespacio H de $\mathbb{R}^4$ de ecuaciones $x - y + z - 2t = y + z = 0$, y otra de su complemento ortogonal $H^\perp$. Calcular las proyecciones ortogonales sobre H y $H^\perp$ del vector $(1, 1, 1, 1)$.

Número 167. Sea V el espacio vectorial de los polinomios de $\mathbb{R}[t]$ de grado ≤ 2. Demostrar que la aplicación

$$F : V \times V \to \mathbb{R} :\ (f, g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

es una forma bilineal simétrica, que representaremos como un producto: $F(f, g) = \langle f, g\rangle$. Se pide además:

(1) Calcular la matriz de F respecto de la base $\{1, t, t^2\}$.

(2) Encontrar una base ortonormal del subespacio generado por 1 y t.

(3) Construir una base del subespacio $H \subset V$ formado por los $g \in V$ tales que $\langle g, 1 + 2t\rangle = 0$.

(4) Comprobar que $V = H \oplus \mathcal{L}[1 + t^2]$.

(5) Encontrar una base de V respecto de la cual la matriz de F sea diagonal.

Número 168. Sea F una forma bilineal simétrica definida en un espacio vectorial V. Si H es un subespacio de V, denotaremos $H^\perp = \{v \in V : F(u, v) = 0 \text{ para todo } u \in V\}$. Se pide demostrar lo siguiente:

(1) $H^\perp$ es un subespacio vectorial de V.

(2) Si $u_1, \ldots, u_r$ generan H, entonces $v \in H^\perp$ si y sólo si $F(u_1, v) = \cdots = F(u_r, v) = 0$.

(3) Si $H \subset L$, entonces $H^\perp \supset L^\perp$.

(4) $(H + L)^\perp = L^\perp \cap H^\perp$ y $L^\perp + H^\perp \subset (L \cap H)^\perp$.

(5) Si F es no degenerada, o lo es $F|H \times H$, entonces $\dim(H) + \dim(H^\perp) = \dim(V)$.

(6) Siempre $H \subset (H^\perp)^\perp$, y la igualdad se da en las hipotesis de (5).

Número 169. Sean F la forma bilineal simétrica de $\mathbb{C}^3$ cuya matriz respecto de la base estándar es $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, y H el subespacio $x = y$. Calcular $\dim(H^\perp)$. ¿Es $H = (H^\perp)^\perp$?

Número 170. Se consideran en $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ las dos matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exhibir dos matrices X, Y tales que X^tAX e Y^tBY sean diagonales.

Número 171. Clasificar por congruencia las siguientes matrices reales:

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (2) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1/3 \end{pmatrix} \qquad (3) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Número 172.* Sean A y B dos matrices simétricas reales congruentes. ¿Son congruentes A^2 y B^2?

Número 173. Sea F una forma bilineal simétrica en un espacio vectorial real V de dimensión n. Se dice que F es

$$\begin{cases} \textit{semidefinida positiva} \\ \textit{definida positiva} \\ \textit{semidefinida negativa} \\ \textit{definida negativa} \end{cases} \quad \text{cuando} \quad \begin{cases} F(u,u) \geq 0 \\ F(u,u) > 0 \\ F(u,u) \leq 0 \\ F(u,u) < 0 \end{cases} \quad \text{para todo vector no nulo } u \in V.$$

Probar lo siguiente:

(1) F es semidefinida positiva si y sólo si $\operatorname{rg}(F) = \operatorname{sg}(F)$.
(2) F es definida positiva si y sólo si $\operatorname{sg}(F) = n$.
(3) F es semidefinida negativa si y sólo si $\operatorname{sg}(F) = 0$.
(4) F es definida negativa si y sólo si $\operatorname{rg}(F) = n$ y $\operatorname{sg}(F) = 0$.

Número 174. Sea F una forma bilineal simétrica de $\mathbb{R}^n$, y D la matriz de F respecto de una base que la diagonaliza. Demostrar:

(1) El número de elementos positivos de D es la dimensión máxima de los subespacios $H^+ \subset \mathbb{R}^n$ tales que $F|H^+ \times H^+$ es definida positiva.

(2) El número de elementos negativos de D es la dimensión máxima de los subespacios $H^- \subset \mathbb{R}^n$ tales que $F|H^- \times H^-$ es definida negativa.

Número 175. Demostrar que una matriz con coeficientes reales A es la matriz de una forma bilineal simétrica semidefinida positiva si y sólo si existe otra matriz cuadrada C tal que $A = C^tC$.

Número 176. Sea C una matriz cuadrada regular con coeficientes reales.

(1) Demostrar que existen una matriz simétrica definida positiva M y una matriz ortogonal P tales que $C = NP$.

(2) Demostrar que existen una matriz simétrica definida positiva N y una matriz ortogonal Q tales que $C = QN$.

Número 177. Sean $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica definida positiva y $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación lineal tal que $F(h(u), h(v)) = F(u, v)$ para cualesquiera $u, v \in \mathbb{R}^n$.

(1) Probar que h es un isomorfismo.

(2) Probar que los únicos posibles valores propios de h son ± 1.

(3) Sean $\mathcal{B}$ una base de $\mathbb{R}^n$, $M = M(F, \mathcal{B})$ y $A = M(h, \mathcal{B}, \mathcal{B})$. ¿Qué relación hay entre M y A?

