

TRABAJO DE FIN DE GRADO, JUNIO 2019

EL TEOREMA DE GAUSS-BONNET

DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA, GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS, UCM

DIRIGIDO POR JESÚS M. RUIZ

ÁLVARO MARTÍN JIMÉNEZ

RESUMEN. En este trabajo se expone la teoría necesaria para demostrar en detalle el teorema de Gauss-Bonnet. Se recuerdan las nociones básicas de geometría diferencial de curvas y superficies (como la primera forma fundamental o la curvatura de Gauss) y se describen con cierto detalle herramientas más avanzadas como el Umlaufsatz y las triangulaciones diferenciables de superficies.

Palabras clave: Curvatura de Gauss, primera forma fundamental, superficies compactas, índice de rotación, Umlaufsatz, triangulaciones diferenciables, característica de Euler, curvatura geodésica, curvatura íntegra.

ABSTRACT. In this project the theory needed to prove in detail the Gauss-Bonnet theorem is explained. Basic notions of differential geometry of curves and surfaces (such as the first fundamental form or the Gaussian curvature) are reminded, and more advanced tools as the Umlaufsatz and differentiable triangulations of surfaces are shown in detail.

Keywords: Gaussian curvature, first fundamental form, compact surfaces, winding number, Umlaufsatz, differentiable triangulations, geodesic curvature, curvatura íntegra.



Triangulaciones por Madrid.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 53A05, 53B20, 53C22, 55M25.

RdC.

*Para Gerardo, Araceli, Víctor y Mari, mis cuatro superhéroes.
Para el mayor tesoro que tengo en esta vida, mi pequeña gran familia.
¡Gracias mamá y papá!*

Por todo el camino recorrido y el que nos queda. Juanma, Javi, Pocho.

□

ÍNDICE

| | |
|--|----|
| Introducción | 3 |
| 1. Geometría diferencial de curvas. | 4 |
| 2. Geometría diferencial de superficies. | 6 |
| 3. Orientación de superficies y sus bordes. | 9 |
| 4. Curvatura de Gauss. | 11 |
| 5. Clasificación de puntos y teorema egregio. | 15 |
| 6. Curvatura geodésica. | 18 |
| 7. Determinación del ángulo de tangencia. | 19 |
| 8. Polígonos curvilíneos. | 22 |
| 9. Umlaufsatz | 26 |
| 10. Triangulaciones de superficies. | 29 |
| 11. Teorema de triangulación diferenciable. | 33 |
| 12. Demostración del teorema de triangulación diferenciable. | 35 |
| 13. Integración en superficies. | 44 |
| 14. El teorema de Gauss-Bonnet local. | 46 |
| 15. El teorema de Gauss-Bonnet. | 48 |
| 16. El grado de la aplicación de Gauss. | 50 |
| Referencias | 54 |

INTRODUCCIÓN

El propósito principal de este trabajo es la explicación detallada del teorema de Gauss-Bonnet y su demostración. Es un resultado esencial de la geometría diferencial de curvas y superficies y la topología, involucrando triangulaciones, orientación, el Umlaufsatz y la característica de Euler. Si bien más adelante daremos la definición precisa de superficie diferenciable (de ahora en adelante superficie) la noción intuitiva es que localmente se comporta como un abierto de un plano afín.

Nuestro punto de partida será aprovechar el cálculo en espacios afines e intentar extrapolarlo a superficies. Para ello, haremos uso del plano tangente a una superficie y aprovechando su estructura de espacio vectorial podremos empezar a calcular magnitudes de la superficie, tales como longitudes y áreas. Nótese que este estudio se centra en la geometría intrínseca de la superficie, es decir, en las propiedades inherentes a la misma sin importar en qué espacio ambiente se esté considerando. Para el estudio de esta geometría intrínseca se usa la primera forma fundamental, la cual es un producto escalar en cada espacio tangente, y como el abierto donde nace la parametrización de la superficie se

encuentra en el plano afín, podremos, ahora sí, hacer todos los cálculos que necesitemos. Si bien este estudio de la geometría intrínseca de la superficie, que contiene objetos capitales como las curvas geodésicas, es sumamente interesante porque nos estamos ciñendo a la superficie y despreocupándonos de en qué espacio ambiente se encuentra, también es interesante fijarse en este espacio ambiente para obtener información adicional.

El estudio de la geometría de la superficie teniendo en cuenta su espacio ambiente se llama geometría extrínseca y contiene herramientas como los campos normales a una superficie, la aplicación de Gauss y la segunda forma fundamental. Un problema muy importante de la geometría extrínseca es ver cómo se curva una superficie en su espacio ambiente. Pero si bien intuitivamente cuán curvada está una superficie puede parecer una idea relativamente simple, formalizar dicha idea y cuantificarla es un trabajo muy complicado. Es por ello que no existe una única curvatura, sino múltiples definiciones de curvaturas diferentes (curvaturas principales, curvatura media, curvatura de Gauss, curvatura normal, curvatura geodésica...) con el fin de que si se aúnan todas se pueda llegar a dar una medición acertada de la noción intuitiva de curvatura.

Una vez se hayan recordado o detallado, según los casos, las nociones básicas de geometría diferencial de curvas y superficies y otros conceptos básicos como la determinación de ángulos o las regiones simples, estaremos en posición para describir con rigor tres herramientas, de corte más técnico, necesarias para la demostración del teorema de Gauss-Bonnet: el Umlaufsatz, las triangulaciones diferenciables de superficies y la característica de Euler de una superficie. Esta última es el invariante que tendrá un papel central, pues es mediante él que el teorema de Gauss-Bonnet relaciona la geometría de la superficie con su topología.

Finalmente se demuestra el citado teorema de Gauss-Bonnet, primero en una versión local y después, haciendo uso de todos los conceptos previos que acabamos de mencionar, el teorema propiamente dicho. Se terminará viendo una serie de consecuencias directas del teorema gracias al estudio del grado de la aplicación de Gauss.

1. GEOMETRÍA DIFERENCIAL DE CURVAS.

En esta sección se recopilan nociones de geometría diferencial de curvas, desde definiciones básicas como curva parametrizada y longitud de una curva hasta los teoremas de Frenet para curvas planas y alabeadas, introduciendo así la curvatura y la torsión de curvas. Se supone conocida la asignatura de geometría diferencial de curvas y superficies y se detallan aquellos aspectos que suelen escapar al contenido real de las clases.

Definiciones 1.1. (1) Una *curva parametrizada diferenciable en \mathbb{R}^n* , en adelante curva parametrizada, es una aplicación diferenciable $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo abierto.

Se dice que $\gamma(t)$ es un *punto regular* si $\gamma'(t) \neq 0$ y que $\gamma(t)$ es un *punto singular* si $\gamma'(t) = 0$. La curva es una *curva regular* si todos sus puntos son regulares.

(2) Una *reparametrización de γ* es una composición $\tilde{\gamma} = \gamma \circ h$ donde h es un difeomorfismo entre intervalos abiertos de \mathbb{R} .

Definición 1.2. Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva parametrizada y sean $t_1 < t_2$ valores en I . Definimos la *longitud de la curva γ entre $\gamma(t_1)$ y $\gamma(t_2)$* como:

$$\text{long}(\gamma, t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle} dt.$$

Nótese que tanto el ser punto regular/singular como la longitud de una curva son propiedades geométricas, independientes de la parametrización que se tome, i.e. de cambios de variable (del parámetro).

Definición 1.3. Una curva parametrizada γ se dice que está *parametrizada por el arco*, lo que denotamos PPA, si $\|\gamma'\| \equiv 1$.

Siempre se puede reparametrizar por el arco, lo cual facilitará mucho los razonamientos. Por ejemplo, se tiene que

$$\text{long}(\gamma, s_1, s_2) = \int_{s_1}^{s_2} \|\gamma'(s)\| ds = s_2 - s_1.$$

Se resaltarán que una curva está PPA denotando su parámetro por s ; si no será t .

Pasemos a definir la curvatura de una curva plana con el fin de representar el concepto intuitivo de que una parábola está más ‘curvada’ que una recta. Esta curvatura se encuentra mediante la idea de J. Frenet y J. Serret de definir una base natural en cada punto de la curva y luego estudiar como va variando dicha base.

Consideremos una curva plana PPA $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$. Empecemos definiendo los vectores de dicha base. Se llama *vector tangente* a $T(s) = (\gamma'_1(s), \gamma'_2(s))$ y *vector normal* a $N(s) = (-\gamma'_2(s), \gamma'_1(s))$ y así obtenemos la base móvil ortonormal $\{T(s), N(s)\}$ llamada *base de Frenet*. Si ahora estudiamos su variación respecto de s (derivando), obtenemos el siguiente *teorema de Frenet en el plano*:

Teorema 1.4. *Existe una función $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:*

$$\begin{aligned} T'(s) &= \kappa(s)N(s), \\ N'(s) &= -\kappa(s)T(s). \end{aligned}$$

Llamamos a κ *curvatura (de Frenet)* de γ .

Obsérvese que si $\kappa(s) > 0$ la curva gira en sentido antihorario y si $\kappa(s) < 0$ en sentido horario. En curvas planas PPA, $|\kappa(s)| = \|\gamma''(s)\|$. Dos ejemplos sencillos son:

- i) $\kappa \equiv 0$ si y solo si $\gamma(s)$ es una recta.
- ii) $\kappa \equiv R > 0$ si y solo si $\gamma(s)$ es una circunferencia de radio $\frac{1}{R}$.

Ahora extrapolamos la idea de estudiar la variación de una base móvil a curvas alabeadas, en las que ya no solo contamos con la curvatura sino que también aparece la torsión, que será el medidor de la idea intuitiva de cuán poco plana es la curva.

Consideremos una curva alabeada PPA $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ que sea *birregular*, i.e. regular y tal que $\gamma''(s) \neq 0$, para todo s . Empecemos definiendo los vectores de dicha base. Se llama *vector tangente* a $T(s) = \gamma'(s)$, *vector normal* a $N(s) = \frac{\gamma''(s)}{\|\gamma''(s)\|}$ y *vector binormal* a $B(s) = T(s) \times N(s)$. Consideramos así la siguiente base móvil ortonormal $\{T(s), N(s), B(s)\}$

llamada *triedro de Frenet*. De nuevo, estudiando su variación respecto de s obtenemos el *teorema de Frenet*:

Teorema 1.5. *Si la curva tiene derivadas hasta al menos orden k , con $k \geq 3$, y estas son continuas, entonces existe una función $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ con derivadas continuas de al menos orden $k - 2$ y una función $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ con derivadas continuas de al menos orden $k - 3$ tal que:*

$$\begin{aligned} T'(s) &= \kappa(s)N(s), \\ N'(s) &= -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s), \\ B'(s) &= -\tau(s)N(s). \end{aligned}$$

Como antes, llamamos a κ *curvatura* de γ y la función nueva τ se llama *torsión* de γ .

Como justificación de la palabra torsión, obsérvese que $\tau \equiv 0$ si y solo si la curva está contenida en un plano.

2. GEOMETRÍA DIFERENCIAL DE SUPERFICIES.

Empecemos recordando los conceptos de superficie diferenciable, plano tangente y diferencial de aplicaciones ente superficies.

Definiciones 2.1. Una *superficie diferenciable* es un subconjunto M de \mathbb{R}^3 tal que para todo punto x existen un entorno abierto U en \mathbb{R}^3 , un abierto W de \mathbb{R}^2 y una aplicación diferenciable $\varphi : W \rightarrow U$ tal que:

- i) φ es inyectiva y $\text{im}(\varphi) = \varphi(W) = U \cap M$,
- ii) $\text{rg } J\varphi = 2$ en todo el dominio W ,
- iii) $\varphi : W \rightarrow U \cap M$ es un homeomorfismo, i.e. biyectiva, continua y de inversa continua.

La aplicación φ se denomina *parametrización*, $\mathbf{x} = \varphi^{-1} : U \cap M \rightarrow W$ se denomina *sistema de coordenadas* y $U \cap M$ es el *dominio de coordenadas*. Las variables de φ se denotan típicamente (u, v) .

Sea $\varphi : W \rightarrow M$ una parametrización, sean $\mathbf{x} = \varphi^{-1}$ las coordenadas correspondientes y sea x un punto del dominio de coordenadas $\varphi(W) = U \cap M$. Denotamos las *derivadas parciales* $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(\mathbf{x}(x))$, $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(\mathbf{x}(x))$ por $\frac{\partial}{\partial u}\Big|_x$, $\frac{\partial}{\partial v}\Big|_x$ respectivamente. Llamamos *líneas coordenadas* a las curvas generadas al tomar una de las variables fija, es decir $\varphi(u = \text{cte})$, $\varphi(v = \text{cte})$.

Dadas dos parametrizaciones $\varphi : W \rightarrow U_1$, $\psi : V \rightarrow U_2$ tales que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, sean $A = \varphi^{-1}(U_1 \cap U_2)$, $B = \psi^{-1}(U_1 \cap U_2)$. Se denomina *cambio de coordenadas* a la composición $\psi^{-1} \circ \varphi : A \rightarrow B$, que es un difeomorfismo entre estos abiertos de \mathbb{R}^2 .

Se llama *atlas* de una superficie M a una familia \mathcal{A} de parametrizaciones locales $\varphi_i : W_i \rightarrow M$ tal que

$$M = \bigcup_i \varphi_i(W_i).$$

Definición 2.2. Sea $x \in M$ un punto de una superficie diferenciable M . Se define el *plano tangente (vectorial) a la superficie M en x* como

$$T_x M = \{\gamma'(0) \in \mathbb{R}^3 \mid \gamma : I \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3 \text{ curva diferenciable tal que } \gamma(0) = x\} \subset \mathbb{R}^3.$$

El plano tangente $T_x M$ se puede describir como el espacio generado por las derivadas parciales o con ecuaciones implícitas. En efecto,

(1) El plano tangente es el espacio vectorial generado por las parciales,

$$T_x M = \mathbf{L} \left[\frac{\partial}{\partial u} \Big|_x, \frac{\partial}{\partial v} \Big|_x \right]$$

que son independientes, por lo que $T_x M$ es un espacio vectorial de dimensión 2.

(2) Si $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = 0\}$ con $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ función diferenciable con $\nabla F \neq 0$ en M (es decir, F es una ecuación implícita), entonces

$$T_x M = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid \langle u, \nabla F_x \rangle = 0\} = \mathbf{L} [\nabla F_x]^\perp.$$

Definición 2.3. Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función diferenciable y $p \in M$. Se define la *diferencial de f en p* como la siguiente aplicación lineal

$$d_p f : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n : u \mapsto \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(\gamma(t)),$$

donde $\gamma : I \rightarrow M$ es una curva diferenciable tal que $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = u$,

En el caso particular de que $f : M_1 \rightarrow M_2 \subset \mathbb{R}^3$ se tiene que $d_p f : T_p M_1 \rightarrow T_{f(p)} M_2$ está bien definida, es decir, $d_p f(T_p M_1) \subset T_{f(p)} M_2$.

El resultado básico sobre la derivada es el célebre *teorema de inversión local*:

Teorema 2.4. Una aplicación diferenciable $f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$ es un difeomorfismo local en un punto $a \in U \subset \mathbb{R}^p$ si y solo si la derivada $d_a f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ es un isomorfismo lineal (en particular, $p = q$).

Cuya versión cuando se considera una aplicación diferenciable entre superficies es

Teorema 2.5. Una aplicación diferenciable $f : M \rightarrow N$ entre superficies sin borde es un difeomorfismo local en un punto $a \in M$ si y solo si la derivada $d_a f : T_a M \rightarrow T_{f(a)} N$ es un isomorfismo lineal.

Recordemos ahora el concepto de primera forma fundamental, herramienta que nos sirve para desarrollar la geometría intrínseca.

Nuestro objetivo es hacer medidas en superficies, para ello recordemos que en el caso del espacio afín la medida viene dada por un producto escalar euclídeo:

$$\begin{cases} \text{long}(\gamma, a, b) = \int_a^b \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle} dt \\ \cos(u, v) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} \end{cases}$$

En nuestro caso usaremos el plano tangente, ya que este es un espacio vectorial asociado a cada punto de la superficie.

Definición 2.6. Consideremos el producto escalar euclídeo definido en todo el espacio $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, el cual es una forma bilineal simétrica definida positiva. Llamamos *primera forma fundamental en el punto p* al producto escalar que se da en $T_p M$ restringiendo el producto escalar del espacio ambiente \mathbb{R}^3 :

$$I_p = \langle \cdot, \cdot \rangle \Big|_{T_p M} : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

Para obtener coordenadas locales de I_p aprovechamos que M es una superficie diferenciable. Sabemos que cada punto p de M tiene un entorno difeomorfo vía una parametrización a un abierto de \mathbb{R}^2 y esta parametrización define una base en $T_p M$, $\left\{ \frac{\partial}{\partial u} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial v} \Big|_p \right\}$. Es por ello que, de manera local, podemos expresar I_p respecto de estas bases en los puntos del correspondiente dominio de coordenadas. Así, la matriz de I_p respecto de la base $\left\{ \frac{\partial}{\partial u} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial v} \Big|_p \right\}$ es:

$$\begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial}{\partial u} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial u} \Big|_p \right\rangle & \left\langle \frac{\partial}{\partial u} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial v} \Big|_p \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial u} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial v} \Big|_p \right\rangle & \left\langle \frac{\partial}{\partial v} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial v} \Big|_p \right\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

La primera forma fundamental nos permite hacer mediciones en la superficie: longitudes de curvas, ángulos y áreas.