Número 178. Sean F una forma bilineal simétrica definida (positiva o negativa) y $u_1, \dots, u_k$ vectores no nulos tales que $F(u_i, u_j) = 0$ si $i \neq j$. Deducir que dichos vectores son linealmente independientes.

Número 179. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, encontrar otra ortogonal C tal que C^tAC sea diagonal.

Número 180. Sea $F : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forma bilineal simétrica

$$F((x, y, z, t), (x', y', z', t')) = axx' + 6(xy' + x'y) + 9yy' - azz' - tt',$$

donde a es un parámetro real. Estudiar la signatura y el rango de F según ese parámetro.

Número 181.* ¿Existe alguna matriz simétrica real 3×3 cuyos subespacios propios sean $H : x + y + z = x + z = 0$ y $L : x - 2y = 0$?

Número 182.* Clasificar por congruencia la matriz real $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & 0 \end{pmatrix}$, según los valores del parámetro λ.

Número 183. ¿Son congruentes una matriz simétrica real A y su cubo A^3?

Número 184. Se considera la forma bilineal F de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz respecto de la base estándar es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular su signatura, y construir una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ respecto de la cual la matriz de F sea diagonal.

Número 185. (1) Demostrar que cada terna de números reales x, y, z cumple la desigualdad

$$(x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2).$$

¿Para qué valores de x, y, z la desigualdad anterior es una igualdad?

(2) Demostrar que el conjunto $M \subset \mathbb{R}^3$ de ecuaciones

$$3(x^2 + y^2 + z^2) = 1,\ x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 = xyz(x + y + z)^3$$

es finito, y calcular sus elementos.

Número 186.* Sean $n > 1$ un entero, I_n la matriz identidad de orden n, y S_n el espacio vectorial formado por las matrices simétricas de orden n con coeficientes reales.

(1) Comprobar que

$$\langle\ ,\ \rangle : S_n \times S_n \to \mathbb{R} : (A,B) \mapsto \operatorname{tr}(AB)$$

es una forma bilineal simétrica, calcular $\langle I_n, I_n\rangle$, y demostrar que $\langle\ ,\ \rangle$ es definida positiva.

(2) Mostrar que para cada matriz simétrica $A \in S_n$ se cumple la desigualdad $\operatorname{tr}(A)^2 \leq n\operatorname{tr}(A^2)$, y que la igualdad se da si y sólo si $A = \lambda I_n$ para un número real λ.

(3) Probar que para cualesquiera números reales $x_1, \dots, x_n$ se cumple la desigualdad

$$(x_1 + \cdots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + \cdots + x_n^2).$$

¿Cuándo se da la igualdad?

(4) Calcular el rango y la signatura de la forma bilineal simétrica

$$\varphi : S_n \times S_n \to \mathbb{R} : (A,B) \mapsto \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B) - n\operatorname{tr}(AB).$$

¿Para qué valores de n el rango es 104?

Número 187.* Dada la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, encontrar una matriz ortogonal C tal que C^tAC sea diagonal.

Número 188.* Si F es una forma bilineal simétrica no degenerada, ¿pueden existir vectores no nulos u tales que $F(u,u) = 0$?

Número 189.* Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal

$$f(x,y,z) = (\alpha x + \beta y, (1+\beta^2)x + y, \alpha^2 x + \alpha z),$$

y F una forma bilineal simétrica de $\mathbb{R}^3$ tal que:

(a) $\operatorname{sg}(F) = 2$.

(b) $F|\operatorname{im}(f) \times \operatorname{im}(f)$ es definida negativa.

Se pide:

(1) Calcular los valores de α y β.

(2) Obtener la forma de Jordan J de f.

(3) Construir una matriz C tal que $J = C^{-1}M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B})C$, donde $\mathcal{B}$ es la base de $\mathbb{R}^3$ formada por $(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)$.

Número 190.* Determinar para qué valores del número real a existen dos formas lineales $f(x,y,z)$ y $g(x,y,z)$ tales que

$$Q(x,y,z) = 8x^2 - 6xy + y^2 - 2xz + az^2 = f(x,y,z)^2 - g(x,y,z)^2,$$

y factorizar $Q(x,y,z)$ en ese caso.

Número 191. ¿Es cierto que dos matrices simétricas reales semejantes son congruentes? ¿Y el recíproco?

Número 192. Sea A una matriz simétrica real 3×3 y $H : x+y+z = 0$ uno de sus subespacios invariantes. Calcularlos todos.

Número 193. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$ cuya matriz respecto de las bases estándar es simétrica (es decir, un endomorfismo *autoadjunto).* Demostrar que $\mathbb{R}^n = \operatorname{im}(f) \oplus \ker(f)$, y esta suma directa es ortogonal.

Número 194. Denotamos por $\mathcal{B}_e$ la base estándar de $\mathbb{C}^n$. Sea $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ un endomofismo y sea $A = M(f, \mathcal{B}_e, \mathcal{B}_e)$. Definimos otro g mediante la matriz $M(g, \mathcal{B}_e, \mathcal{B}_e) = \bar{A}^t$. Se supone que $f \circ g = g \circ f$. Demostrar lo siguiente:

(1) $\ker(f) = \ker(g)$.

(2) f y g son diagonalizables.

(*Indicación:* Utilícese que si $z \in \mathbb{C}$ y $\bar{z}^t z = 0$, entonces $z = 0$.)

Número 195.* Sea F la forma bilineal simétrica cuya matriz respecto de la base estándar es $A = \begin{pmatrix} 1 & \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \cos\alpha & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$. Calcular la forma canónica de F y construir una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ que diagonalice F.