Sea $\gamma : I \rightarrow M$ una curva diferenciable en M , $a, b \in I$ tales que $a < b$, $\gamma(I) \subset \varphi(W)$, sea $\delta(t) = \varphi^{-1}(\gamma(t))$. Entonces

$$\text{long}(\gamma, a, b) = \int_a^b \sqrt{(\delta'_1(t), \delta'_2(t)) I_{\gamma(t)} \begin{pmatrix} \delta'_1(t) \\ \delta'_2(t) \end{pmatrix}} dt.$$

Sean $\gamma, \tilde{\gamma} : I \rightarrow M$ curvas diferenciables en M tales que $\gamma(t_0) = \tilde{\gamma}(t_0) = p$ con $t_0 \in I$, sea $\delta(t) = \varphi^{-1}(\gamma(t))$, $\tilde{\delta}(t) = \varphi^{-1}(\tilde{\gamma}(t))$. Entonces

$$\cos(\gamma'(t_0), \tilde{\gamma}'(t_0)) = \frac{(\delta'_1(t_0), \delta'_1(t_0)) I_p \begin{pmatrix} \tilde{\delta}'_1(t_0) \\ \tilde{\delta}'_2(t_0) \end{pmatrix}}{\sqrt{(\delta'_1(t_0), \delta'_2(t_0)) I_p \begin{pmatrix} \delta'_1(t_0) \\ \delta'_2(t_0) \end{pmatrix}} \sqrt{(\tilde{\delta}'_1(t_0), \tilde{\delta}'_2(t_0)) I_p \begin{pmatrix} \tilde{\delta}'_1(t_0) \\ \tilde{\delta}'_2(t_0) \end{pmatrix}}}.$$

Sea $\varphi : W \rightarrow M$ una parametrización. Entonces el área cubierta por φ es:

$$\text{Área}(\varphi(W)) = \int_W \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| dudv = \int_W \sqrt{\det I_p} dudv.$$

Gracias a la primera forma fundamental podremos distinguir un tipo especial de parametrizaciones, aquellas en las que sus parciales son ortogonales. Las llamaremos *parametrizaciones ortogonales* y nos serán de gran utilidad para agilizar los cálculos.

A continuación pasamos a describir los conceptos que se refieren a la geometría extrínseca. Estos conceptos serán muy importantes ya que nos servirán, entre otras cosas, para orientar superficies (mediante campos normales) o definir la curvatura de Gauss (usando la segunda forma fundamental).

Definición 2.7. Se llama *campo normal a una superficie M* a una función diferenciable $\nu : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\nu(p) \perp T_p M$ para cada $p \in M$.

Si además $\|\nu(p)\| = 1$, para cada $p \in M$, el campo normal se denomina unitario.

Definiciones 2.8. Sea M una superficie en la que se ha fijado un campo de vectores normal unitario ν . Se definen

(1) el *operador de Weingarten de un punto* $p \in M$ como la aplicación lineal

$$S_p : T_p M \rightarrow T_p M : v \mapsto -d_p \nu(v)$$

(2) la *segunda forma fundamental en un punto* $p \in M$ como la aplicación bilineal

$$II_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R} : (u, v) \mapsto \langle S_p(u), v \rangle$$

Procediendo como con I , consideramos coordenadas locales de M vía una parametrización y la base asociada $\left\{ \frac{\partial}{\partial u} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial v} \Big|_p \right\}$ en el correspondiente plano tangente $T_p M$. Por tanto, en cada punto p del correspondiente dominio de coordenadas, podemos expresar II_p respecto de la base $\left\{ \frac{\partial}{\partial u} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial v} \Big|_p \right\}$ de los planos tangentes. Así, la matriz de II_p respecto de la base $\left\{ \frac{\partial}{\partial u} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial v} \Big|_p \right\}$ es:

$$\begin{pmatrix} \langle S_p(\frac{\partial}{\partial u} \Big|_p), \frac{\partial}{\partial u} \Big|_p \rangle & \langle S_p(\frac{\partial}{\partial u} \Big|_p), \frac{\partial}{\partial v} \Big|_p \rangle \\ \langle S_p(\frac{\partial}{\partial v} \Big|_p), \frac{\partial}{\partial u} \Big|_p \rangle & \langle S_p(\frac{\partial}{\partial v} \Big|_p), \frac{\partial}{\partial v} \Big|_p \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}.$$

3. ORIENTACIÓN DE SUPERFICIES Y SUS BORDES.

En esta sección se define y se explica cómo orientar una superficie, tanto vía parametrizaciones como vía campos normales. También se muestra el comportamiento de la orientación frente a difeomorfismos. Finalmente se trata cómo la orientación del interior de la superficie determina por completo la orientación del borde.

Como es habitual, empecemos por definir la orientación en espacios vectoriales. Una *orientación en un espacio vectorial* es una elección de una de las dos clases de equivalencia de bases para la relación de equivalencia $B_1 \sim B_2$ si y solo si $\det M_{B_1 B_2} > 0$, donde $M_{B_1 B_2}$ es la matriz de cambio de base. Elegida una de estas dos clases de equivalencia, se denota a esa *orientación positiva* y a la otra *negativa*.

Nótese que la elección de la orientación positiva es arbitraria. No obstante, en \mathbb{R}^2 convenimos en considerar positiva a la clase de equivalencia de $B_c = \{(1, 0), (0, 1)\}$, que genera el sentido de giro antihorario, y en \mathbb{R}^3 consideramos positiva la clase de $B_c = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, que sigue la regla del sacacorchos.

Definición 3.1. Una *orientación de una superficie* M consiste en elegir una orientación en cada plano tangente $T_p M$ de forma que para cada $p_0 \in M$, exista una parametrización $\varphi : W \rightarrow M$ tal que

i) $p_0 \in \varphi(W)$

ii) $\left[\frac{\partial}{\partial u} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial v} \Big|_p \right]$ es positiva en la orientación elegida para cada $p \in \varphi(W)$

Se dice que M es *orientable* si existe alguna orientación y que M está *orientada* cuando una tal orientación se ha elegido.

Si tenemos una superficie orientada y una parametrización y se tiene que para todo punto de la superficie la base de las parciales generada por dicha parametrización es positiva según la orientación fijada, se dice que la parametrización es *compatible* con la orientación (también se dice que el sistema de coordenadas correspondiente es compatible). Obsérvese que se tiene la siguiente caracterización: dos sistemas de coordenadas son *ambos* compatibles (o *ambos* incompatibles) con la orientación si y solo si el determinante jacobiano del cambio de coordenadas es positivo.

Si M es una superficie orientable y conexa entonces tiene exactamente dos orientaciones (que son opuestas). Esto significa que basta estudiar su orientación en un punto para conocerla en todo M . Esta propiedad se debe al carácter de continuidad que hemos impuesto en la definición al tratar en dominios de coordenadas y el comportamiento que se da con los cambios de coordenadas citado anteriormente.

3.1. Orientaciones y difeomorfismos. Veamos ahora el comportamiento de las orientaciones frente a difeomorfismos. De nuevo, comencemos estudiando el caso entre espacios vectoriales. Si tenemos un isomorfismo lineal entre dos espacios vectoriales y el primero de ellos está orientado, la imagen por el isomorfismo de una base positiva induce una orientación en el segundo. Consideremos ahora dos superficies orientadas M y N y un difeomorfismo local f en un punto a de M , nótese que $d_a f$ es un isomorfismo lineal entre los planos tangente y por tanto se puede considerar la imagen de una base positiva vía $d_a f$. Diremos que f *conserva* la orientación si la imagen de dicha base positiva es positiva con la orientación de N ; en caso contrario se dirá que f *invierte* la orientación. Obsérvese que f conserva la orientación si y solo si es positivo el determinante de la matriz jacobiana de f respecto de dos sistemas de coordenadas \mathbf{x} de M e \mathbf{y} de N compatibles con las orientaciones pertinentes.

Gracias a esta última observación es claro que los difeomorfismos locales entre superficies conservan o invierten la orientación de manera constante en entornos conexos abiertos del punto.

3.2. Orientaciones y campos normales. La relación entre campos normales y orientaciones es que dar una orientación en una superficie conexa es equivalente a dar un campo normal unitario global. En efecto, sea M una superficie conexa y $\nu : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo normal unitario global de M . Diremos que una base $\{u, v\}$ de $T_p M$ es positiva si al añadirle $\nu(p)$, la base $\{\nu(p), u, v\}$ es positiva en \mathbb{R}^3 , es decir $\det(\nu(p), u, v) > 0$. Orientando todos los $T_p M$ de esta manera conseguimos una orientación de M .

Sea M una superficie orientada. Se dice que un campo normal global ν es *compatible con la orientación de M* si para todo $p \in M$ y para toda base positiva $\{u, v\}$ de $T_p M$, se tiene que la base $\{\nu(p), u, v\}$ es positiva en \mathbb{R}^3 .

3.3. Orientación del borde. Veamos cómo la orientación del borde de una superficie viene definida por la orientación del interior. Para ello necesitaremos el siguiente concepto:

Sea M una superficie con borde ∂M en la que el interior de la superficie está orientada. Sea p un punto de ∂M . Puesto que $T_p \partial M \subset T_p M$, hay tres posibilidades para los vectores tangentes a M en p : que también sean vectores tangentes ∂M , que señalen al interior de M o que señalen al exterior de M , a estos últimos se les llama *vectores salientes*.

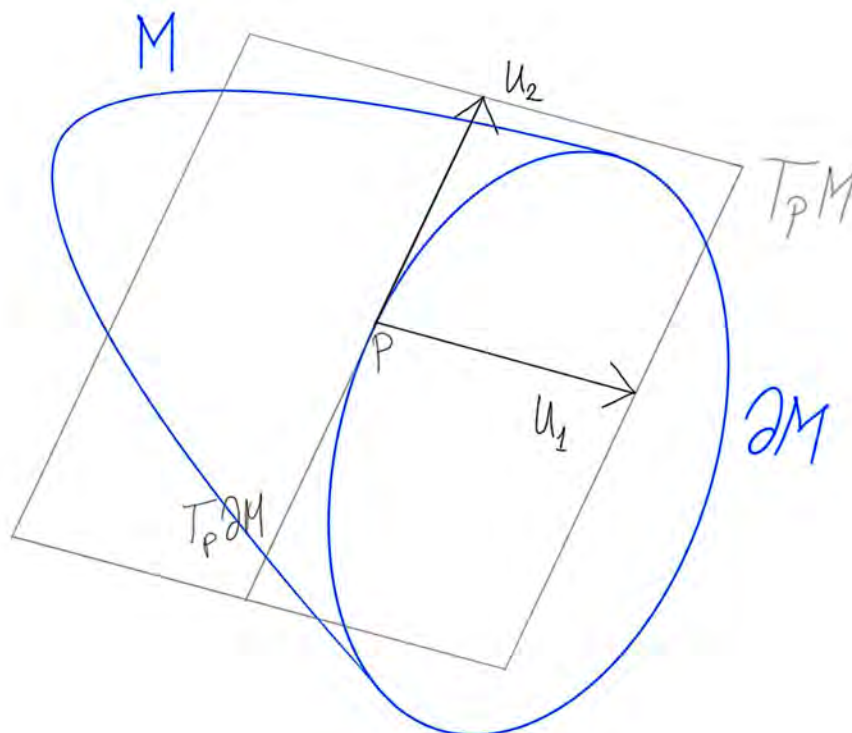


FIGURA 1. u_1 es un vector saliente de M .

Nótese que el espacio T_pM tiene dimensión dos y $T_p\partial M$ tiene dimensión uno.

La *orientación de ∂M en p* como borde es la dada por cualquier base $\{u_2\}$ de $T_p\partial M$ tal que para cualquier vector saliente u_1 en p , la base $\{u_1, u_2\}$ sea positiva para la orientación de M en p .

Nótese que estas bases positivas de $T_p\partial M$ están todas formadas por vectores proporcionales con el mismo sentido y que independientemente de la proporcionalidad y del vector saliente elegido, el producto vectorial de esos dos vectores, que es normal a la superficie, mantiene sentido constante, por lo que se comprueba que la definición de la orientación del borde solo depende de p y la orientación dada en M .

4. CURVATURA DE GAUSS.

En esta sección introduciremos la curvatura que se emplea en el teorema de Gauss-Bonnet, la curvatura de Gauss. Mostraremos dos formas de definir dicha curvatura, la primera, con la que trabajaremos a lo largo del trabajo, será mediante la segunda forma fundamental. La segunda nacerá de ver la variación en cada punto de un campo normal a la superficie mediante una especie de media infinitesimal en cada punto. Este segundo acercamiento a la curvatura de Gauss muestra mejor el carácter de esta noción.

Resaltemos que la curvatura de Gauss debe ser un claro medidor de cuánto y cómo se curva una superficie. De hecho, el teorema de Gauss-Bonnet, en esencia, propone “tomar la suma” de la curvatura de Gauss en cada punto de la superficie, esto es, hacer la integral a lo largo de la superficie, y ver que es invariante y cómo clasifica la superficie.

Definición 4.1. Se denomina *curvatura de Gauss en un punto p* a

$$K(p) = \det(S_p) = \frac{\det II_p}{\det I_p}$$

El siguiente acercamiento a la noción de curvatura de Gauss es del excelente libro *A mathematical Gift, vol I* [4].

En tanto que $K(p)$ es un concepto definido punto a punto, el siguiente razonamiento será de carácter local.

Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable conexa, sea $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ la esfera unidad. Consideremos un campo normal unitario $\nu : M \rightarrow \mathbb{S}^2$. La aplicación $\nu(p)$, por ser unitaria, se suele denotar $N(p)$ y llamar aplicación de Gauss. Nótese que, de existir, esta aplicación es única salvo signo, es decir, si N, N' son dos aplicaciones de Gauss, entonces $N = N'$ ó $N = -N'$. Observemos que, tal y como vimos en 3.2, al definir un campo normal N en la superficie M , esta queda orientada de manera compatible con N .

Veamos ahora cómo funciona esta aplicación. Supongamos que tenemos una superficie M , una aplicación de Gauss N , un punto p y un entorno U de p en M . Nótese que si aplicamos N a U , su imagen, $N(U)$, nos mostrará la variación del campo normal en ese entorno U e intuitivamente notamos que cuanto más varíe el campo normal, más curvado está M en el entorno U . Se pueden distinguir tres casos:

i) Que M sea un plano, en cuyo caso todos los vectores tangentes serán proporcionales y mediante la aplicación de Gauss irán a parar a un único punto, sin importar cómo sea el entorno U .

ii) Que M tenga forma de paraboloides elíptico en el entorno U de p . En este caso, si consideramos U como la intersección de una bola de centro p con M y parametrizamos su borde en sentido antihorario, si nos fijamos en cómo queda la parametrización del borde vía la aplicación de Gauss, veremos que queda igualmente recorrida en sentido antihorario, es decir, se mantiene la orientación del borde.

iii) Que M tenga forma de un paraboloides hiperbólico en el entorno U de p . En este caso, mediante la misma construcción, la orientación del borde se invierte, es decir, el borde de la imagen vía la aplicación de Gauss se recorre en sentido horario.

Estudiemos con más detalle esta conservación o inversión de la orientación del borde. Como la aplicación de Gauss es un difeomorfismo local, la orientación se conserva o invierte de manera constante en entornos abiertos de p según el signo del determinante del jacobiano de N , es decir, el signo de K . Así, dado un entorno U , si N conserva o invierte la orientación en U , la conservará o invertirá en cualquier entorno V de p contenido en U respectivamente, por lo que basta estudiar la función en el punto p para extrapolarlo a sus entornos (se trata de un estudio local). El mismo razonamiento es válido para estudiar la orientación del borde pues, como ya se comentó en la sección de orientaciones, esta viene exclusivamente determinada por la orientación del abierto. De esta forma, como un difeomorfismo local lleva interiores a interiores y bordes a bordes y la orientación del borde viene definida por la orientación del entorno, si N conserva o invierte la orientación del interior, hará lo propio con la orientación del borde.

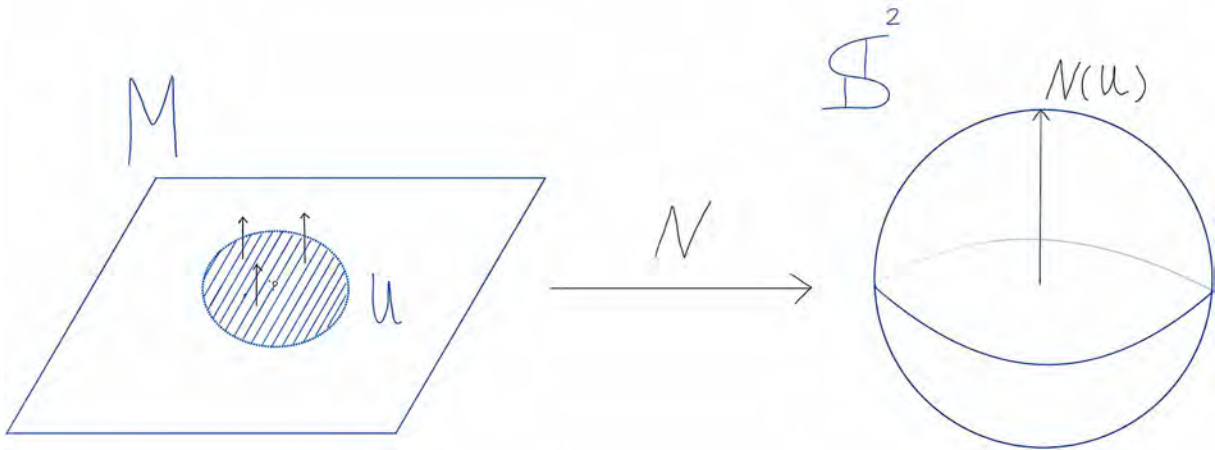


FIGURA 2. M es un plano.

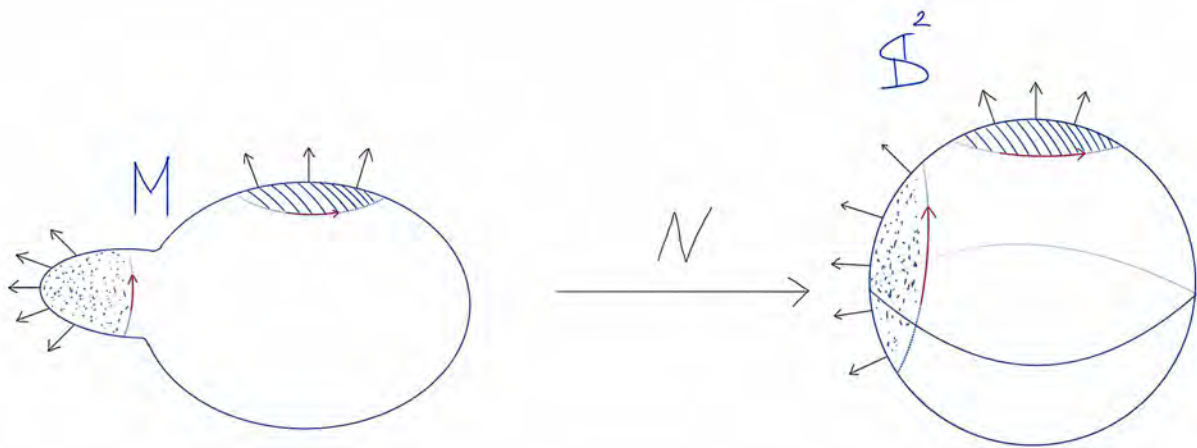


FIGURA 3. M es un paraboloido elíptico.

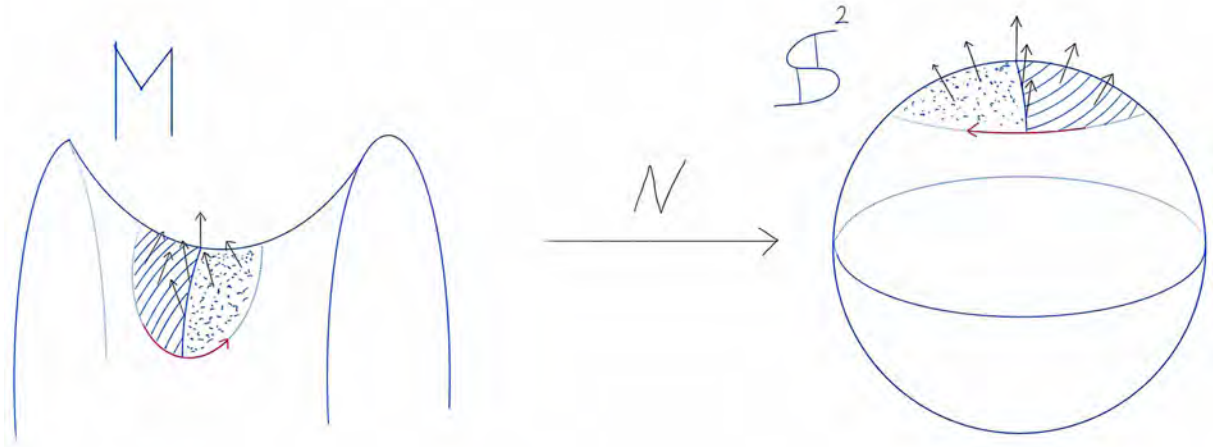


FIGURA 4. M es un paraboloides hiperbólico.

Si bien $N(U)$ nos muestra la variación del campo normal en U , no podemos tomar $N(U)$ como indicador de la curvatura en U , ya que si aumentamos el área de U también aumentará el área de $N(U)$ (exceptuando el caso particular del plano). De esta manera llegaríamos a conclusiones erróneas como que aumentando el área de nuestro entorno podríamos obtener una curvatura arbitrariamente curvada. Por tanto, parece razonable que, ya que el área de $N(U)$ depende del área de U , tomemos el cociente de ambos $\frac{\text{área } N(U)}{\text{área } U}$. No obstante, con esta definición todavía no estaríamos recogiendo el matiz de conservación o inversión visto en los casos ii) y iii), lo que nos lleva a pensar en tomar el siguiente cociente $\epsilon \frac{\text{área } N(U)}{\text{área } U}$ donde ϵ vale 1 ó -1 dependiendo de si se conserva o se invierte la orientación del borde vía N .

De esta manera hemos conseguido una fórmula que nos indica cuán curvada está la superficie en un entorno, pero el concepto que nosotros buscamos es infinitesimal, es decir, debemos reducir este concepto para que solo implique al punto. Esto lo conseguiremos tomando el límite $\lim_{U \rightarrow p}$ de entornos U arbitrariamente pequeños de p .

Como ya hemos comentado anteriormente, basta estudiar la conservación o inversión de la orientación de N en un punto para extrapolarlo a los abiertos de dicho punto, por lo que ϵ se mantiene constante para todo entorno abierto de p , i.e. ϵ depende exclusivamente del punto y podemos sacarlo fuera del límite.

Con todas estas consideraciones, definimos curvatura de Gauss como:

$$K(p) = \lim_{U \rightarrow p} \epsilon \frac{\text{área } N(U)}{\text{área } U} = \epsilon \lim_{U \rightarrow p} \frac{\text{área } N(U)}{\text{área } U}$$

En consecuencia, se tiene que

$$|K(p)| = \lim_{U \rightarrow p} \frac{\text{área } N(U)}{\text{área } U}$$

y el signo de K en p viene dado por la conservación de la orientación.

5. CLASIFICACIÓN DE PUNTOS Y TEOREMA EGREGIO.

A continuación veremos cómo se clasifican los puntos según su curvatura de Gauss, mostrando así la importancia y dificultad de tomar una buena definición y ratificando que la curvatura de Gauss es un buen cuantificador de la curvatura imaginada intuitivamente. Después introduciremos varios conceptos necesarios para enunciar el teorema egregio de Gauss, como los símbolos de Christoffel. Este teorema pone de manifiesto el sorprendente hecho de que la curvatura de Gauss, definida a partir de la geometría extrínseca, es en realidad intrínseca a la superficie, esto es, puede ser calculada únicamente conociendo la primera forma fundamental.

Definiciones 5.1. Sea M una superficie diferenciable, $p \in M$.

- i) Si $K(p) > 0$ se dice que p es un *punto elíptico*.
- ii) Si $K(p) < 0$ se dice que p es un *punto hiperbólico*.
- iii) Si $K(p) = 0$ pero $II_p \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ó $S_p \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ se dice que p es un *punto parabólico*.
- iv) Si $K(p) = 0$ y $II_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ se dice que p es un *punto plano*.

Preparamos ahora los conceptos previos sobre los que se sustenta uno de los resultados más importantes de la geometría, el teorema egregio de Gauss.

Nuestra forma de proceder guardará muchas similitudes con la idea detrás del teorema de Frenet para curvas alabeadas, es decir, definir una base y estudiar cómo varía. Sea M una superficie orientada, con aplicación de Gauss N . Sea $\varphi : W \rightarrow V$ una parametrización, definamos para todo $p \in V$ la base $\{N(p), \frac{\partial}{\partial u}|_p, \frac{\partial}{\partial v}|_p\}$ de \mathbb{R}^3 , llamaremos a esta base *triedro de Gauss*. El triedro de Gauss es una base positiva si y solo si φ es compatible con la orientación de M , es decir, si N es proporcional al producto vectorial de las parciales.

Observemos que cualquier vector se puede escribir respecto del triedro de Gauss ya que este es base de \mathbb{R}^3 . En particular, las derivadas segundas de la parametrización:

$$(Ch) \begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial u^2} &= \Gamma_{11}^1 \frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial}{\partial v} + L_{11}N \\ \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} &= \Gamma_{12}^1 \frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial}{\partial v} + L_{12}N \\ \frac{\partial^2}{\partial v \partial u} &= \Gamma_{21}^1 \frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_{21}^2 \frac{\partial}{\partial v} + L_{21}N \\ \frac{\partial^2}{\partial v^2} &= \Gamma_{22}^1 \frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_{22}^2 \frac{\partial}{\partial v} + L_{22}N \end{cases}$$

Los coeficientes Γ_{ij}^k se llaman *símbolos de Christoffel*.

Tras varios cálculos, derivando, multiplicando escalarmente por las parciales y aprovechando la simetría de los símbolos de Christoffel debido a la regla de Schwarz, se llega a

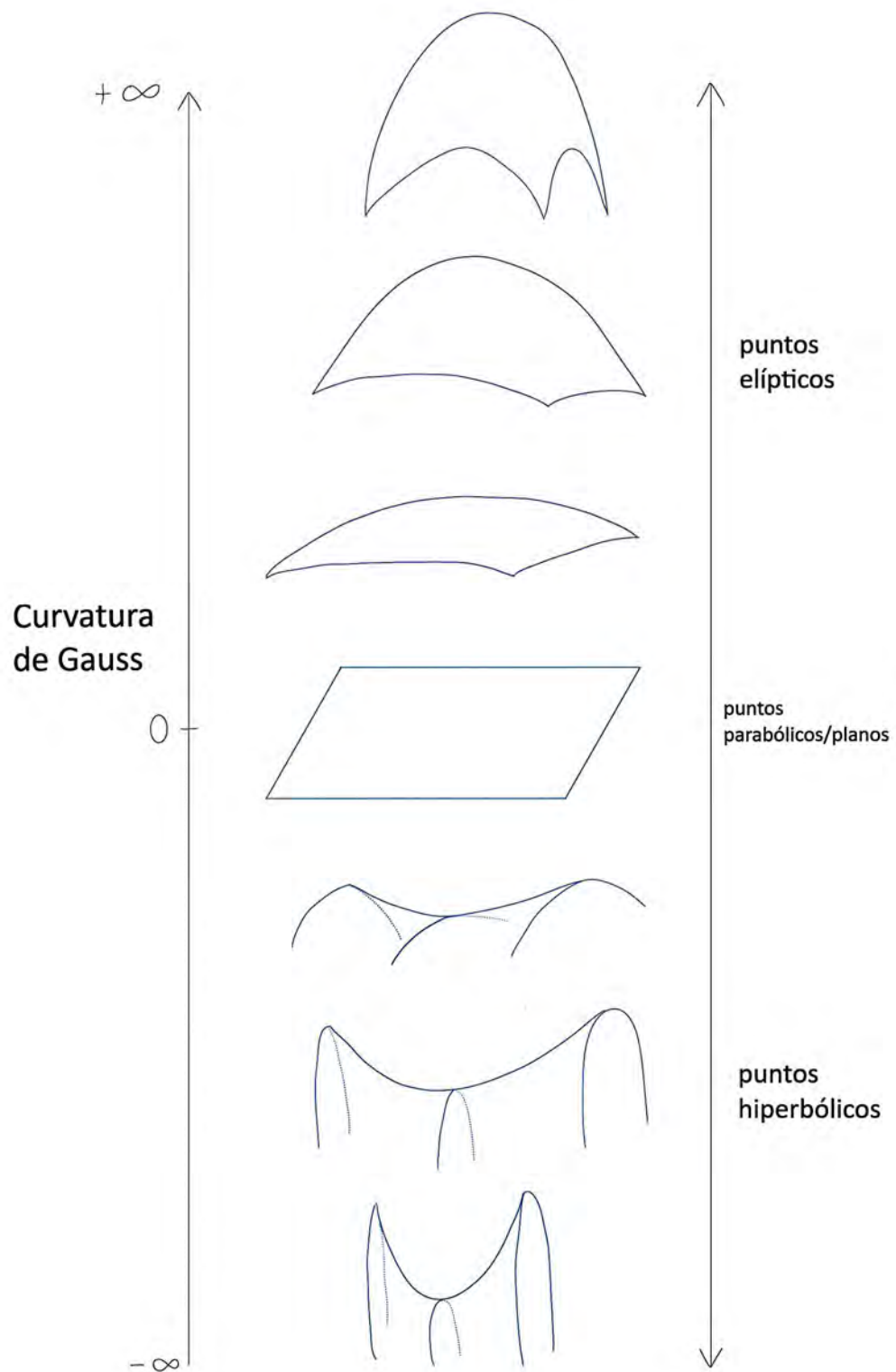


FIGURA 5. Tipos de puntos según $K(p)$.

que los símbolos de Christoffel son las únicas soluciones para tres sistemas lineales que tienen como coeficientes elementos de la primera forma fundamental y sus derivadas respecto a u o v :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}E_u &= E\Gamma_{11}^1 + F\Gamma_{11}^2, \\ F_u - \frac{1}{2}E_v &= F\Gamma_{11}^1 + G\Gamma_{11}^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}E_v &= E\Gamma_{12}^1 + F\Gamma_{12}^2, \\ \frac{1}{2}G_u &= F\Gamma_{12}^1 + G\Gamma_{12}^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_v - \frac{1}{2}G_u &= E\Gamma_{22}^1 + F\Gamma_{22}^2, \\ \frac{1}{2}G_v &= F\Gamma_{22}^1 + G\Gamma_{22}^2. \end{cases}$$

En consecuencia, sorprendentemente, los símbolos de Christoffel dependen únicamente de la primera forma fundamental, es decir, son de carácter intrínseco. Obsérvese que esta dependencia no es de carácter puntual sino de carácter local, es decir, necesitamos conocer la primera forma fundamental en todo un entorno suyo ya que aparecen derivadas.

Veamos el enunciado del *teorema egregio de Gauss*:

Teorema 5.2. *La curvatura de Gauss se expresa mediante la fórmula*

$$K = \frac{1}{E}(\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 + \frac{\partial\Gamma_{11}^2}{\partial v} - \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 - \frac{\partial\Gamma_{12}^2}{\partial u})$$

En particular, K solo depende de la primera forma fundamental.

Este resultado tiene una importancia superlativa ya que afirma que uno de los objetos principales de la geometría extrínseca se puede calcular únicamente mediante la geometría intrínseca de la superficie.

A modo de curiosidad, el teorema egregio afirma que se puede demostrar que la Tierra es redonda sin necesidad de salir al espacio exterior, únicamente realizando mediciones en su superficie.

Finalicemos esta sección viendo cómo el uso de los símbolos de Christoffel y el teorema egregio ayudarán a simplificar los cálculos en determinadas situaciones:

Proposición 5.3. *Sea $\varphi : W \rightarrow V$ una parametrización ortogonal. Entonces*

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\frac{\partial}{\partial v} \frac{E_v}{\sqrt{EG}} + \frac{\partial}{\partial u} \frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)$$

Esta proposición se demuestra con el teorema egregio de Gauss y los símbolos de Christoffel, usando la ortogonalidad de la parametrización para la simplificación de las fórmulas.

Demostración. Partiremos del hecho de que los símbolos de Christoffel son las soluciones de los tres sistemas de ecuaciones diferenciales vistos anteriormente en esta sección y del teorema egregio.

Como la parametrización es ortogonal, tenemos $F = 0$, lo cual simplifica bastante los tres sistemas mencionados, despejando así los símbolos de Christoffel en función de la

primera forma fundamental y sus derivadas:

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 = E_u/2E, \Gamma_{12}^1 = E_v/2E, \Gamma_{22}^1 = -G_u/2E, \\ \Gamma_{11}^2 = -E_v/2G, \Gamma_{12}^2 = G_u/2G, \Gamma_{22}^2 = G_v/2G. \end{cases}$$

Sustituyendo ahora los símbolos de Christoffel en la fórmula del teorema egregio 5.2 y operando, obtenemos la fórmula deseada:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{E}(\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 + \frac{\partial\Gamma_{11}^2}{\partial v} - \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 - \frac{\partial\Gamma_{12}^2}{\partial u}) \\ &= \frac{E_uG_u}{4E^2G} - \frac{E_vG_v}{4EG^2} - \frac{G_u^2}{4EG^2} + \frac{E_v^2}{4E^2G} - \frac{2GE_{vv} - 2E_vG_v}{4EG^2} - \frac{2GG_{uu} - 2G_u^2}{4EG^2} = \dots \\ &\dots = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\frac{\partial}{\partial v} \frac{E_v}{\sqrt{EG}} + \frac{\partial}{\partial u} \frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right) \end{aligned}$$

□

6. CURVATURA GEODÉSICA.

En esta sección introduciremos las curvas geodésicas, que juegan un papel fundamental en la geometría diferencial porque localmente minimizan la distancia, y porque el tipo de curvatura que las caracteriza, la curvatura geodésica, complementa la de Gauss.

Como ya hemos visto en numerosas ocasiones, el estudio de las superficies se lleva a cabo por comparación con el estudio en \mathbb{R}^2 . Una vez más hagamos uso de esta comparación. Nótese que en \mathbb{R}^2 trabajamos con tres conceptos: las rectas, la medición de longitudes y ángulos y la medición de áreas. De igual modo, en una superficie trabajamos con la medición de longitudes, ángulos y áreas gracias a la primera forma fundamental y serán las geodésicas los que cumplan el papel análogo a las rectas en \mathbb{R}^2 .

Sea M una superficie diferenciable.

6.1. Curvas y curvatura geodésica. Empecemos definiendo las curvas geodésicas, la curvatura geodésica y qué relación hay entre ellas. Denotemos por $pr_p(u)$ a la proyección ortogonal del vector u sobre el plano tangente a M en p .

Una *geodésica* en una superficie M es una curva γ tal que $pr_p(\gamma''(t)) = 0$ para todo t . Esto equivale a decir que $\gamma''(t)$ es proporcional a $\nu(\gamma(t))$ para todo t .

Sea $\gamma(t)$ una curva de M superficie, definimos la *curvatura geodésica de γ en t* como $k_g(t) = \|pr_p(\gamma''(t))\|$

Nótese que para aligerar notación hemos convenido en denotar a $k_g(\gamma(t))$ por $k_g(t)$ pero no debemos olvidar que k_g se calcula en M , no en $[a, b]$.

Por tanto, $\gamma(t)$ es una geodésica si y solo si su curvatura geodésica es idénticamente nula.

6.2. Estudio local y propiedades. Sea $\varphi : W \rightarrow V$ una parametrización. Comencemos estudiando las coordenadas locales que tienen las curvas geodésicas. Para ello expresemos su primera y segunda derivada respecto al triedro de Gauss proporcionado por la parametrización. Siguiendo este procedimiento, que es parecido al que se hizo para definir los símbolos de Christoffel, se llega a una expresión local de la segunda derivada en función de primeras y segundas derivadas de las parciales, los símbolos de Christoffel y el vector normal. Si se sigue operando, se termina llegando a una expresión local de la curvatura geodésica, recordemos que estamos en un dominio de coordenadas, que solo depende de la primera forma fundamental y los símbolos de Christoffel:

$$k_g = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{(u'^2 E + 2u'v'F + v'^2 G)^{3/2}} \det \begin{pmatrix} u' & u'' + u'^2 \Gamma_{11}^1 + 2u'v' \Gamma_{12}^1 + v'^2 \Gamma_{22}^1 \\ v' & v'' + u'^2 \Gamma_{11}^2 + 2u'v' \Gamma_{12}^2 + u'^2 \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix}$$

Gracias a esta expresión deducimos el carácter intrínseco de la curvatura geodésica.