Número 196.* Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^5$ una aplicación lineal suprayectiva. Se considera la forma bilineal simétrica $F(x, y) = \langle f(x), f(y) \rangle$ (donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto escalar euclídeo en $\mathbb{R}^5$). Calcular n, sabiendo que la signatura de F coincide con $\dim(\ker(f))$.

Número 197.* Obtener las posibles formas canónicas de $\begin{pmatrix} 0 & x+y & 0 \\ x+y & 0 & x \\ 0 & x & y \end{pmatrix}$, respecto de la congruencia de matrices simétricas reales, según los valores de los parámetros $x, y \in \mathbb{R}$.

Número 198. Sea F la forma bilineal simétrica de $\mathbb{R}^3$ siguiente:

$$((x, y, z), (x', y', z')) \mapsto xz' - yy' + zx'.$$

Encontrar una base ortonormal $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $M(F, \mathcal{B})$ sea diagonal, y clasificar F.

Sea $u_0 \in \mathbb{R}^3$ un vector no nulo tal que $F(u_0, u_0) = 0$. Demostrar que $\{u_0, e_2, u_0 \wedge e_2\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ (para la definición de $\wedge$ veáse el número **37**).

Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : u \mapsto u_0 \wedge u$. Calcular la forma de Jordan J de f. Consideremos por otra parte la matriz A de f respecto de las bases $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ y $\mathcal{B}' = \{e_3, e_2, e_1\}$. ¿Para qué vectores u_0 es J la forma de Jordan de A?

Número 199. Se considera el subespacio vectorial H de $\mathbb{R}^4$ de ecuación $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$, y se pide:

(1) Obtener una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$ que contenga un número máximo de vectores de H.

(2) Calcular la longitud mínima de las proyecciones ortogonales sobre H de los vectores unitarios de $\mathbb{R}^4$ que forman un ángulo de 60º con los vectores $(1, 0, 0, 0)$ y $(0, 1, 0, 0)$.

Número 200. Sea A la matriz, respecto de la base estándar $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, del endomorfismo autoadjunto f tal que

(1) Tiene $2e_1 - 2e_2 - e_3$ por vector propio.

(2) $f(e_1) = 3e_1 + 2e_2 + 2e_3$ y $f(e_2) = 2e_1 + 2e_2$.

Probar que el conjunto $H = \{u \in \mathbb{R}^3 : uAu^t = 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ y hallar una base suya.

Número 201. Sea V el espacio vectorial $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Demostrar que

$$F : V \times V \to \mathbb{R} : (A, B) \mapsto \operatorname{tr}(A^t M B)$$

es una forma bilineal simétrica, calcular su matriz respecto de la base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

y clasificarla.

Número 202. Sea A una matriz antisimétrica de orden n con coeficientes reales, y consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : x \mapsto Ax$.

(1) Comprobar que $\mathbb{R}^n$ es suma directa del núcleo y la imagen de f.

(2) Calcular la diferencia entre el rango de A y el de A^2.

Número 203. Para cada número real t se considera la matriz $A_t = \begin{pmatrix} t & t+1 & 1 \\ t+1 & t+3 & 2 \\ 1 & 2 & t+2 \end{pmatrix}$.

(1) Clasificar todas esas matrices, respecto de la relación de congruencia de matrices de números reales.

(2) Encontrar elementos f, g del espacio dual de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz + 4yz = f(x, y, z)^2 + g(x, y, z)^2.$$

(3) Sea φ la forma bilineal de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz respecto de la base estándar es A_t. ¿Existe un plano vectorial $E \subset \mathbb{R}^3$ que coincida con su subespacio conjugado respecto de φ?

Número 204. Sea A una matriz $n \times n$ con coeficientes reales, sean λ, μ el menor y el mayor de sus autovalores, y fijemos un vector $u \in \mathbb{R}^n$. Probar que

$$\lambda \|u\|^2 \le \varphi(u, u) \le \|u\|^2,$$

donde $\|\cdot\|$ denota la norma euclídea, y φ es la forma bilineal cuya matriz respecto de la base estándar es A.

Número 205. Calcular el rango de una matriz simétrica con coeficientes en $\mathbb{R}$ cuyo polinomio característico es $t^2(t-1)^2$.

Número 206. ¿Existe alguna matriz simétrica de números reales cuyo polinomio característico sea $t^5 + 10t^4 + t^2$? ¿Y de números complejos?

Número 207. Sea f un endomorfismo autoadjunto de $\mathbb{R}^n$ respecto del producto escalar usual, que denotamos $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

(1) Demostrar que la condición: *todos los autovalores de f son no nulos y del mismo signo,*

eqeuivale a la condición: *no existen vectores no nulos* $u \in \mathbb{R}^n$ *tales que* $\langle u, f(u)\rangle = 0$.

(2) Supongamos $n = 2$ y el determinante de f negativo. Demostrar que existen dos vectores unitarios independientes $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^2$ tales que $\langle u_1, f(u_1)\rangle = \langle u_2, f(u_2)\rangle = 0$. Probar entonces que $u_1 + u_2$ y $u_1 - u_2$ son vectores propios de f.

Número 208. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ ciuya matriz respecto de la base estándar es

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Demostrar que f es una isometría y clasificarla. Determinar todos los planos $H \subset \mathbb{R}^3$ que coinciden con su imagen mediante f.

Número 209. Se considera en $\mathbb{R}^3$ la estructura usual de espacio euclídeo. Demostrar que el endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz respecto de la base estándar es

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}-2}{4} & \frac{-\sqrt{2}-2}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{-\sqrt{2}-2}{4} & \frac{\sqrt{2}-2}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

es un movimiento helicoidal, y determinar su eje y su ángulo.

Número 210. Sea g una isometría vectorial de $\mathbb{R}^3$ de la que 1 no es autovalor. Demostrar que g^2 es un giro.

Número 211. Se consideran las tres rectas siguientes de $\mathbb{R}^3$:

$$r_1 : y = z = 0, \quad r_2 : x = 3z - 4y = 0, \quad \text{y} \quad r_3 : 3x + 5y = 3y + 5z = 0.$$

(1) Calcular los ángulos que forman los pares de rectas $(r_1, r_2), (r_1, r_3)$ y (r_2, r_3).

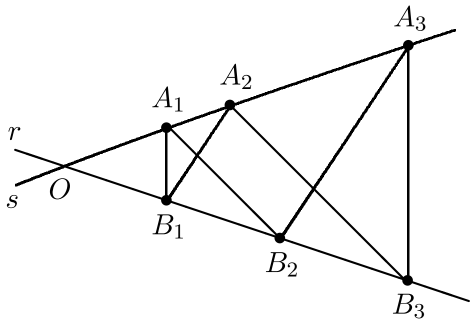
(2) ¿Existe una isometría vectorial de $\mathbb{R}^3$ que transforme r_1 en r_3 y deje fijos todos los puntos de r_2? En caso afirmativo, dígase cuántas hay y de qué tipo son.

(3) Sea f una de las isometrías del apartado anterior. Calcular el complemento ortogonal de la imagen por f del plano generado por r_1 y r_3.

Número 212. Sean $P = (a, b, c)$ y $P' = (a', b', c')$ dos puntos distintos de $\mathbb{K}^3$. Probar que existe una única recta afín que contiene a ambos. Obtener unas ecuaciones implícitas y unas ecuaciones paramétricas de esa recta.

Número 213. Sean $P = (a, b, c)$, $P' = (a', b', c')$ y $P'' = (a'', b'', c'')$ tres puntos de $\mathbb{K}^3$. ¿Qué condición deben verificar para que exista un plano y sólo uno que contenga a los tres? Encontrar entonces unas ecuaciones de dicho plano.

Número 214. Se consideran dos rectas coplanarias r, s que se cortan en un punto O, y puntos $A_1, A_2, A_3 \in r$, $B_1, B_2, B_3 \in s$. Probar que si $A_1B_2 || A_2B_3$ y $A_2B_1 || A_3B_2$, entonces $A_1B_1 || A_3B_3$.



Número 215. Consideremos la variedad afín A de $\mathbb{R}^5$ cuyas ecuaciones paramétricas respecto de cierto sistema de referencia $\mathcal{R}$ son:

$$\begin{cases} x = 1 + \alpha + \beta + 3\gamma \\ y = 6 + 2\beta + 2\gamma \\ z = -\alpha - \beta - 3\gamma \\ t = 1 + \alpha + 2\gamma \\ u = \beta + \gamma \end{cases}$$

Calcular la dimensión de A, su dirección, y unas ecuaciones implícitas respecto de $\mathcal{R}$.

Número 216. Calcular unas ecuaciones paramétricas de la variedad afín de $\mathbb{R}^4$

$$A : \begin{cases} x - y + z - t = 1 \\ x + y + 2z + t = 2 \\ x - 3y - 3t = 0 \end{cases}$$

¿Cuáles son la dimensión y la dirección de A?

Número 217. Calcular unas ecuaciones paramétricas de la intersección de los dos planos siguientes de $\mathbb{C}^3$:

$$\pi : \begin{cases} x = 1 - \lambda - \mu \\ y = 2 - \lambda + 2\mu \\ z = -\lambda \end{cases} , \qquad \pi' : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda - \mu \\ y = 1 + \mu \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

¿Qué dimensión y que dirección tiene esa intersección?

Número 218. Se consideran los planos π, π' del número **217**, y el plano $\pi'' \subset \mathbb{C}^3$ de ecuación: $x - y - z = 1$. Calcular la intersección de los tres planos. ¿Cuál es la ecuación del plano paralelo a $\pi \cap \pi'$ y $\pi \cap \pi''$ que pasa por el punto $(1, 1, -1)$?

Número 219. ¿Cuál es la recta que pasa por el punto $(0, 1, 0)$ y es paralela a los planos $\pi : x + y + 2z - 4 = 0$ y $\pi' : x - y - z - 1 = 0$?

Número 220. (1) Estudiar la posición relativa de las rectas

$$r : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases} , \qquad s : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

(2) Hallar las ecuaciones de una recta que pase por el punto $(0,1,0)$, y corte a r y a s. ¿Hay más de una recta que cumpla estas condiciones?

(3) Hallar las ecuaciones de una recta paralela a los planos $\pi : 2x+y+3z=4$ y $\pi' : x+y+2z=4$ que corte a r y a s. ¿Hay más de una?

Número 221.* ¿Es $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{Q}^3 : x^2+y^2+z^2=1\}$ una variedad afín de $\mathbb{Q}^3$?

Número 222. (1) Demostrar que tres puntos de $\mathbb{K}^n$ son afínmente independientes si y sólo si no están alineados.