Si se sigue pensando en esta línea de estudio local, aprovechando los cálculos hechos hasta el momento, se llega a que las curvas geodésicas se pueden ver como solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$(EDG) \begin{cases} u'' + u'^2 \Gamma_{11}^1 + 2u'v' \Gamma_{12}^1 + v'^2 \Gamma_{22}^1 = 0 \\ v'' + u'^2 \Gamma_{11}^2 + 2u'v' \Gamma_{12}^2 + u'^2 \Gamma_{22}^2 = 0 \end{cases}$$

De nuevo, este sistema depende únicamente de los símbolos de Christoffel por lo que se ratifica que las geodésicas son de carácter intrínseco. Además, debido a las propiedades de las ecuaciones diferenciales respecto del problema del valor inicial, se deduce la existencia y unicidad local de geodésicas, i.e. *para todo punto p de la superficie y vector u del plano tangente correspondiente, existe una única geodésica γ definida en un entorno de p tal que $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = u$.*

Finalmente, en esta misma línea, se puede probar que las geodésicas minimizan distancia (de manera local). Obsérvese que si M es un plano tenemos que las geodésicas son las rectas, obteniendo así el clásico resultado de geometría euclídea que dice que la distancia mínima entre dos puntos es la longitud de la recta que los une.

7. DETERMINACIÓN DEL ÁNGULO DE TANGENCIA.

En esta sección se definen los conceptos de determinaciones de ángulos y ángulos de tangencia, claves para el importante teorema del Umlaufsatz. Además se muestra cómo las determinaciones de ángulos facilitan los cálculos de la curvatura geodésica.

Sea M una superficie diferenciable.

7.1. Determinación del ángulo y ángulo de tangencia. El enfoque que seguiremos en esta sección será el de extrapolar la situación dada en curvas planas a curvas en superficies. Para ello deberemos hacer las pertinentes modificaciones como que los ángulos de tangencia se midan respecto de la rama positiva de la primera línea coordenada, haciendo esta las veces de la rama positiva del eje de abscisas en el caso plano, de ahí que nos ciñamos siempre a dominios de coordenadas. Estudiémoslo con más detenimiento.

Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ una curva regular tal que su imagen está contenida en un dominio de coordenadas V de una parametrización φ . Aprovechando que estamos en un dominio de

coordenadas definiremos en cada punto, haciendo uso de la primera forma fundamental y la base de las parciales, un par de vectores tangentes que generen una base positiva. Se puede ver que

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial}{\partial u}, \quad \Psi = \frac{1}{\sqrt{E}\sqrt{EG-F^2}} \left(-F \frac{\partial}{\partial u} + E \frac{\partial}{\partial v} \right)$$

son un par de vectores tangentes que forman una base ortonormal positiva.

Nótese que acabamos de definir una base ortonormal positiva de los planos tangentes para cada punto del dominio de coordenadas por lo que podemos expresar los vectores tangentes a nuestra curva en estas bases:

$$\alpha'(t) = \lambda(t)\Phi(t) + \mu(t)\Psi(t), \quad \|\alpha'(t)\| = \sqrt{\lambda(t)^2 + \mu(t)^2}.$$

Como α es regular, su derivada nunca se anula y podemos definir su vector tangente normalizado

$$T_\alpha(t) = \frac{\lambda(t)}{\sqrt{\lambda(t)^2 + \mu(t)^2}} \Phi(t) + \frac{\mu(t)}{\sqrt{\lambda(t)^2 + \mu(t)^2}} \Psi(t)$$

Asimismo,

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^1 : t \mapsto \gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda(t)^2 + \mu(t)^2}} (\lambda(t), \mu(t))$$

es una parametrización diferenciable de la circunferencia que muestra cómo va variando dicho vector $T_\alpha(t)$.

Para estudiar mejor esta aplicación tomamos una elevación continua suya $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Esta terminología es de la teoría de recubridores de Topología Algebraica ya que el recubridor universal de \mathbb{S}^1 es $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 : t \mapsto (\cos t, \sin t)$. Por esa teoría, sabemos que existe θ tal que $\gamma(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t))$, de modo que

$$T_\alpha(t) = \cos \theta(t)\Phi(t) + \sin \theta(t)\Psi(t).$$

También se sabe que θ es única fijado el ángulo inicial $\theta(a)$.

Nótese que $\theta(t)$ es el ángulo que forma $\frac{\partial}{\partial u}$ con α' en el punto $\alpha(t)$, y a este ángulo lo denominaremos *ángulo de tangencia de α respecto de φ* .

Por otra parte, θ visto como función define el valor de dicho ángulo en su dominio de definición, y se dice que θ es una *determinación del ángulo* (en este caso del ángulo de tangencia mencionado).

7.2. Curvatura geodésica y las determinaciones del ángulo. A continuación resaltamos un resultado que simplifica el cálculo de la curvatura geodésica frente al visto en 6.2. Este resultado no solo es importante debido a su uso en la demostración del teorema de Gauss-Bonnet, objetivo principal de este trabajo, sino que su demostración muestra el manejo de los símbolos de Christoffel y las determinaciones de ángulos.

Proposición 7.1. *Sea $\alpha : I = [a, b] \rightarrow S$ una curva regular PPA y contenida en un dominio de coordenadas V de una parametrización local ortogonal $\varphi : W \rightarrow V$ de M ; sea*

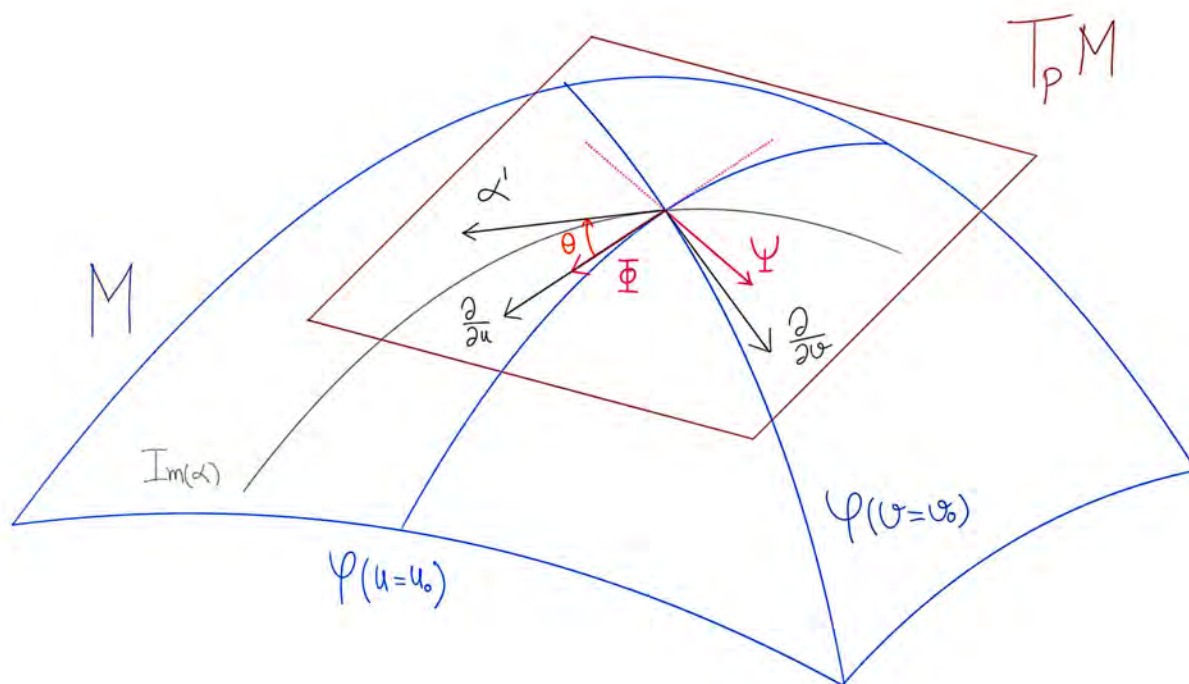


FIGURA 6. θ es una determinación del ángulo de tangencia.

$\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ una determinación del ángulo de tangencia de α . La fórmula siguiente expresa la curvatura geodésica de α :

$$k_g = \theta' + \frac{1}{2\sqrt{EG}} (G_u v' - E_v u')$$

Esta proposición se demuestra haciendo uso de una fórmula para la curvatura geodésica más general que involucra los símbolos de Christoffel, la cual, gracias al carácter ortogonal de la parametrización, se simplifica significativamente.

Demostración. Partamos de la fórmula vista en 6.2:

$$(1) \quad k_g = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{(u'^2 E + 2u'v'F + v'^2 G)^{3/2}} \det \begin{pmatrix} u' & u'' + u'^2 \Gamma_{11}^1 + 2u'v' \Gamma_{12}^1 + v'^2 \Gamma_{22}^1 \\ v' & v'' + u'^2 \Gamma_{11}^2 + 2u'v' \Gamma_{12}^2 + v'^2 \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix}$$

y de los tres sistemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales vistos en la sección 5 de los cuales los símbolos de Christoffel eran solución.

Como la parametrización es ortogonal, tenemos $F = 0$, y ya hemos visto que queda:

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 = E_u/2E, \Gamma_{12}^1 = E_v/2E, \Gamma_{22}^1 = -G_u/2E, \\ \Gamma_{11}^2 = -E_v/2G, \Gamma_{12}^2 = G_u/2G, \Gamma_{22}^2 = G_v/2G. \end{cases}$$

Por otro lado, como caso particular del desarrollo explicado en 7.1, al ser $\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}$ ortogonales, la base ortonormal que obtenemos es $\Phi = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial}{\partial u}, \Psi = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial v}$ y su ángulo de tangencia θ viene dado por

$$\alpha' = \frac{1}{\sqrt{E}} \cos \theta(t) \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{G}} \sen \theta(t) \frac{\partial}{\partial v}$$

(nótese que como α PPA, $\alpha'(s) = T_\alpha(s)$).

Considerando ahora esta parametrización por el arco de la curva, $\alpha(s) = \varphi(u(s), v(s))$, obtenemos $\alpha' = u' \frac{\partial}{\partial u} + v' \frac{\partial}{\partial v}$ por lo que

$$u' = \frac{1}{\sqrt{E}} \cos \theta(t), \quad v' = \frac{1}{\sqrt{G}} \operatorname{sen} \theta(t).$$

Calculamos ahora las segundas derivadas ($u'' = -\frac{1}{\sqrt{E}}\theta' \cos \theta(t) + \dots$, $v'' = \frac{1}{\sqrt{G}}\theta' \operatorname{sen} \theta(t) + \dots$), obteniendo así u', v', u'', v'' en función de la primera forma fundamental. Finalmente, sustituimos y operamos en (1), hasta que resulta la fórmula enunciada:

$$\begin{aligned} k_g &= \sqrt{EG} \det \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{E}} \cos \theta & -\frac{1}{\sqrt{E}}\theta' \operatorname{sen} \theta + \frac{1}{2E\sqrt{G}} \left(\frac{E_v \cos \theta}{\sqrt{E}} - \frac{G_u \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{G}} \right) \operatorname{sen} \theta \\ \frac{1}{\sqrt{G}} \operatorname{sen} \theta & \frac{1}{\sqrt{G}}\theta' \cos \theta + \frac{1}{2G\sqrt{E}} \left(\frac{G_u \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{G}} - \frac{E_v \cos \theta}{\sqrt{E}} \right) \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -\theta' \operatorname{sen} \theta + \frac{1}{2\sqrt{EG}} (E_v u' - G_u v') \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \theta' \cos \theta + \frac{1}{2\sqrt{EG}} (G_u v' - E_v u') \cos \theta \end{pmatrix} = \theta' + \frac{1}{2\sqrt{EG}} (G_u v' - E_v u'). \end{aligned}$$

□

8. POLÍGONOS CURVILÍNEOS.

En esta sección definimos los polígonos curvilíneos, concepto muy importante ya que los usaremos para enunciar el Umlaufsatz y construir las triangulaciones diferenciables de superficies, dos técnicas delicadas usadas en la demostración del teorema de Gauss-Bonnet. Asimismo definiremos sus índices de rotación y los orientaremos.

Sea M una superficie diferenciable.

8.1. Polígonos curvilíneos. Definamos primero el tipo de curva más básico que usaremos: se dice que α es una *curva de Jordan* si $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva cerrada ($\alpha(a) = \alpha(b)$) tal que $\alpha|_{(a,b)}$ es inyectiva (y, por tanto, $\alpha|_{[a,b]}$ también lo es).

Nuestro primer objetivo será definir el objeto sobre el cual se predicará el Umlaufsatz, el polígono curvilíneo.

Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ una curva regular diferenciable a trozos tal que su imagen está contenida en un dominio de coordenadas $V \subset M$ de una parametrización φ , dominio que se supone orientado por la parametrización. Por definición de ser diferenciable a trozos, tenemos una partición $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ tal que la restricción de α a cada subintervalo $I_k = [t_{k-1}, t_k]$ es una curva regular. Denominamos *vértices* a los t_k ; las derivadas en dichos puntos, $\alpha'(t_k^-)$ y $\alpha'(t_k^+)$, pueden no coincidir y por tanto forman un ángulo $\Delta\theta_k$. Obsérvese que este ángulo se mide gracias a la primera forma fundamental en el plano tangente $T_{\alpha(t_k)}M$, que viene orientado por la base de las parciales. Si $\Delta\theta_k = \pi$ diremos que se tiene una *cúspide* y el ángulo podrá ser π o $-\pi$. Este caso lo excluirémos de nuestros razonamientos, para poder considerar $\Delta\theta_k$ en $(-\pi, \pi)$, y con signo positivo si $\{\alpha'(t_k^-), \alpha'(t_k^+)\}$ es base positiva y signo negativo en caso contrario. Denominamos a $\Delta\theta_k$ el *ángulo externo* de la curva en el vértice t_k . Nótese que en el caso particular de curvas

cerradas, que es en el que nosotros nos centraremos, tiene sentido considerar el ángulo externo en el vértice $\alpha(b) = \alpha(a)$ y comparar las derivadas $\alpha'(b^-)$ y $\alpha'(a^+)$. Definimos $\Delta\theta_0 = \Delta\theta_n$ como el ángulo definido por $\alpha'(b^-)$ y $\alpha'(a^+)$ de manera análoga a como se definieron el resto de ángulos externos.

Finalmente, definimos un *polígono curvilíneo de M* como una curva de Jordan diferenciable a trozos, regular y sin cúspides en un dominio de coordenadas de M .

8.2. Índice de rotación de un polígono curvilíneo. Pasemos ahora a estudiar los ángulos de tangencia de un polígono curvilíneo. Sea $\alpha : I = [a, b] \rightarrow M$ un polígono curvilíneo con su imagen contenida en un dominio de coordenadas V de una parametrización φ , con vértices $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ y ángulos externos $\Delta\theta_1, \dots, \Delta\theta_n$.

Como α es un polígono curvilíneo, la restricción de α a $I_k = [t_{k-1}, t_k]$ es una curva regular con su imagen contenida en el dominio de coordenadas V . Nótese que, con esta restricción, estamos en la situación de 7.1 por lo que podemos definir el ángulo de tangencia de la restricción respecto a la parametrización y su determinación, única una vez fijado el valor inicial $\theta_k(t_{k-1})$. Es por ello que elegimos de manera arbitraria $\theta_1(t_0)$ y el resto viene definido de manera recursiva como sigue : $\theta_{k+1}(t_k) = \theta_k(t_k) + \Delta\theta_k$. Nótese que, al fijar $\theta_1(t_0)$ se determina la unicidad de todos los θ_k .

Aunando estas θ_k definimos $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ que, al igual que el vector tangente, por tratarse de un polígono curvilíneo, tiene discontinuidades en los vértices. Denotemos:

$$\begin{cases} \theta(t_0^+) = \theta_1(t_0), \\ \theta(t_k^-) = \theta_k(t_k), & \theta(t_k^+) = \theta_{k+1}(t_k), & 1 < k < n \\ \theta(t_n^-) = \theta_n(t_n), & \theta(t_n^+) = \theta_n(t_n) + \Delta\theta_n. \end{cases}$$

Las discontinuidades son $\theta(t_k^+) = \theta(t_k^-) + \Delta\theta_k$. Esta aplicación θ es una *determinación del ángulo de tangencia de α respecto de φ* que solo depende de $\theta_1(t_0)$.

Una vez obtenida esta determinación, podemos definir la *variación del ángulo de tangencia* de α entre dos valores del parámetro $t < t'$: $\theta(t') - \theta(t)$. Nótese que está bien definida, i.e. no depende del ángulo inicial elegido, porque dos determinaciones difieren en una constante, la diferencia de ángulos iniciales. El caso particular de la variación entre los extremos del intervalo nos lleva al concepto sobre el que se sustenta el Umlaufsatz:

Sea $\alpha : I \rightarrow M$ un polígono curvilíneo tal que su imagen está contenida en un dominio de coordenadas de una parametrización $\varphi : W \rightarrow V$ de M , y sea θ una determinación de su ángulo de tangencia. Se llama *índice de rotación de α respecto de φ* al número entero

$$i(\alpha) = \frac{1}{2\pi}(\theta(b^+) - \theta(a^+)).$$

Nótese que $i(\alpha)$ es un número entero ya que como $\gamma(a) = \gamma(b)$, entonces $\theta(a) = \theta(b) + 2\pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$ por la construcción de teoría de recubridores en la que $\gamma = p \circ \theta$, en particular como $\gamma(a) = \gamma(b)$, se tiene que $p \circ \theta(a) = p \circ \theta(b)$.

De nuevo, este concepto está bien definido ya que es un caso particular de una variación del ángulo de tangencia que, como ya hemos comentado, está bien definida.

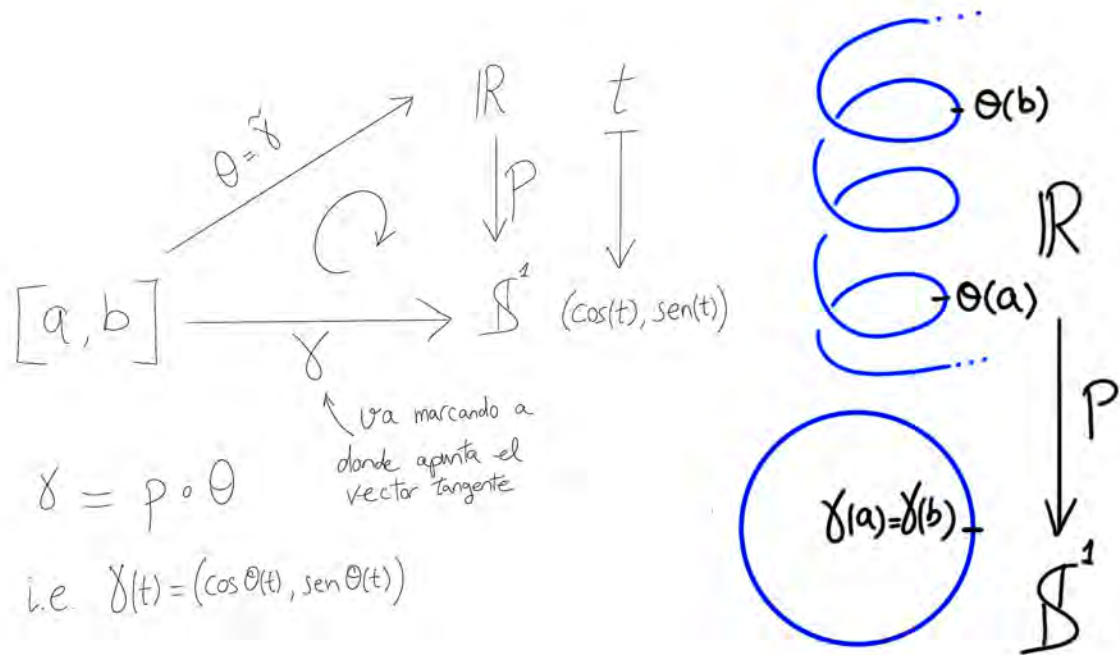


FIGURA 7. El espacio recubridor de \mathbb{S}^1 es \mathbb{R} .

De manera intuitiva, en un contexto más general considerando curvas cerradas que tal vez sean periódicas, $i(\alpha)$ debe entenderse como el número de vueltas que la curva α da sobre sí misma al evaluarse en todo su intervalo de definición, donde el signo muestra el sentido de giro. Esta última apreciación del sentido de giro se verá reforzada por la siguiente observación sobre la relación entre $i(\alpha)$ y las reparametrizaciones.

Observemos cómo afectan los cambios de parámetro al índice de rotación. Es fácil ver que si consideramos un cambio negativo de parámetro $t(s)$, i.e. decreciente, entonces

$$i(\bar{\alpha}) = -i(\alpha) \text{ donde } \bar{\alpha} = (\alpha \circ t)(s).$$

Intuitivamente, como $i(\alpha)$ muestra el número de vueltas que α da sobre sí misma, al recorrer $\bar{\alpha}$ la misma traza el mismo número de vueltas pero en sentido contrario, el índice de $\bar{\alpha}$ es el opuesto.

Concluimos por tanto que un cambio de parámetro negativo cambia el signo del índice de rotación y, en tanto que un cambio positivo es composición de dos negativos, los cambios positivos de parámetro no cambian el índice de rotación.

8.3. Orientación de un polígono curvilíneo y sus ángulos internos. Finalicemos esta sección viendo cómo orientar un polígono curvilíneo y definamos sus ángulos internos.

Sea $\alpha : I = [a, b] \rightarrow M$ un polígono curvilíneo contenido en un dominio de coordenadas V de una parametrización $\varphi : W \rightarrow V$. Recordemos que el signo del índice de rotación cambia al hacer cambios negativos de parámetro, luego ese signo depende solo de la orientación del polígono. Diremos, por tanto, que esa orientación es *positiva* o *negativa* según lo sea el índice de rotación. Recordemos también que para todo punto p del dominio

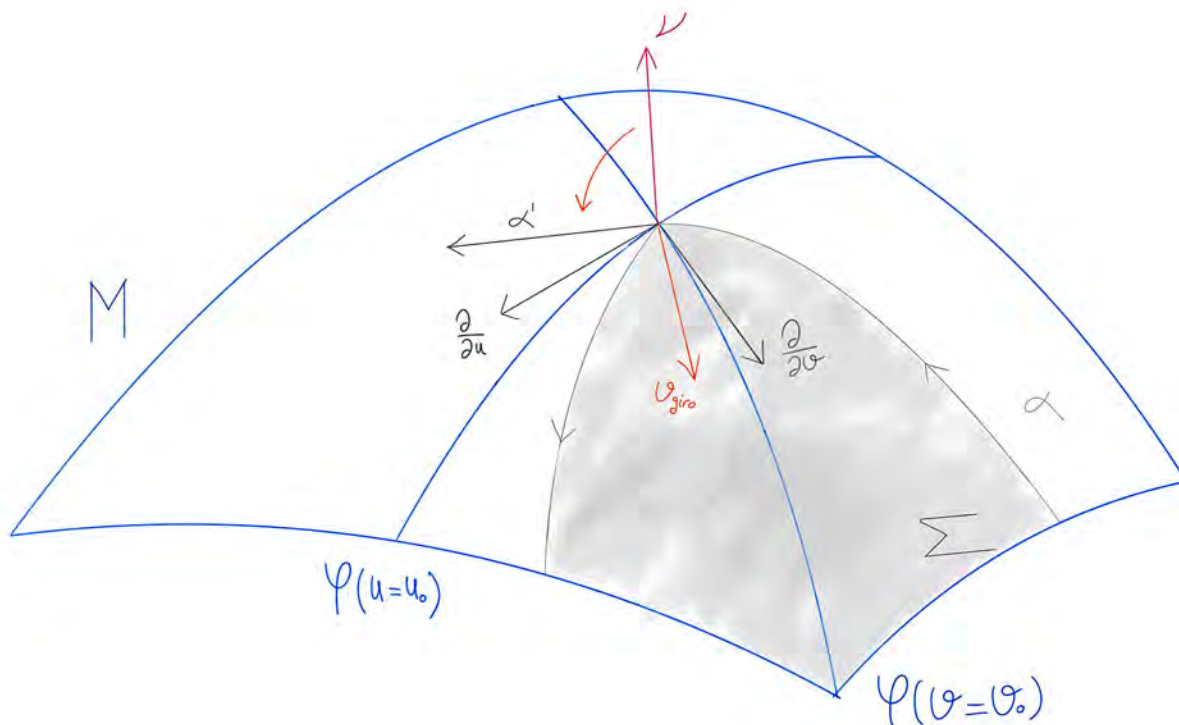


FIGURA 8. Orientación positiva caracterizada mediante el sentido de giro.

de coordenadas el plano tangente viene orientado por la base de las parciales generada por la parametrización.

Llamemos Σ al interior del polígono, observamos que α está orientada positivamente si al girar el vector tangente a la curva α en p según la orientación inducida por φ , este apunta a Σ . Este sentido de giro se puede explicitar mediante un vector haciendo uso del campo normal ν generado por las parciales:

$$\nu_{\text{giro}} = \nu \times \alpha'(t) \quad \text{donde} \quad \nu = \frac{\partial}{\partial u} \Big|_p \times \frac{\partial}{\partial v} \Big|_p$$

Gracias a estas observaciones llegamos a una forma intuitiva para ver si la curva está orientada positivamente: α está orientada positivamente si y solo cuando el vector normal recorre α en el sentido de su orientación mirando al vector tangente, el interior de α queda a la izquierda.

Una vez definida la orientación de un polígono curvilíneo pasamos a definir un concepto muy intuitivo a nivel geométrico, los ángulos internos.

Sea $\alpha : I = [a, b] \rightarrow M$ un polígono curvilíneo cubierto por una parametrización $\varphi : W \rightarrow V$ de M . Sean $\Delta\theta_k$ los ángulos externos del polígono. Para cada k definimos el *ángulo interno* $\phi_k = \pi - \Delta\theta_k$.

Nótese que como $|\Delta\theta_k| < \pi$ entonces ϕ_k es siempre positivo y menor o mayor que π según $\Delta\theta_k$ sea positivo o negativo.

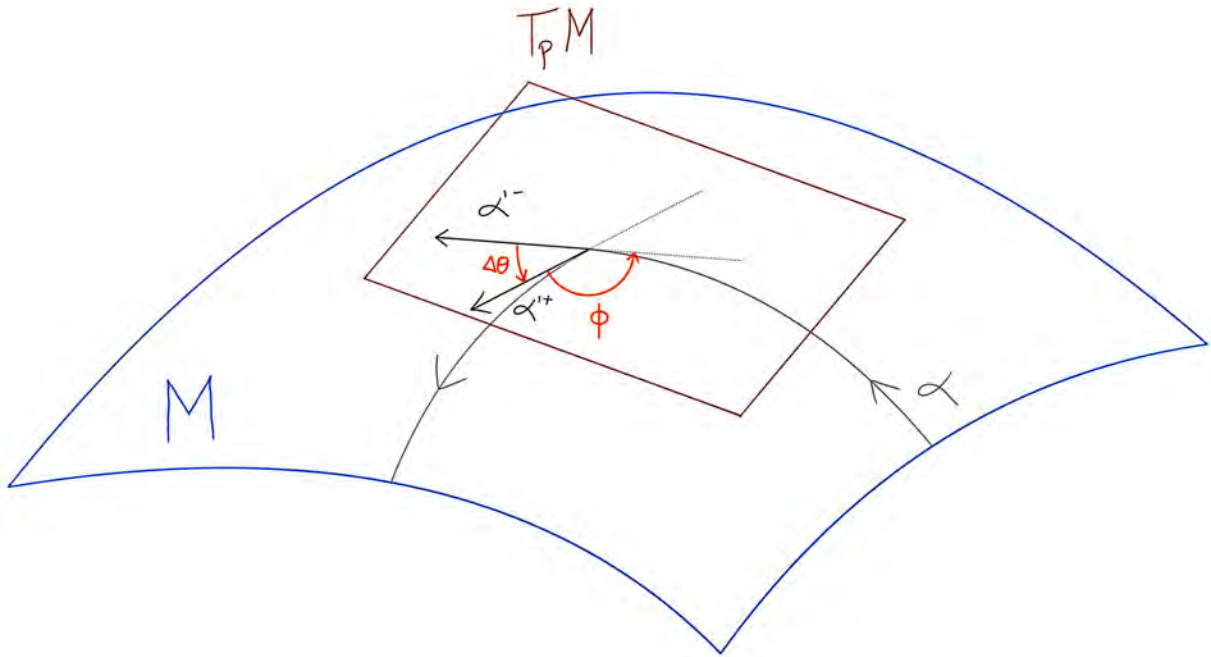


FIGURA 9. $\Delta\theta$ es el ángulo externo. ϕ es el ángulo interno.

Obsérvese también que el ángulo ϕ_k es el ángulo positivo entre $\alpha'(t_k^+)$ y $-\alpha'(t_k^-)$ medido según la orientación del plano tangente en $\alpha(t_k)$.

9. UMLAUFSATZ

El Umlaufsatz es un importante teorema sobre curvas cerradas de carácter global que estudia cómo giran dichas curvas hasta que dan una vuelta completa. Si las curvas cerradas son suficientemente buenas (son diferenciables a trozos y no tienen autocortes), se tiene que el giro total de estas curvas es 2π o -2π al dar una vuelta sobre sí misma.

En esta sección probaremos las versiones aplicadas a curvas de Jordan diferenciables, por lo que en particular no tendrán picos. Primero demostraremos el caso para curvas planas y luego lo extrapolaremos a curvas en superficies.

La versión más general que trata sobre polígonos curvilíneos es una generalización de la versión que aquí demostramos, en la que se trata de limar los posibles picos que la curva pueda tener como consecuencia de estar definida a trozos y así poder aplicar la versión para curvas regulares. Si bien a nivel conceptual esta generación no presenta complicaciones, el desarrollo técnico que precisa para allanar los bordes en el caso plano y controlar los ángulos que se generan en las curvas en superficies es arduo y largo, involucrando técnicas como la interpolación polinomial. Por ello enunciamos el resultado e indicamos que la demostración al completo se puede encontrar en [1] y [2].

Empecemos demostrando el Umlaufsatz para curvas de Jordan planas:

Teorema 9.1. *El índice de rotación de una curva de Jordan plana regular es $+1$ o -1 .*

Demostración. Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva de Jordan, que sin pérdida de generalidad podemos suponer PPA. Podemos considerar una extensión periódica, que seguimos denotando $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ de periodo $\Delta = b - a$, y escribimos $\alpha(s) = (x(s), y(s))$. Como $[a, b]$ es compacto, $y(s)$ tiene un mínimo, digamos en $s = c$; podemos suponer, gracias a haber considerado la extensión a la curva periódica en \mathbb{R} , $c = a$. De este modo $y'(a) = 0$ y por tanto $T_\alpha(a) = (\pm 1, 0)$. Ahora, reparametrizando de nuevo de ser necesario, podemos suponer $T_\alpha(a) = (1, 0)$. Finalmente, también podemos suponer que $\alpha(a) = (0, 0)$ (reemplazando α por $\alpha - \alpha(a)$). Por tanto, hemos llegado a que la traza de α está en el semiplano superior $y \geq 0$ y es tangente al eje de abscisas en el origen para el valor del parámetro $s = a$.

Consideremos ahora el triángulo $X = \{(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2 : a \leq s_1 \leq s_2 \leq b\}$ y la aplicación $H : X \rightarrow \mathbb{S}^1$ dada por:

$$H(s_1, s_2) = \begin{cases} \frac{\alpha(s_2) - \alpha(s_1)}{\|\alpha(s_2) - \alpha(s_1)\|} & \text{si } s_1 < s_2 \text{ y } (s_1, s_2) \neq (a, b), \\ \alpha'(s_1) & \text{si } s_1 = s_2, \\ -\alpha'(a) = -\alpha'(b) & \text{si } (s_1, s_2) = (a, b). \end{cases}$$

Nótese que el denominador $\|\alpha(s_2) - \alpha(s_1)\|$ nunca se anula si $s_1 < s_2$ y $(s_1, s_2) \neq (a, b)$ ya que la curva no tiene autocortes en $[a, b]$.

Veamos ahora que H es continua. Si $s_1 < s_2$ y $(s_1, s_2) \neq (a, b)$, H es claramente continua. Ver la continuidad en los otros dos casos se consigue mediante un ingenioso truco de análisis, haciendo uso de la continuidad en integrales y la periodicidad de α .

Sabiendo que H es continua en X , como X es compacto y convexo, gracias a la teoría de recubridores, sabemos que H tiene una única elevación $\bar{H} : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\bar{H}(a, a) = 0$ ya que nuestra condición inicial es $H(a, a) = \alpha'(a) = (1, 0)$ por lo que $p \circ \bar{H}(a, a) = H(a, a) = p(0) = (1, 0)$.

Observemos que $H|_{s_1=s_2} = \alpha'$ por lo que como \bar{H} es elevación de H , tenemos que $\bar{H}|_{s_1=s_2} = \theta$ es elevación de α' , i.e., $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : s \mapsto \theta(s) = \bar{H}(s, s)$ es una elevación de $\alpha'(s) = T_\alpha(s)$. Recordemos (7.1) que θ es elevación continua de α' y por tanto una determinación del ángulo de tangencia, por lo que se tiene que

$$i(\alpha) = \frac{1}{2\pi}(\theta(b) - \theta(a)) = \frac{1}{2\pi}\theta(b).$$

Por otra parte, el vector $\alpha(s) - \alpha(a)$ apunta siempre hacia el semiplano superior y, por tanto, $\bar{H}(a, s)$ está en un intervalo del tipo $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ (basta pensar en la circunferencia goniométrica, i.e. la circunferencia unidad donde se miden los ángulos, para darse cuenta de esta observación). Ahora bien, la aplicación $[a, b] \rightarrow \mathbb{R} : s \mapsto \bar{H}(s, s)$ es continua, luego su imagen es conexa, y en consecuencia estará contenida en uno solo de estos intervalos. Como $\bar{H}(a, a) = 0$, el intervalo debe ser $[0, \pi]$ y como $H(a, b) = -\alpha'(a) = -(1, 0)$, entonces $\bar{H}(a, b) = \pi$.

Análogamente, el vector $\alpha(b) - \alpha(s)$ apunta siempre al semiplano inferior por lo que $\bar{H}(s, b)$ está en un intervalo $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$ y, al igual que antes, por conexión siempre es el mismo intervalo. Como acabamos de ver que $\bar{H}(a, b) = \pi$, el intervalo es $[\pi, 2\pi]$ y como $\alpha'(b) = (1, 0)$ tenemos que $\bar{H}(b, b) = \theta(b) = 1$.

Por tanto,

$$i(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\theta(b) = \frac{1}{2\pi}\overline{H}(b, b) = 2\pi.$$

□

Generalizamos ahora este resultado demostrando el Umlaufsatz para curvas de Jordan diferenciables en M .

Teorema 9.2. *El índice de rotación de una curva de Jordan diferenciable de M respecto de una parametrización local que lo cubre es $+1$ o -1 .*

Demostración. Sea $\varphi : W \rightarrow V$ una parametrización de un abierto V de M , y sea $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ una curva de Jordan diferenciable (i.e. un polígono curvilíneo sin vértices) tal que su traza está contenida en V . Denotamos $I = [a, b]$.

Como α no tiene vértices que puedan generar discontinuidades, obtenemos una determinación continua $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ del ángulo que forman $\frac{\partial}{\partial u}$ y α' , con ángulo inicial $\theta(a) \in [0, 2\pi)$. Recordemos que, con esta construcción, el índice de rotación de α es $i(\alpha) = \frac{1}{2\pi}(\theta(b) - \theta(a))$.

Por otra parte, como la traza de α está contenida en W , podemos considerar la curva de Jordan plana $\beta = \varphi^{-1} \circ \alpha : I \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$. Gracias al teorema 9.1, el Umlaufsatz para curvas planas, sabemos que $i(\beta) = \pm 1$. Recordemos que para calcular $i(\beta)$ necesitamos $\theta_\beta : I \rightarrow \mathbb{R}$ una elevación continua cualquiera de $T_\beta : I \rightarrow \mathbb{S}^1$, obteniendo así:

$$i(\beta) = \frac{1}{2\pi}(\theta_\beta(b) - \theta_\beta(a)) = \pm 1$$

Podemos suponer que el ángulo inicial $\theta_\beta(a)$ de esta elevación también está en $[0, 2\pi)$ y afirmamos que $|\theta_\beta(t) - \theta(t)| < \pi, \forall t$.