(2) Demostrar que cuatro puntos de $\mathbb{K}^n$ son afínmente independientes si y sólo si no son coplanarios.

Número 223. Calcular las ecuaciones implícitas en coordenadas baricéntricas de todas las variedades de los números anteriores.

Número 224. Calcular la dimensión de la variedad afín de $\mathbb{R}^4$ dada por

$$A : \begin{cases} x &= \lambda_0 & +3\lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 \\ y &= -2\lambda_0 & +\lambda_1 & +\lambda_2 & +2\lambda_3 \\ z &= \lambda_0 & -2\lambda_1 & +\lambda_2 & +3\lambda_3 \\ t &= & 2\lambda_1 & +3\lambda_2 & +6\lambda_3 \\ 1 &= \lambda_0 & +\lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 \end{cases}$$

Encontrar ecuaciones paramétricas e implícitas de A.

Número 225. Consideramos las variedades afines de $\mathbb{R}^4$

$$A : \begin{cases} x &= \lambda_0 & +\lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 \\ y &= & 2\lambda_1 & +\lambda_2 & +3\lambda_3 \\ z &= & -\lambda_1 & & -\lambda_3 \\ t &= & 2\lambda_1 & +\lambda_2 & +3\lambda_3 \\ 1 &= \lambda_0 & +\lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 \end{cases}, \qquad B : \begin{cases} x &= 2\lambda_0 & +2\lambda_1 & \\ y &= \lambda_0 & +2\lambda_1 & \\ z &= 0 & & \\ t &= & \lambda_1 & +\lambda_2 \\ 1 &= \lambda_0 & +\lambda_1 & +\lambda_2 \end{cases}$$

Se pide:

(1) Calcular las dimensiones y las direcciones de A y B.

(2) Estudiar la posición relativa de A y B.

(3) Calcular la variedad afín generada por A y B.

Número 226. Sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3 : (x,y,z)\mapsto(x',y',z')$ la afinidad dada por

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Obtener unas ecuaciones en coordenadas baricéntricas de la imagen del plano $\pi : x-y+2z=1$.

Número 227. Sean $f:\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^m$ una trasformación afín, $t_1,\dots,t_r$ escalares que suman 1, y $p_1,\dots,p_r$ puntos de $\mathbb{K}^n$. Demostrar la igualdad

$$f(t_1p_1+\cdots+t_rp_r)=t_1f(p_1)+\cdots+t_rf(p_r).$$

Número 228. Demostrar que si $f:\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^n$ es una afinidad, el conjunto de sus *puntos fijos*: $F(f)=\{x\in\mathbb{K}^n:\ f(x)=x\}$ es una variedad afín, a menos que sea el conjunto vacío.

Número 229. Sean a y b números reales, $A=\begin{pmatrix} a+1 & 0 & -1\\ a & 1 & -1\\ 0 & a & 1+b\end{pmatrix}$, y $M=A^t+A$.

(1) Calcular a y b sabiendo que 1 es el único valor propio (complejo) de A, y que M es congruente con la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

(2) Obtener las formas de Jordan de A y A^2.

(3) Sea T la traslación: $(x,y,z)\mapsto(x,y,z+1)$ y $h:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por $M(h,\mathcal{B}_e,\mathcal{B}_e)=A$. Encontrar un plano vectorial $\pi\subset\mathbb{R}^3$ invariante por la afinidad $f=T\circ h$.

Número 230. ¿Existe alguna afinidad de $\mathbb{R}^3$ que transforme el conjunto $C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2=1\}$ en el conjunto $L=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x=y=z\}$?

Número 231. (1) Sean A una matriz cuadrada de orden n e I la matriz identidad de ese mismo orden, con coeficientes en un cuerpo $\mathbb{K}$. Sean f y g los endomorfismos de $\mathbb{K}^n$ cuyas matrices son, respectivamente, $A-I$ y $A+I$. Demostrar que $\ker(g)\subset\operatorname{im}(f)$.

(2) Sea $\varphi:\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^n$ una aplicación afín sin puntos fijos. Probar que φ^2 tampoco los tiene.

Número 232. Determinar la matriz respecto del sistema de referencia estándar de la trasformación afín del plano que cumple

$$f(1,1)=(-1,0),\ f(0,2)=(1,1),\ f(-1,2)=(0,-1).$$

Número 233. Determinar los puntos fijos y las rectas invariantes de la trasformación afín del plano dada por: $f(x,y)=(3-x+y,\ 6-4x+3y)$.

Número 234. Calcular la matriz respecto del sistema de referencia estándar de la trasformación afín del espacio que cumple

$$f(0,0,0)=(1,1,-1),\ f(1,1,0)=(-2,-2,-1),\ f(1,0,1)=(0,1,0),\ f(0,0,1)=(2,2,1).$$

Número 235. Sean A_1,A_2,A_3 tres puntos no alineados del plano $\mathbb{R}^2$, y M_1,M_2,M_3 los puntos medios de los lados A_2A_3, A_1A_3, A_1A_2 del triángulo de vértices A_1,A_2,A_3. Para cada punto X del plano se consideran sus simétricos X_1,X_2,X_3 respecto de M_1,M_2,M_3. Demostrar que:

(1) Las rectas A_1X_1, A_2X_2, A_3X_3 son concurrentes.

(2) La aplicación

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3:\ X\mapsto A_1X_1\cap A_2X_2\cap A_3X_3$$

es una afinidad. ¿De qué aplicación se trata?

Número 236. Calcular los puntos fijos y las rectas y los planos invariantes de la trasformación afín del espacio definida por: $f(x,y,z)=(1-5x+2y-7z,\ -1+2x-y+3z,\ 4x+5z)$.

Número 237. Demostrar que si P es un punto, A una variedad afín de $\mathbb{R}^n$ y $P \notin A$, entonces existe una única recta r perpendicular a A que pasa por P. Esto permite definir la distancia del punto a la variedad mediante $\operatorname{dist}(P, A) = \operatorname{dist}(P, r \cap A)$.

Número 238. Calcular la distancia $\operatorname{dist}(P, A)$ en los casos siguientes:
(1) $P = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $A : \alpha x + \beta y = \gamma$.
(2) $P = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $A : \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$.
¿Como se generalizan a $\mathbb{R}^n$ las fórmulas obtenidas?

Número 239. Hallar la perpendicular común a las rectas r y s del número **220**.

Número 240. Construir un cubo en $\mathbb{R}^3$ que tenga los puntos $(1, 1, -1), (2, 2, -1), (2, 0, -1)$ por vértices.

Número 241. Construir un octaedro regular en $\mathbb{R}^3$ cuyo baricentro sea el origen, el punto $(1, 1, 0)$ sea un vértice, y $x = y$ sea un plano diagonal.

Número 242. Calcular las coordenadas baricéntricas del baricentro del triángulo de $\mathbb{R}^3$ cuyos vértices son $(1, 2, 0), (2, 1, 1)$ y $(0, 0, 2)$

Número 243. Construir un tetraedro en $\mathbb{R}^3$ que tenga los puntos $(0, 0, 0)$ y $(1, 1, 0)$ por vértices, y una cara en el plano $x = y$.

Número 244. Hallar en $\mathbb{R}^3$ una recta perpendicular al plano $x = 0$, y que corte a las rectas

$$r : \begin{cases} x & -y & +z & = & 1 \\ x & & +z & = & 0 \end{cases}, \qquad s : \begin{cases} x & +2y & & = & 1 \\ & 2y & -z & = & 1 \end{cases}$$

¿Cuántas rectas hay que cumplan estas condiciones?

Número 245. Dados en $\mathbb{R}^3$ el punto $P = (1, 1, 0)$ y los dos planos

$$\pi : \, 2x + y + z = 0 \, , \qquad \pi' : \begin{cases} x & = & 1 & -\lambda & +\mu \\ y & = & 2 & +\lambda & -2\mu \\ z & = & 1 & \lambda & +\mu \end{cases},$$

se pide hallar:
(1) Una recta r que pase por P y sea perpendicular a π.
(2) Una recta r' que pase por P y sea perpendicular a π'.
(3) Una recta s perpendicular común a r y r'.
Sin necesidad de hacer los cálculos, ¿cuál es la única solución esperable?

Número 246. Calcular el área del triángulo de $\mathbb{R}^3$ de vértices $P_i = (a_i, b_i, c_i)$, $i = 1, 2, 3$.

Número 247.* Dados el plano $\pi : x + 4y - 8z + 36 = 0$ y la recta $r : x + 4y - 8 = z - 1 = 0$, se pide
(1) Estudiar la posición relativa de π y r.
(2) Calcular unas ecuaciones implícitas de un plano perpendicular a π que contenga a r. ¿Hay más de uno?

Número 248.* Se consideran las siguientes subvariedades afines de $\mathbb{R}^4$:

$$\pi : x - z = 2,\ y - t = 0\,, \quad r : x = 1, 2y - z = -2, t = 1.$$

Calcular unas ecuaciones implícitas de la recta perpendicular a π y a r.

Número 249. Sean A, B, C los puntos de intersección de los ejes coordenados de $\mathbb{R}^3$ con el plano $x + 2y + 3z = 6$, y sea D un punto del plano $x + 2y + 3z = -4$. Probar que el volumen del tetraedro de vértices A, B, C, D no depende del punto D elegido, y calcular dicho volumen.

Número 250. Sean A, B, C, D los vértices de un tetraedro regular T de arista 1.

(1) Probar que AD y BC son ortogonales.

(2) Sean $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$ los puntos medios de las aristas AB, BC, CA, CD, AD, BD, respectivamente. Probar que el segmento que une cualesquiera dos puntos M_i, M_j distintos es paralelo a cada plano π paralelo a las aristas AD y BC.

(3) Demostrar que el cuadrilátero Γ de vértices M_1, M_3, M_4, M_6 es un cuadrado.

(4) Demostrar que para cada plano π paralelo a las aristas AD y BC, el cuadrilátero $T \cap \pi$ es un rectángulo con el mismo perímetro que Γ.

(5) Determinar el plano π paralelo a AD y BC tal que el área de $T \cap \pi$ es máxima, y calcular dicha área.

Número 251.* Sea α un número real dado. Se tiene una afinidad f de $\mathbb{R}^3$ que transforma el punto $(0, 0, 2)$ en el punto $(0, 1, 3)$, y deja fijos todos los puntos de las rectas

$$r : \begin{cases} 2x & +\alpha y & & = & 0 \\ x & -2y & +z & = & 0 \end{cases}, \qquad s : \begin{cases} x & -\alpha y & +2z & = & 1 \\ x & & +z & = & 1 \end{cases}.$$

Calcular α y la matriz de f respecto del sistema de referencia estándar.