En efecto, por construcción sabemos que las coordenadas de $\beta'(t)$ en B_c de \mathbb{R}^2 son las mismas que las del vector $\alpha'(t)$ respecto de la base de las parciales en el punto $\alpha(t)$, $\left\{ \frac{\partial}{\partial u} \Big|_{\alpha(t)}, \frac{\partial}{\partial v} \Big|_{\alpha(t)} \right\}$, y también tenemos que

$$\begin{cases} \beta'(t) = \|\beta'(t)\|T_\beta(t) = \|\beta'(t)\|\cos\theta_\beta(t)(1, 0) + \|\beta'(t)\|\sen\theta_\beta(t)(0, 1), \\ \alpha'(t) = \|\alpha'(t)\|T_\alpha(t) = \|\alpha'(t)\|\cos\theta(t)\frac{\partial}{\partial u} \Big|_{\alpha(t)} + \|\alpha'(t)\|\sen\theta(t)\frac{\partial}{\partial v} \Big|_{\alpha(t)}. \end{cases}$$

Por tanto, $\cos\theta_\beta(t), \cos\theta(t)$ deben tener el mismo signo ya que son iguales salvo multiplicación por escalar positivo (que viene dado por la norma de los respectivos vectores tangentes), y lo mismo ocurre con $\sen\theta_\beta(t), \sen\theta(t)$, por lo que llegamos a

$$(i) \cos\theta_\beta(t)\cos\theta(t) > 0 \text{ o los dos cosenos se anulan, y}$$

$$(ii) \sen\theta_\beta(t)\sen\theta(t) > 0 \text{ o los dos senos se anulan.}$$

Esto implica que θ_β y θ como ángulos están en el mismo cuadrante de la circunferencia goniométrica.

Aplicando esto para $t = a$, como $\theta_\beta(a), \theta(a) \in [0, 2\pi)$, tenemos que $|\theta_\beta(a) - \theta(a)| < \pi$. Aplicando esto para t arbitrario, llegamos a que $|\theta_\beta(t) - \theta(t)| \neq \pi$. Por tanto, por continuidad concluimos que $|\theta_\beta(t) - \theta(t)| < \pi$, para todo t .

Gracias a esta afirmación,

$$\begin{aligned} 2\pi |i(\beta) - i(\alpha)| &= |(\theta_\beta(b) - \theta_\beta(a)) - (\theta(b) - \theta(a))| \\ &= |(\theta_\beta(b) - \theta(b)) - (\theta_\beta(a) - \theta(a))| < 2\pi, \end{aligned}$$

por lo que $|i(\beta) - i(\alpha)| < 1$. Como los índices de rotación son números enteros, sólo puede ser $i(\alpha) = i(\beta) = \pm 1$.

□

Finalmente, teniendo en cuenta el comentario del principio de la sección sobre la posible generalización del Umlaufsatz, enunciaremos el Umlaufsatz para polígonos curvilíneos en M :

Teorema 9.3. *El índice de rotación de un polígono curvilíneo de M respecto de una parametrización local que lo cubre es ± 1 .*

Como ya observamos, en un contexto más general, el índice de rotación de una curva cerrada que tal vez sea periódica, indica el número de vueltas que da sobre sí misma en su dominio de definición indicando además el sentido de giro. Es por ello que, al ceñirnos a nuestro caso particular de polígonos curvilíneos, que son un caso especial de curvas de Jordan, solo se da una vuelta y se permiten los dos sentidos de giro, que es justo lo que dice el Umlaufsatz.

10. TRIANGULACIONES DE SUPERFICIES.

En esta sección se introducirán los conceptos necesarios (entre los que está el teorema de la curva de Jordan) para después estudiar triangulaciones de superficies. Posteriormente se presentará la característica de Euler de una superficie compacta y terminaremos la sección orientando triangulaciones.

Sea M una superficie diferenciable.

10.1. Regiones regulares simples y triángulos de una superficie. Sea $\varphi : W \rightarrow V$ una parametrización de un abierto V de M . Se dice que un conjunto compacto $\Sigma \subset V$ es una *región regular simple* si su interior Σ° en V es conexo no vacío y su frontera $\partial\Sigma = \Sigma \setminus \Sigma^\circ$ es un polígono curvilíneo.

Para observar las consecuencias topológicas que tiene esta definición, enunciaremos dos importantes teoremas en el ámbito de la topología:

Teorema 10.1. *(Jordan) Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva de Jordan topológica (i.e. la parametrización α no es diferenciable, sino sólo continua). Entonces $C = \alpha([a, b])$ separa el plano en dos componentes conexas, ambas con la misma frontera, que es precisamente C .*

La palabra *separa* significa que $\mathbb{R}^2 \setminus C$ no es conexa, y gracias a un razonamiento elemental de topología usando la compacidad de C en el plano y que esta implica estar acotado, se deduce que de las dos componentes conexas en las que se divide el plano hay una acotada, de la que se dice que es el *interior de la curva de Jordan*, y otra no acotada,

que es el *exterior*. Otra consecuencia de este teorema es que *todos los puntos de C son adherentes tanto al exterior como al interior*.

Teorema 10.2. (*Schönflies*) *La adherencia del interior de una curva de Jordan es un subconjunto homeomorfo a un disco cerrado, y borde la curva de Jordan.*

Veamos ahora qué implicaciones topológicas obtenemos: Como $C = \varphi^{-1}(\partial\Sigma)$ es una curva de Jordan de \mathbb{R}^2 , por el teorema de Jordan, descompone el plano en una componente acotada y otra no acotada de la que es frontera común.

Como φ es un homeomorfismo lleva abiertos a abiertos y bordes a bordes, por lo que se tiene:

$$\mathbb{R}^2 = (\mathbb{R}^2 \setminus \varphi^{-1}(\Sigma)) \cup C \cup \varphi^{-1}(\Sigma^\circ),$$

y como en esta unión $\mathbb{R}^2 \setminus \varphi^{-1}(\Sigma)$ es abierto no acotado, ya que es complementario de un compacto en \mathbb{R}^2 , y $\varphi^{-1}(\Sigma^\circ)$ es abierto conexo, deducimos que $\varphi^{-1}(\Sigma^\circ)$ es la componente acotada de $\mathbb{R}^2 \setminus C$.

Por tanto, $\overline{\varphi^{-1}(\Sigma^\circ)} = C \cup \varphi^{-1}(\Sigma^\circ) = \varphi^{-1}(\Sigma)$ y por el teorema de Schönflies, $\varphi^{-1}(\Sigma)$ es homeomorfo a un disco cerrado. En esta misma línea se puede ver que $\varphi^{-1}(\Sigma^\circ)$ y Σ° son homeomorfos a un disco abierto.

Pasemos ahora a definir los triángulos en el espacio para después extrapolarlo a superficies. Sean p^1, p^2, p^3 tres puntos del espacio afín no alineados, consideremos su envoltura convexa:

$$H = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid p = t_1 p^1 + t_2 p^2 + t_3 p^3, t_1 + t_2 + t_3 = 1, t_1, t_2, t_3 \geq 0\}.$$

Llamamos *triángulo abierto* $\mathbb{T}^\circ \subset H$ al interior de H . Asimismo, llamamos *triángulo cerrado* $\mathbb{T} \subset H$ a la adherencia de \mathbb{T}° , i.e. $\mathbb{T} = H$. Denominamos *vértices* de los triángulos a los p^i y *aristas* a los segmentos que unen estos vértices, vértices incluidos.

Extrapolemos ahora estos conceptos a superficies. Un *triángulo cerrado* de M es un subconjunto T homeomorfo a \mathbb{T} . Como \mathbb{T} es compacto, T también lo es, por lo que en particular también es cerrado. El interior, las aristas y los vértices de T son las imágenes vía el homeomorfismo del interior, las aristas y los vértices de \mathbb{T} . Denotamos T° el interior de T , y $\partial T = T \setminus T^\circ$ la unión de las tres aristas de T .

En realidad, un triángulo cerrado no es más que un subconjunto homeomorfo a un disco donde se han elegido tres puntos del borde que hacen las veces de vértices. Por ejemplo, una región regular simple cuya frontera es un triángulo curvilíneo.

10.2. Triangulación de una superficie. Una *triangulación* de la superficie M es una descomposición cuya $M = \cup_i T_i$ en una unión finita de triángulos cerrados T_i , tales que cuando se encuentran lo hacen exactamente a lo largo de una arista común, o en un vértice.

Llamamos *caras cerradas* de la triangulación a los triángulos T_i y *caras abiertas* a sus interiores T_i° . Decimos que las aristas de una cara son los *lados* de esa cara. Los vértices conservan su nombre. Obsérvese que una cara cerrada es un subconjunto cerrado de M ya que ha sido definido como adherencia (por lo que es su propia adherencia), así como una cara abierta es un subconjunto abierto de M pues es el complementario de la unión de las restantes caras cerradas, que es un subconjunto cerrado.

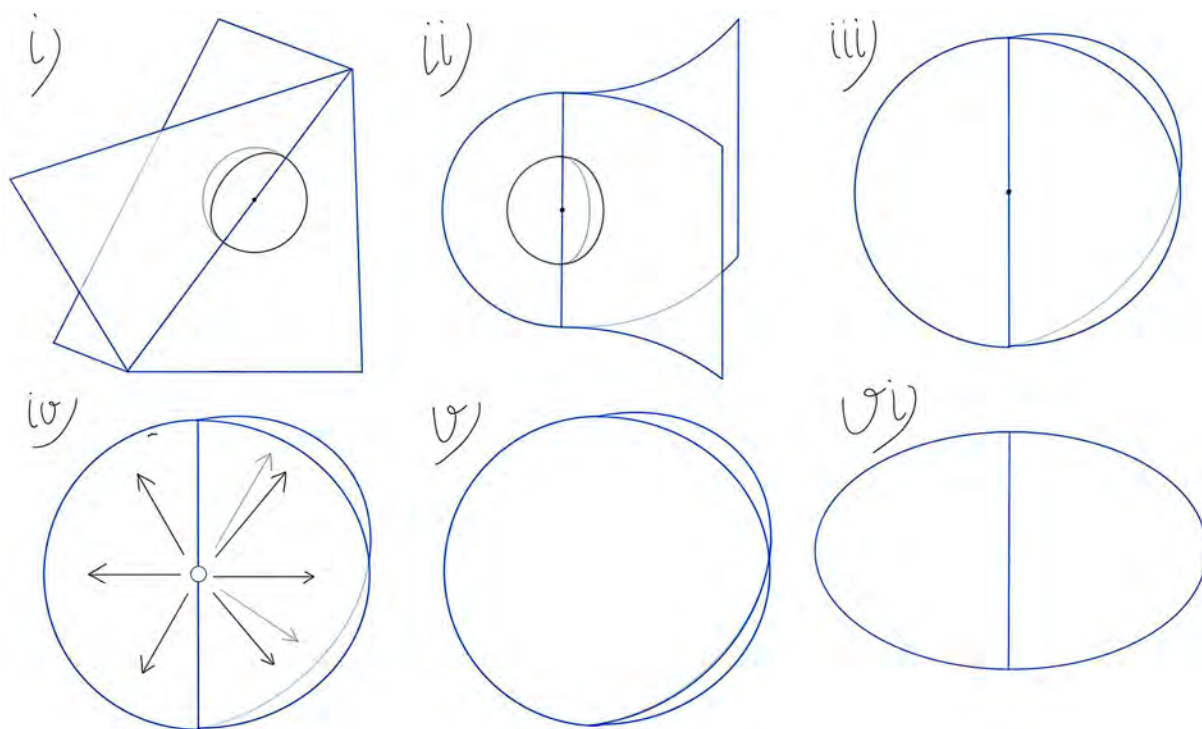


FIGURA 10. Situaciones y transformaciones señaladas en el razonamiento de la *condición de adyacencia*.

Resaltemos el hecho de que si M tiene una triangulación, entonces es compacta ya que es una unión finita de triángulos compactos.

Finalmente, decimos que dos caras que comparten un lado son *adyacentes*, y a raíz de esta definición se obtiene un útil resultado denominado *condición de adyacencia*, cada arista de la triangulación es lado de exactamente dos caras. Estudiemos con más detenimiento esta condición de adyacencia para ver que depende de la topología algebraica. Supongamos que una arista fuera lado de tres caras, entonces podríamos encontrarnos dos casos, el primero (i), que al aproximarnos con curvas al punto los planos tangentes no coincidiesen, por tanto no sería localmente como un abierto de \mathbb{R}^2 y no estaríamos en una variedad diferenciable, cayendo así en un absurdo. El segundo caso (ii) es que al aproximarnos mediante curvas, los planos tangentes sí coincidan, por lo que mediante el argumento anterior no podemos llegar a un absurdo, necesitaremos la topología algebraica. Veamos brevemente qué argumento se usaría: la situación mostrada en (ii) se puede ver localmente como (iii), y si le quitamos el punto central, podemos aplicar la siguiente retracción (iv), por lo que tiene el mismo grupo de homotopía que (v), que se puede ver como (vi), que tiene el grupo de homotopía que \mathbb{R}^2 menos dos puntos, i.e. $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, diferente al grupo de homotopía de \mathbb{R}^2 menos un punto, i.e. \mathbb{Z} , por lo que localmente nuestro caso (ii) no es homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^2 , lo cual es un absurdo. Con este razonamiento se obtiene la nombrada condición de adyacencia. Este resultado relaciona de forma clara el número de caras C , con el número de aristas A , obteniendo la fórmula $3C = 2A$.

10.3. Característica de Euler. Sea M una superficie compacta de \mathbb{R}^3 y $M = \cup_i T_i$ una triangulación suya. Se denomina *característica de Euler de la triangulación* al número

$$\chi = C - A + V$$

donde C es el número de caras de la triangulación, A es el número de aristas y V es el número de vértices.

La característica de Euler es un concepto central en la topología por sus muchas propiedades, en particular, juega un papel fundamental en el teorema de Gauss-Bonnet haciendo de nexo entre la topología y la geometría. Mencionemos dos de sus propiedades más conocidas:

(1) Normalmente se afirma que la característica de Euler no depende de la triangulación y se estudia que es un *invariante topológico*, no obstante, dada la naturaleza de este trabajo, donde el foco está puesto en el teorema de Gauss-Bonnet, se puede observar que gracias a que la característica de Euler es un invariante topológico y gracias al teorema de Gauss-Bonnet (que relaciona χ y una integral que no depende de la triangulación, ya que daremos el marco teórico general de integración y usaremos las triangulaciones solo como una herramienta de cálculo de dicho concepto definido de manera global e independiente a ellas) se obtiene que χ no depende de la triangulación.

(2) La orientabilidad y la característica de Euler de una superficie compacta la clasifican por completo, i.e. si dos superficies compactas son las dos orientables (o las dos no orientables) y tienen la misma característica de Euler, entonces son difeomorfas.

10.4. Orientación de triangulaciones. Veamos cómo orientar una triangulación acorde a una orientación fijada en la superficie.

Sea M una superficie compacta orientable. Por ser orientable podremos encontrar una aplicación de Gauss asociada N , la cual nos proporcione un vector normal a la superficie en cada punto (i.e. al plano tangente a la superficie en dicho punto). Gracias a dicho campo perpendicular seremos capaces de fijar una orientación en M (orientando los planos tangentes según bases cuyas tales que junto con el correspondiente vector normal formen una base con la orientación estándar del espacio ambiente, como ya vimos en 3.2). Una vez fijada la orientación de M , consideremos \mathcal{A} un atlas positivo de M , i.e. tal que sus parametrizaciones sean compatibles con dicha orientación.

Sea $M = \cup_i T_i$ una triangulación de M , tal que cada cara $T = T_i$ está contenida en un dominio de coordenadas para cierta parametrización $\varphi : W \rightarrow V$ del atlas \mathcal{A} y es una región regular simple, cuya frontera ∂T es el triángulo curvilíneo formado por las tres aristas de la cara. En la sección siguiente explicaremos cómo siempre existen este tipo de triangulaciones, llamadas triangulaciones diferenciables.

En este contexto, elijamos una orientación positiva α de una arista L de ∂T mediante la parametrización φ , i.e. una orientación de manera que cuando se considere α' y se rote acorde a la orientación inducida por φ en W , dicho vector tangente quede apuntando al interior de T . Nótese que esta orientación, así elegida, depende aparentemente de la parametrización y por ende del atlas. Pero el atlas es compatible con la orientación fijada por la aplicación de Gauss de modo que la orientación inducida en la triangulación por φ es la misma que la inducida por N y girar α' según esta orientación es equivalente a

hacer el producto vectorial $N \times \alpha'$ y que este producto vectorial mire al interior. Esta explicación sigue la línea expuesta en 8.3.

Por tanto, concluimos que la orientación de una cara T en una superficie compacta es inherente a la aplicación de Gauss elegida y por tanto independiente de la parametrización que se escoja.

Una vez hemos orientado una cara T de manera independiente al atlas, veamos que automáticamente hemos orientado toda la triangulación. En efecto, nótese que nuestra arista L es a su vez arista de otra cara $T' = T_{i'}$ adyacente a T , por lo que también podemos orientar L como frontera de T' . Como apuntar hacia el interior de T es hacerlo hacia el exterior de T' , la orientación de L como frontera de T' es la opuesta que como frontera de T .

En resumen, la orientación de una triangulación es independiente de la parametrización que se escoja y si se orientan positivamente las fronteras de todas las caras de la triangulación, dos caras adyacentes inducen orientaciones opuestas en su arista común.

Como ya hemos comentado, en la siguiente sección explicaremos cómo siempre existen triangulaciones diferenciables.

11. TEOREMA DE TRIANGULACIÓN DIFERENCIABLE.

En esta sección enunciaremos el teorema de triangulación diferenciable así como daremos una idea general de su demostración, enunciando los resultados previos necesarios para desarrollar esta. Será en la siguiente sección en la que desarrollaremos la demostración con mayor detalle.

El *teorema de triangulación diferenciable* dice que toda superficie compacta es triangulable con ciertas condiciones añadidas:

Teorema 11.1. *Sea M una superficie diferenciable compacta, y fijemos un recubrimiento abierto \mathcal{A} de M y una colección finita \mathcal{P} de puntos en M . Entonces existe una triangulación de $M = \cup_i T_i$ tal que*

(i) *cada cara cerrada de la triangulación está contenida en algún abierto del recubrimiento \mathcal{A} ,*

(ii) *cada punto del conjunto \mathcal{P} está en una cara abierta, y esa cara abierta no contiene a ningún otro, y*

(iii) *la frontera de cada cara cerrada es un triángulo curvilíneo.*

La tercera condición es la que dota de carácter diferenciable a la triangulación ya que un triángulo curvilíneo está formado por *tres arcos regulares que en los vértices no forman cúspides*.