Número 252.* Se consideran las dos rectas de $\mathbb{R}^3$

$$r : \begin{cases} 2x & -y & & = & 0 \\ \alpha x & & -z & = & -1 \end{cases}, \qquad s : \begin{cases} x & +2y & +z & = & 1 \\ x & +y & & = & -1 \end{cases}.$$

Calcular α sabiendo que la perpendicular común a ambas es una recta invariante por la afinidad de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz respecto del sistema de referencia estándar es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Número 253. Se tienen en $\mathbb{R}^3$ los datos siguientes: (a) el punto $P = (-2, 1, 3)$, (b) el plano $\pi : 2x + y + 2z = 5$, y (c) las rectas

$$r : x - 1 = y + 3 = -2z\,, \qquad s : \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{5}\,, \qquad t : \frac{x+1}{3} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z-2}{2}\,,$$

y se considera la simetría central $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ respecto del punto P. Se pide:

(1) Ecuación implícita de $\pi' = f(\pi)$.

(2) Ecuaciones de la recta r' paralela a r y que corta a s y a t.

Número 254. ¿Existe alguna isometría del plano que transforme el conjunto $x^2 + y^2 = 1$ en el conjunto $(x-2)^2 + (y-2)^2 = \frac{1}{4}$?

Número 255.* ¿Existe alguna isometría del plano que induzca una traslación en el eje $x = 0$, y transforme el punto $(1, 0)$ en el origen?

Número 256.* Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una biyección que transforma rectas en rectas y conserva la perpendicularidad. Demostrar que f es una afinidad.

Número 257. Calcular la matriz respecto del sistema de referencia estándar de la aplicación afín $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que transforma la recta $y = z - 1 = 0$ en la recta $x = z - 1 = 0$, y viceversa, e induce en el plano $z = 0$ la simetría respecto de la recta $x - y = z = 0$.

Número 258.* Encontrar todas las isometrías de $\mathbb{R}^3$ que transforman la recta $x = 0, y = -1$ en la recta $y = 1, z = 0$, y viceversa.

Número 259.* Sea f una isometría de $\mathbb{R}^n$ cuya matriz respecto del sistema de referencia estándar es simétrica. Demostrar que existe una base ortonormal $\{u_1, \dots, u_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ tal que $f(u_i) = \pm u_i$ para $i = 1, \dots, n$.

Número 260.* Sea f una isometría del plano que: (a) transforma el origen en el punto $(1, 0)$, (b) transforma la recta $r : x + y = 1$ en una paralela suya, y (c) transforma la recta $s : x = 1$ en la recta $s' : x = 0$. Calcular la matriz de f respecto del sistema de referencia estándar.

Número 261.* ¿Existe una afinidad de $\mathbb{R}^3$ que transforme el punto $(1, 0, 0)$ en el punto $(0, 0, 1)$ e induzca una isometría en el plano $x = 0$?

Número 262.* Calcular la máxima distancia de la recta $r : x = 2y - z + 20 = 0$ a un punto del plano $\pi : x - 8y + 4z = -1$ que diste 12 del punto $(-1, 0, 0)$.

Número 263.* Sea f una isometría de $\mathbb{R}^3$, distinta de la identidad, que deja fijos todos los puntos del plano $\pi : x + y + z = 1$. Calcular qué punto se transforma en el origen mediante f.

Número 264.* Sea f una afinidad de $\mathbb{R}^3$ que induce una isometría en el plano $z = 0$, y otra en el plano $y = 0$. Calcular la imagen $f(r)$ de la recta $r : x = y = 0$, sabiendo que $f(r)$ pasa por el origen.

Número 265.* Se consideran los planos de $\mathbb{R}^4$ siguientes:

$$\pi : x - z = 0,\ y + t = 0, \quad \pi' : x + z = 0,\ y + t = 1.$$

Calcular todas las rectas perpendiculares a π' que son paralelas a π.

Número 266. (1) Clasificar el movimiento f de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz respecto del sistema de referencia estándar es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) Encontrar una traslación τ tal que la composición $g = \tau \circ f$ sea un giro de eje la recta $r : y = z = 1$.

(3) ¿Existe alguna traslación τ' tal que $g' = \tau' \circ f$ sea un giro de eje no paralelo a r?

Número 267. ¿Cuánto mide la trayectoria más corta de entre las que en el plano unen los puntos $P = (2, 3)$ y $Q = (4, 5)$ y tocan a la recta $r : y = 2x$? ¿En qué punto toca dicha trayectoria a la recta r?

Número 268. Un móvil parte del punto $P = (6, 2)$ y debe llegar al punto $Q = (1, 5)$, según una trayectoria sujeta a las siguientes condiciones:

(i) Una vez que ha salido de P debe llegar al eje OX y recorrer en él una unidad.

(ii) Desde allí debe llegar al eje OY y recorrer en él dos unidades.

(iii) Desde el punto alcanzado debe partir hacia Q. Encontrar la trayectoria más corta de todas las posibles, y calcular su longitud.

Número 269. Dados los puntos $P = (-1, 2, 5)$ y $Q = (3, 5, 11)$ de $\mathbb{R}^3$, calcular las coordenadas del punto del plano $y = z$ cuya suma de distancias a P y Q es mínima.

Número 270. ¿Qué posición deben ocupar cuatro puntos P, Q, R, S de $\mathbb{R}^3$ para que la composición de las cuatro simetrías con centro en cada uno de ellos sea la identidad?