Veamos ahora un esquema general de la demostración. Nuestro objetivo será construir dicha triangulación, para ello dividiremos el proceso en cinco apartados.

Empezaremos *preparando un atlas finito* sobre el cual después construiremos nuestra triangulación. Considerando entornos de puntos y sus correspondientes coordenadas y aplicando, entre otras propiedades, la compacidad de la superficie llegamos a un atlas finito

$\{W_1, \dots, W_m\}$ con sus respectivas parametrizaciones $\varphi_i : U_i \rightarrow W_i$. Además se conseguirá que cada punto de \mathcal{P} esté en uno solo de esos W_i y que cada W_i esté contenido en algún abierto \mathcal{A} .

Considerando discos cerrados $D_i^\varepsilon \subset U_i$ de radio $\varepsilon \in [1, 2)$, sus interiores B_i^ε y sus bordes C_i^ε , llegaremos a considerar $\Gamma_i^\varepsilon = \varphi(C_i^\varepsilon)$ que son curvas de Jordan en M . El siguiente paso será estudiar la intersección $\Gamma_i^\varepsilon \cap W_j$ a través de las componentes conexas γ de $\varphi_j^{-1}(\Gamma_i^\varepsilon \cap W_j)$ que son arcos de Jordan abiertos. Veremos también que C_j^ε solo corta una cantidad finita de estas γ . Además de la finitud de esta intersección, también nos interesará ver que cortan de manera transversal, para ello usaremos una versión reducida del teorema de Sard en forma de lema y el concepto de *valor regular*.

Teorema 11.2. (*Sard*) *Sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable (al menos con segunda derivada continua) entre dos superficies. Entonces el conjunto $VR_f = \{a \in N : d_p f \text{ tiene rango } 2 \text{ si } f(p) = a\}$ es denso en N , i.e. el conjunto de valores regulares es denso en N .*

Del cual usamos el siguiente caso particular,

Lema 11.3. *Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable (al menos con segunda derivada continua). Entonces el conjunto $VR_f = \{\varepsilon \in \mathbb{R} : f'(t) \neq 0 \text{ si } f(t) = \varepsilon\}$ es abierto y denso en \mathbb{R} , i.e. el conjunto de valores regulares es abierto y denso en \mathbb{R} .*

Habiendo preparado ya el terreno, estudiamos *la transversalidad en la intersección de esta trama de curvas de Jordan*, para ello procederemos por inducción y usaremos el mencionado lema de Sard.

Una vez hecho esto, podemos considerar las regiones regulares simples $\Sigma_j^{\varepsilon_j} = \varphi_j(D_j^{\varepsilon_j})$ que tienen por frontera los $\Gamma_j^{\varepsilon_j}$. Observamos que cada punto de \mathcal{P} está en únicamente un $\Sigma_j^{\varepsilon_j}$ y que todo $\Sigma_j^{\varepsilon_j}$ está contenido en algún abierto de \mathcal{A} y que si alguna región regular simple está contenida dentro de otra podemos prescindir de ella.

Ahora *triangularemos el caso particular en el que $\Gamma_i \subset \Sigma_j$, $i \neq j$ (pero $\Sigma_i \not\subset \Sigma_j$)*, esto lo conseguiremos gracias a las propiedades de las curvas de Jordan y ciertos pasos técnicos (como la creación y allanamiento de poligonales y la consideración de esferas).

Para estudiar el caso general, necesitaremos enunciar una propiedad de las curvas de Jordan.

Lema 11.4. *Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ una curva de Jordan, y γ un arco de Jordan con sus extremos en Γ y el resto totalmente contenido en el interior de Γ . Entonces γ descompone el interior de Γ en dos componentes conexas cuyas fronteras son las dos curvas de Jordan $\gamma \cup \gamma_1$ y $\gamma \cup \gamma_2$, construidas con γ y los dos arcos γ_1, γ_2 que los extremos de γ determinan Γ .*

Llegado este momento podemos suponer $\Gamma_i \not\subset \Sigma_j$ gracias al razonamiento anterior. Estudiando ahora la intersección entre sí de las regiones regulares simples Σ_j vemos que estas se cortan transversalmente generando regiones regulares simples Σ_{j_l} que recubren M , tienen interiores disjuntos y se cortan a lo largo de curvas de Jordan. Llamamos a esta subdivisión *descomposición celular*.

Finalmente, a raíz de esta descomposición celular deducimos la *triangulación* buscada.

12. DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE TRIANGULACIÓN DIFERENCIABLE.

Demostración. Veamos un esquema de su demostración. Nuestro objetivo será construir dicha triangulación, debido a la longitud de la demostración, su construcción se divide en cinco apartados.

a) *Preparación del atlas finito.* Primeramente aprovecharemos la compacidad de M para obtener un recubrimiento por abiertos finito (usando entornos de los puntos). Además, una vez obtenido ese recubrimiento por abiertos finito, podemos modificarlo añadiendo, si no estaban, entornos de los puntos del conjunto finito \mathcal{P} y así, pudiendo reducir los posibles entornos que contuviesen a algún punto de \mathcal{P} , obtener que cada punto de \mathcal{P} pertenezca únicamente a su entorno. También podemos elegir los entornos de manera que cada uno esté contenido en algún abierto de \mathcal{A} . Usando ahora que M es superficie, parametrizamos dichos entornos y así obtendremos un atlas finito.

Por tanto, hemos llegado a una colección finita de puntos p_1, \dots, p_m , con sus respectivas parametrizaciones $\varphi_i : U_i \rightarrow W_i$ donde W_i es entorno abierto de p_i en M , U_i es el disco de centro el origen y radio 2, y $\varphi(0, 0) = p_i$.

Sea $i \in \{1, \dots, m\}$, ahora podemos definir $\forall \varepsilon \in [1, 2)$ $D_i^\varepsilon \subset U_i$ el disco cerrado de centro el origen y radio ε , B_i^ε su interior, C_i^ε su frontera y observamos que $\Sigma_i^\varepsilon = \varphi(D_i^\varepsilon)$ es una región regular simple en W_i cuya frontera es la curva de Jordan diferenciable $\Gamma_i^\varepsilon = \varphi(C_i^\varepsilon)$.

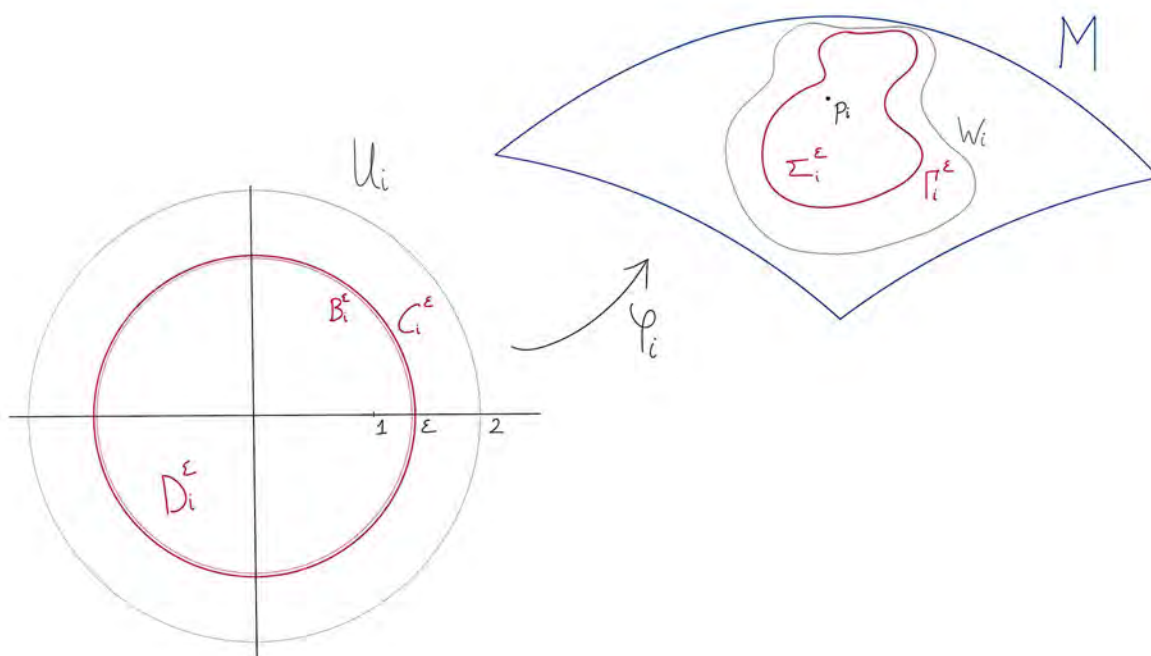


FIGURA 11. Esquema del atlas finito.

Ahora consideramos $\Gamma_i^\varepsilon \cap W_j$ con $\varepsilon \in [1, 2)$. Nos damos cuenta de que como Γ_i^ε es una curva de Jordan, esta intersección es o bien toda la curva de Jordan, o bien una unión de arcos de Jordan abiertos. Llevando este resultado al plano vía φ_j^{-1} tenemos que una componente conexa γ de $\varphi_j^{-1}(\Gamma_i^\varepsilon \cap W_j) = \varphi_j^{-1}(\Gamma_i^\varepsilon) = \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i(C_i^\varepsilon)$ es o bien una curva de Jordan (y entonces no hay otras componentes) o bien un arco de Jordan abierto.

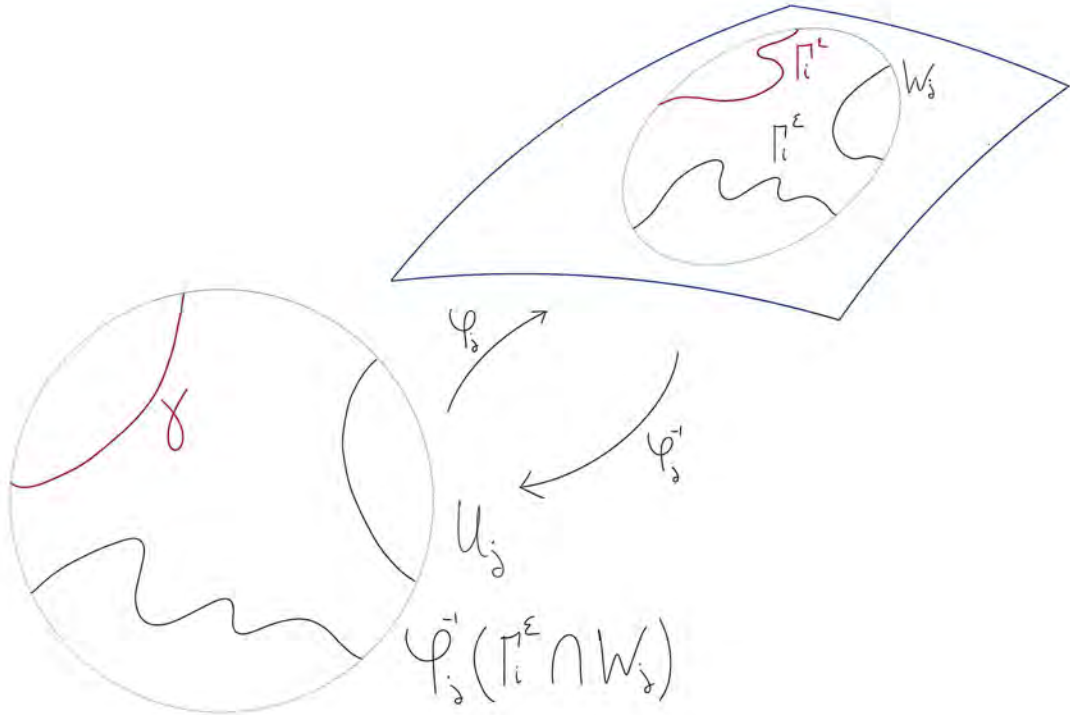


FIGURA 12. Las componentes conexas γ de $\varphi_j^{-1}(\Gamma_i^\varepsilon \cap W_j)$.

Para terminar de preparar el terreno para el resto de la demostración, afirmamos que una circunferencia C_j^ε con $\varepsilon \in [1, 2)$, corta solo una cantidad finita de esas γ . Esto se puede demostrar aprovechando que las componentes conexas γ no están infinitamente próximas y así, si se supone una sucesión de puntos de distintas γ en una circunferencia (que es compacta) se llega a una contradicción.

Con esto finalizamos el apartado *a*).

Hasta el momento hemos establecido el contexto inicial. Veamos ahora que la intersección entre curvas de Jordan no solo es finita sino que también es transversal.

b) Tramo de curvas de Jordan transversales. Vamos a demostrar que existen circunferencias $C_j^{\varepsilon_j}$, $j \in \{1, \dots, m\}$, $\varepsilon_j \in [1, 2)$, tales que los $\Gamma_j^{\varepsilon_j}$ se cortan cada dos transversalmente (i.e. de manera no tangente) en una cantidad finita de veces (se pueden no cortar). Para esto, estudiaremos el resultado en el plano y luego extrapolaremos a M vía φ_j .

Por tanto, buscamos $\varepsilon_j \in [1, 2)$ tal que $C_j^{\varepsilon_j}$ corte transversalmente a toda componente conexa γ de $\varphi_j^{-1}(\Gamma_i^\varepsilon \cap W_j)$.

Procederemos por inducción. El caso base es directo, ya que solo consideramos una circunferencia, por lo que podemos suponer haber encontrado $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{j-1}$ tales que las respectivas circunferencias generan curvas de Jordan que se cortan transversalmente en una cantidad finita de puntos, y debemos buscar un ε_j tal que su respectiva circunferencia genere una curva de Jordan que corte transversalmente en una cantidad finita de puntos al resto de curvas.

Primeramente, para toda componente conexa γ de $\varphi_j^{-1}(\Gamma_i^\varepsilon \cap W_j)$ consideramos el conjunto $\mathcal{E}_\gamma = \{\varepsilon \in [1, 2) \text{ tal que } C_j^{\varepsilon_j} \text{ corta transversalmente a } \gamma\}$, que resulta ser abierto y denso en $[1, 2)$. Este resultado lo conseguimos usando ingeniosamente una función auxiliar diferenciable sobre la cual aplicamos la versión reducida del teorema de Sard, el lema 11.3.

Recordemos que por el apartado a), sabemos que para cualquier $\varepsilon_{j0} \in [1, 2)$, $C_j^{\varepsilon_{j0}}$ corta solo una cantidad finita de estos γ . Veamos que el resto de estas componentes conexas, las que no cortan a la circunferencia, forman un conjunto cerrado: $T = \varphi_j^{-1}(\Gamma_i^{\varepsilon_i})$ es unión de las componentes conexas γ , entre estas componentes puede haber algunas que cortan a la circunferencia y otras que no. Como T es localmente conexo, sus componentes son abiertos en T , luego cualquier unión de ellos es abierto en T , luego la unión de los restantes es cerrada en T . Pero T es cerrado en el dominio de φ_j , U_j , (ya que la curva Γ_i es cerrada por lo que su preimagen vía φ_j también lo es), por lo que la unión de las restantes componentes, que es cerrado en T , es también cerrado en el dominio U_j .

Ahora, aprovechando la compacidad de $C_j^{\varepsilon_{j0}}$ y que, como acabamos de ver, las componentes conexas que no cortan a la circunferencia forman un conjunto cerrado, obtenemos que la distancia de $C_j^{\varepsilon_{j0}}$ a ellas será de $d > 0$, y por tanto para cualquier ε próximo a ε_{j0} la circunferencia $C_j^{\varepsilon_j}$ corta como mucho a las mismas componentes conexas γ que $C_j^{\varepsilon_{j0}}$. Recordemos también que para cada γ contamos con \mathcal{E}_γ .

Por tanto, basta tomar ε_j suficientemente próximo a ε_{j0} y en la intersección de todos los \mathcal{E}_γ (que como son abiertos y densos en $[1, 2)$ e intersecamos una cantidad finita, dicha intersección sigue siendo abierta y densa en $[1, 2)$) para obtener una $C_j^{\varepsilon_j}$ que corta a una cantidad finita de componentes conexas γ y se interseca con cada una de estas de manera transversal.

Finalmente por un argumento con compacidad y sucesiones en la misma línea que uno anterior, aprovechando la transversalidad de las intersecciones, obtenemos que si $C_j^{\varepsilon_j}$ corta transversalmente a una componente γ , lo hace en una cantidad finita de puntos.

Llevando este resultado a la superficie vía los φ_j , llegamos al resultado deseado: existen circunferencias $C_j^{\varepsilon_j}$, $j \in \{1, \dots, m\}$, $\varepsilon_j \in [1, 2)$, tales que los $\Gamma_j^{\varepsilon_j}$ se cortan cada dos transversalmente en una cantidad finita de veces (se pueden no cortar) ya que tenemos dicho resultado entre los $C_j^{\varepsilon_j}$ y las componentes γ y vía los φ_j tenemos $\varphi_j(C_j^{\varepsilon_j}) = \Gamma_j^{\varepsilon_j} \subset W_j$, $\cup \varphi_j(\gamma) = \Gamma_j^{\varepsilon_j} \cap W_j$ donde γ es componente conexa de $\varphi_j^{-1}(\Gamma_i^{\varepsilon_i} \cap W_j)$ por lo que $\Gamma_i^{\varepsilon_i} \cap \Gamma_j^{\varepsilon_j} = \cup \varphi_j(\gamma) \cap \varphi_j(C_j^{\varepsilon_j})$.

Terminamos así el apartado b).