Número 271. ¿Qué ángulo debe girar en $\mathbb{R}^3$ la recta $x + y = 1, x + z = 2$, alrededor del eje $x = 0, y = 2$, para quedar en posición ortogonal a la primera? Obtener unas ecuaciones implícitas de la nueva recta.

Número 272. Hallar el lugar geométrico de los puntos de intersección de las circunferencias tangentes en el origen O al eje OY y radio variable r, con las rectas de pendiente r del haz de vértice O.

Número 273. Se considera una cuerda de extremos P, Q de una circunferencia $\mathit{\Gamma}$. Sean AB y CD otras dos cuerdas de $\mathit{\Gamma}$ que pasan por el punto medio M de PQ. Sean X e Y los puntos en que las cuerdas AD y BC cortan a PQ. Probar que M es el punto medio del segmento XY.

Número 274. Consideremos los puntos $A = (a, 0), A' = (-a, 0)$ y $B = (0, b)$, donde a y b son números reales no nulos, y sea $\mathit{\Delta}$ el triángulo de vértices A, A' y B. Se llama circunferencia *circunscrita* a $\mathit{\Delta}$ a la que pasa por los tres vértices, y circunferencia *inscrita* en $\mathit{\Delta}$ a la que es tangente a los tres lados. ¿Para qué valores de a y b son concéntricas esas dos circunferencias?

Número 275. ¿Cuántas elipses cuyo semieje mayor mide 2 tienen por vértices no alineados con su centro a los puntos $A = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ y $A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, de modo que B esté situado en el eje menor?

Número 276. Calcular los focos de la hipérbola que pasa por el punto $\left(3, \frac{1}{3}\right)$ y cuyos vértices son los puntos $(-1, 1)$ y $(1, -1)$.

Número 277. Hallar la ecuación de una hipérbola que pasa por el punto $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ y cuyas asíntotas son las rectas $x + 2y = 3$ y $x - 2y = -1$. Calcular sus vértices y sus focos.

Número 278. ¿Cuántas parábolas pasan por el punto $(1, 0)$, tienen el origen por vértice, y su foco dista 2 de su directriz? ¿Cuáles son los focos de dichas parábolas?

Número 279. Calcular la directriz de una parábola que pasa por el punto $(3, 3)$, y cuyo foco, que es el punto $(0, 3)$, dista $\sqrt{10}$ de la directriz.

Número 280. Para cada par $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ distinto de $(0, 0)$ se considera la cónica

$$\Gamma_{ab} : a(x^2 + y^2) - 2bxy - 2a(x + y) + 1 = 0.$$

(1) Dibujar el conjunto de los pares $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tales que Γ_{ab} es degenerada.

(2) Calcular la ecuación reducida de Γ_{12} y clasificarla. Calcular el centro, la distancia entre sus vértices, sus ejes, sus asíntotas y sus focos.

Número 281. (1) Probar que el punto (α, β) es centro de la cónica

$$C : a_{00} + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$$

si y sólo si

$$\begin{cases} a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{01} & = & 0 \\ a_{12}\alpha + a_{22}\beta + a_{02} & = & 0 \end{cases}$$

(2) Se considera las cónicas

$$\Gamma_t : 2x^2 + 8xy + t(2x^2 - xy + 8x + 10) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

¿Cuáles de estas cónicas tienen centro?

(3) Dibujar el lugar geométrico de los centros de las cónicas Γ_t que lo tienen.

(4) ¿Cuántas cónicas Γ_t tienen centro y lo tienen en la recta $3y - 2x = 4$?

Número 282. (1) Demostrar que si la recta $y = mx + n$ es asíntota de la hipérbola

$$C : a_{00} + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0,$$

se cumple $a_{22}m^2 + 2a_{12}m + a_{11} = 0$.

(2) Determinar la hipérbola Γ que pasa por el origen de coordenadas y tiene por asíntotas a las rectas $3x - y = 5$ y $3y - x = 1$.

Número 283. Demostrar que la cónica $\Gamma : (y - x)^2 = x - 3$ es una parábola y calcular su vértice y su eje. Calcular el área encerrada entre Γ y la recta $x = 7$.

Número 284. Se considera la curva $C : y(x^2 - 5x + 4) = x$, y el punto $p \in C$ cuya abscisa es el valor en el que alcanza su único máximo relativo la función

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 5x + 4}\,.$$

Se trazan todas las rectas que pasan por p y cortan a C en otros dos puntos. Demostrar que el lugar geométrico de los puntos medios de esos otros dos puntos es una cónica, clasificarla y hallar su ecuación reducida.

Número 285. Hallar la ecuación implícita del lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de la elipse $\Gamma : x^2 + 2y^2 = 2$ que son vistas desde su centro bajo ángulo recto.

Número 286. Sean C la circunferencia de centro $(0, 4)$ y radio 2 y Γ la parábola de ecuación $x^2 = 4y$. Mostrar que por cada punto p de C pasan sólo dos rectas normales a Γ, que la tocan en, digamos, los puntos $A(p)$ y $B(p)$. Sea $X(p)$ el punto de intersección de las rectas tangentes a Γ en $A(p)$ y $B(p)$. Hallar una ecuación implícita del lugar geométrico de esos puntos $X(p)$, cuando p recorre C.

Número 287. Determinar el lugar geométrico de los puntos de contacto de las tangentes trazadas desde el punto $(6, 0)$ a las elipses centradas en el origen y de semiejes t y 3, con $t \in \mathbb{R}$.