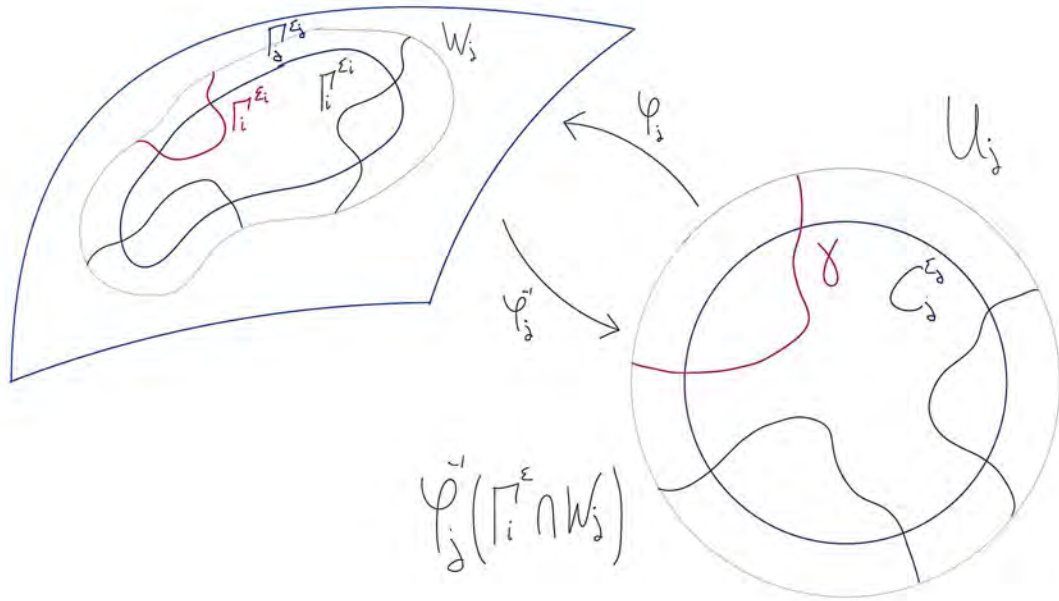


FIGURA 13. La intersección finita y transversal de los $\Gamma_j^{\epsilon_j}$ conseguida gracias a los $C_j^{\epsilon_j}$.

Hagamos un resumen con lo que contamos por el momento. Hemos obtenido una colección finita de curvas de Jordan diferenciables $\Gamma_j^{\epsilon_j} = \varphi_j(C_j^{\epsilon_j})$ que se intersecan transversalmente en una cantidad finita de puntos y que son las fronteras de las regiones regulares simples $\Sigma_j^{\epsilon_j} = \varphi_j(D_j^{\epsilon_j})$. Además, los interiores de estas regiones son los abiertos $\varphi_j(B_j^{\epsilon_j})$, que recubren M pues $\epsilon_j \geq 1$.

Es útil para los razonamientos que siguen tener presente que cada región $\Sigma_j^{\epsilon_j}$ se transforma en un disco cerrado del plano y $\Gamma_j^{\epsilon_j}$ en la circunferencia que lo bordea vía φ_j , parametrización de W_j , un entorno abierto de $\Sigma_j^{\epsilon_j}$.

En relación con el recubrimiento \mathcal{A} y el conjunto finito de puntos \mathcal{P} dados desde un comienzo, es claro que las regiones $\Sigma_j^{\epsilon_j}$ están contenidas en abiertos de \mathcal{A} , ya que sus entornos W_j lo están, y que los puntos de \mathcal{P} están en sus interiores (recordemos que estos puntos son el centro de sus respectivos entornos, considerados al principio en nuestro atlas finito), sin que haya dos en el mismo.

Obviamente podemos prescindir de las regiones que están contenidas en otras.

c) *Triangulación de esferas.* Estudiemos ahora el caso particular en el que alguna región contenga la frontera de otra : $\Gamma_i \subset \Sigma_j$, $i \neq j$ (y sabemos que $\Sigma_i \not\subset \Sigma_j$).

Primeramente observemos que como las intersecciones entre Γ_i y Γ_j deben ser necesariamente transversales (i.e. de manera no tangente) Γ_i no se puede cortar con Γ_j ya que entonces Γ_i saldría de Σ_j (pero $\Gamma_i \subset \Sigma_j$), por tanto Γ_i está contenida en el interior de Γ_j .

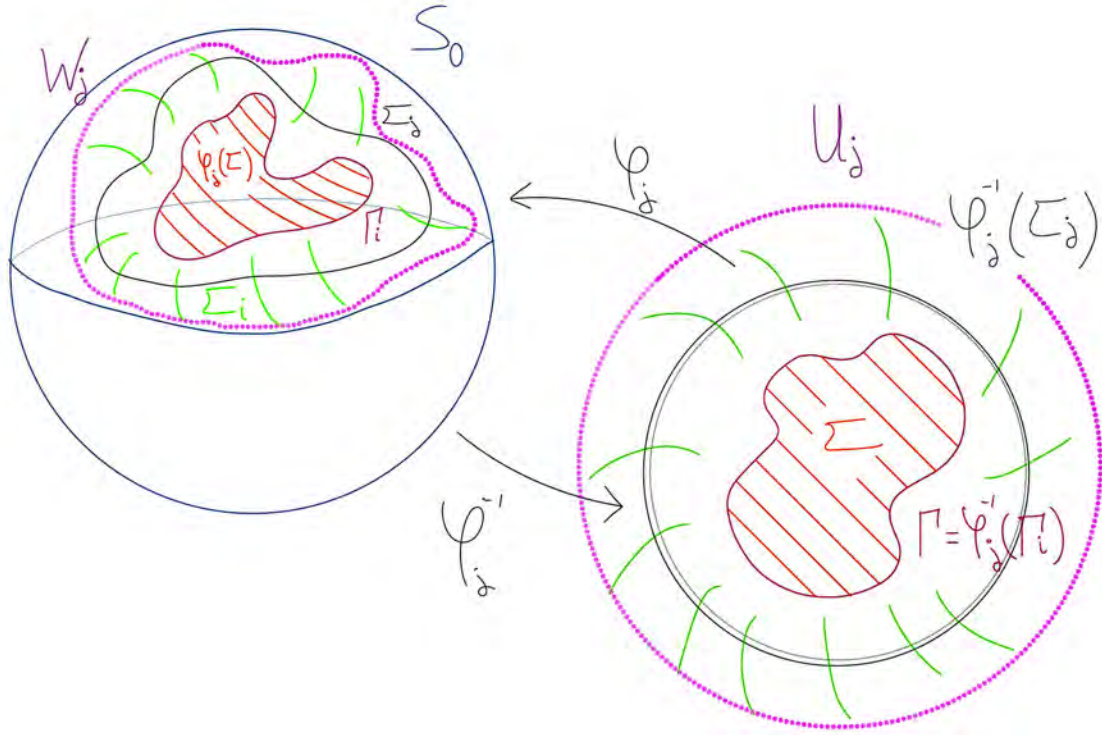
Llevando el resultado al plano vía φ_j^{-1} vemos que $U_j = \varphi_j^{-1}(W_j)$ es un disco abierto en el que está contenido $\varphi_j^{-1}(\Sigma_j)$ que es un disco cerrado plano y $\varphi_j^{-1}(\Gamma_i) = \Gamma$ es una curva de Jordan contenida en el disco abierto correspondiente y por tanto Γ es borde de una región Σ homeomorfa a un disco cerrado. Por tanto, $S_0 = \varphi_j(\Sigma) \cup \Sigma_i$ es homeomorfo a la unión de dos discos cerrados pegados por su borde Γ_i , y por tanto S_0 es una esfera, y en particular compacto, por lo que S_0 es cerrado en M .

Veamos que S_0 es también abierto en M . Nótese que $S_0 = \varphi_j(\Sigma^\circ) \cup \Sigma_i^\circ \cup \Gamma_i$, por lo que si tomamos un punto en $\varphi_j(\Sigma^\circ)$, o en Σ_i° por ser estos abiertos, podremos encontrar un entorno abierto de dicho punto en S_0 . Queda por tanto ver que para cualquier punto del borde del dominio regular $\varphi_j(\Sigma)$, Γ_i , podemos encontrar un entorno abierto del punto en S_0 .

Primero estudiemos un caso general, sea $\varphi : U \rightarrow W \subset M$ una parametrización, donde U es un bola abierta y $D \subset U$ es una región regular con borde la curva de Jordan $C = \partial D$ e interior D° , entonces $\Sigma = \varphi(D)$ es una región regular de M con borde $\Gamma = \varphi(\partial D) = \varphi(C)$ e interior $G = \varphi(D^\circ)$. *Si estudiamos las componentes conexas de $M \setminus \Gamma$, resulta que el interior $G = \varphi(D^\circ)$ es una de ellas, y $\varphi(U \setminus D)$, la imagen del exterior de C en U , está contenida en otra.* En efecto, $\varphi(D^\circ)$ es conexo y abierto en M pues D° lo es en U y φ es una inmersión abierta en M . Pero $\varphi(D)$ es compacto, luego cerrado en M , por lo que $\varphi(D^\circ) = \varphi(D \setminus C) = \varphi(D) \setminus \varphi(C)$ es cerrado en $M \setminus \varphi(C) = M \setminus \Gamma$ gracias a la topología relativa, i.e. como $\varphi(D)$ es cerrado en M y $\varphi(C) \subset M$, $\varphi(D) \setminus \varphi(C)$ es cerrado en $M \setminus \varphi(C)$. Por lo tanto, $\varphi(D^\circ)$ es conexo abierto y cerrado en $M \setminus \Gamma$, luego es una componente suya. Por otra parte, el exterior $U \setminus D$ es conexo (gracias al teorema de Jordan en el disco U), luego su imagen $\varphi(U \setminus D) = \varphi(U) \setminus \Sigma$ es conexo y no corta a Γ , luego está contenido en una componente conexa de $M \setminus \Gamma$, ya que por el teorema del pivote la unión de dos conexos no disjuntos es conexa, y como una componente conexa no puede estar contenida en otro conjunto conexo mayor, si un conjunto conexo interseca de manera no vacía con una componente conexa, este conjunto estará contenido en dicha unión que debe ser la componente conexa, por lo que este conjunto está contenido en dicha componente conexa.

Tras esta observación, volvamos al caso $S_0 = \varphi_j(\Sigma) \cup \Sigma_i$. Nótese que habíamos considerado el borde $\Gamma = \varphi_j^{-1}(\Gamma_i)$ de Σ y su interior $\Sigma^\circ = \Sigma \setminus \Gamma$ y su exterior $U_j \setminus \Sigma$ (donde recordemos que esta terminología proviene de la teoría de curvas de Jordan). También tenemos que Γ_i es el borde del dominio regular Σ_i , y gracias a la observación anterior, obtenemos que su interior $\varphi_j(\Sigma^\circ)$ es una de las componentes conexas de $M \setminus \Gamma_i$ y $\varphi_j(U_j \setminus \Sigma)$ está contenida en otra. Asimismo, considerando ahora la parametrización $\varphi_i : U_i \rightarrow W_i$, $\Sigma_i \subset W_i$ y $\varphi_i(D_i) = \Sigma_i$, aplicando la observación anterior obtenemos que $\varphi_i(D_i^\circ) = \Sigma_i^\circ$ es una de las componentes conexas de $M \setminus \Gamma_i$.

Observemos que sabemos que $\varphi_j(\Sigma^\circ)$ y Σ_i° son dos componentes conexas de $M \setminus \Gamma_i$, afirmamos que son distintas (y por tanto, por el teorema del pivote, disjuntas). En efecto, recordemos que suponemos que $\Sigma_i \not\subset \Sigma_j$ pero como $\varphi_j(\Sigma^\circ) \subset \Sigma_j^\circ$, si $\varphi_j(\Sigma^\circ) = \Sigma_i^\circ$ entonces $\Sigma_i \subset \Sigma_j$ lo cual es un absurdo.

FIGURA 14. Representación de S_0 .

Ahora afirmamos que $\varphi_j(U_j \setminus \Sigma)$ está contenido en el interior de Σ_i . Como $\varphi_j(U_j \setminus \Sigma)$ está contenido en una de las componentes, para ver que esa componente es el interior de Σ_i basta ver que lo corta. Veámoslo: como una curva de Jordan es adherente a su interior, fijamos un punto $y = \varphi_j(x) \in \Gamma_i$, que será adherente a $\Sigma_i \setminus \Gamma_i = \Sigma_i^\circ$, i.e. y será el límite de una sucesión $\{y_k \in \Sigma_i^\circ\}$. Por tanto, para k suficientemente grande, y_k estará en $\varphi_j(U_j)$ (que es entorno de $y = \varphi_j(x)$), luego $y_k = \varphi_j(x_k)$ para ciertos $x_k \in U_j$ y obtenemos una sucesión $\{x_k\}$ en U_j cuyo límite es $x \in \Gamma$. Pero recordemos que acabamos de ver que $\varphi_j(\Sigma^\circ)$ y Σ_i° son componentes conexas disjuntas por lo que si $y_k \in \Sigma^\circ$, entonces $y_k \notin \varphi_j(\Sigma^\circ)$ y por tanto $x_k \notin \Sigma^\circ$, i.e. $x_k \in U_j \setminus \Sigma^\circ \cup \Gamma$ (donde $\Sigma^\circ \cup \Gamma = \Sigma$), por lo que $y_k \in \varphi_j(U_j \setminus \Sigma)$. En resumen, $x_k \in U_j \setminus \Sigma$ y por tanto los $y_k \in \Sigma_i^\circ \cap \varphi_j(U_j \setminus \Sigma)$ por lo que la intersección entre Σ_i° y $\varphi_j(U_j \setminus \Sigma)$ es no vacía y llegamos a que $\varphi_j(U_j \setminus \Sigma) \subset \Sigma_i^\circ$ como queríamos demostrar.

En resumen, acabamos de ver que $\varphi_j(U_j \setminus \Sigma) \subset \Sigma_i^\circ$ y como $\varphi_j(\Sigma) \subset S_0 = \varphi_j(\Sigma) \cup \Sigma_i$, entonces $\varphi_j(U_j) \subset S_0$, que es un entorno abierto de Γ_i en M .

Finalmente, como S_0 es abierto y cerrado en M , S_0 es una componente conexa de M .

Veamos ahora cómo triangular este conjunto S_0 homeomorfo a una esfera.

Elijamos tres vértices p_k en Γ_i . En el dominio de la parametrización es fácil: tomamos un vértice m en el interior de $\varphi_i^{-1}(\Gamma_i) = C_i^{\varepsilon_i}$ y consideramos los tres segmentos que lo unen a los vértices $\varphi_i^{-1}(p_k)$. Obsérvese que el vértice m se puede tomar de manera que los segmentos no contengan ningún punto de $\varphi_i^{-1}(\mathcal{P})$. Viendo esta descomposición de $D_i^{\varepsilon_i}$ vía φ_i en M , su imagen Σ_i queda dividida en tres triángulos cerrados.

Ahora debemos hacer lo correspondiente con la región de $\varphi_j(\Sigma)$, el problema es que aquí ya no estamos trabajando en un disco cerrado sino en un conjunto Σ que tiene como borde una curva de Jordan Γ . Si bien a nivel topológico el problema es análogo ya que por el teorema de Schönflies Σ es homeomorfo a un disco cerrado, el problema lo encontramos en pedir la transversalidad de las intersecciones (ya que esto el homeomorfismo no tiene que respetarlo necesariamente). No obstante, de manera muy ingeniosa se consiguen construir poligonales, que posteriormente se deberán allanar, que unen el vértice interior con los vértices que están en el borde Γ y sortean el conjunto $\varphi_j^{-1}(\mathcal{P})$ (para una mayor explicación observar el dibujo o estudiar el capítulo 18 de [2]).

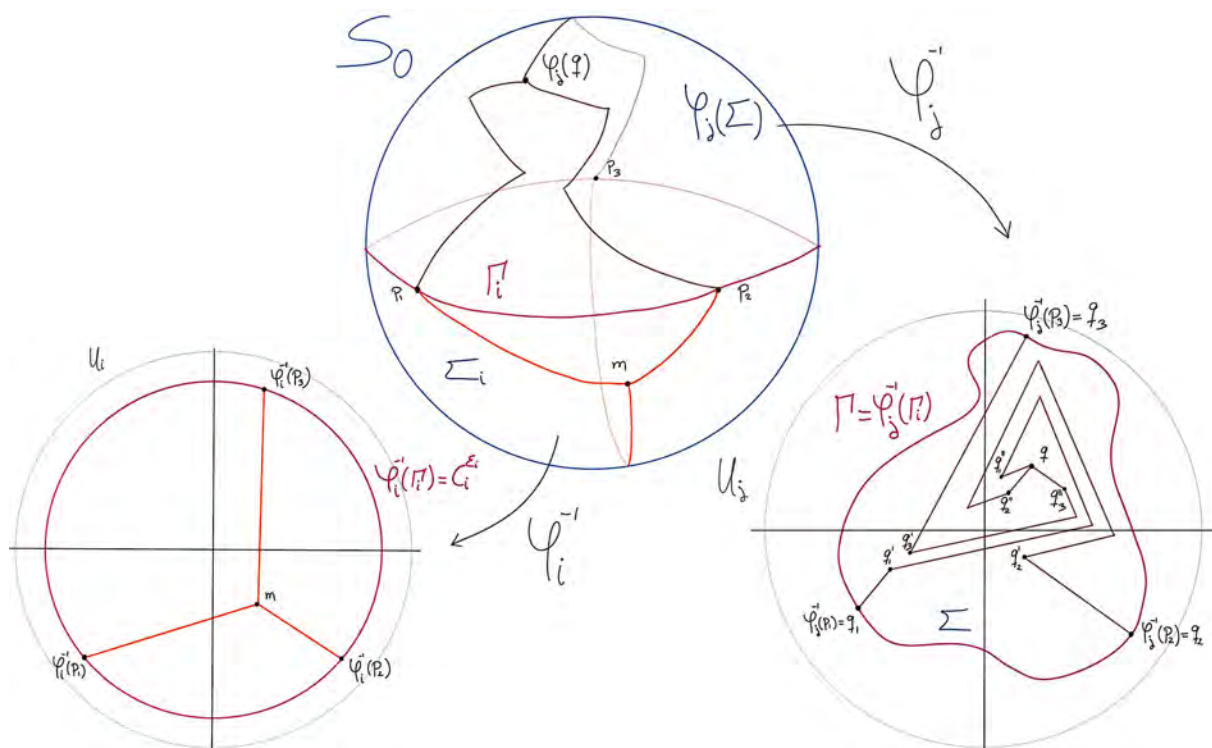


FIGURA 15. Triangulación de S_0 .

Con esto finaliza el apartado c).

Habiendo ya terminado este apartado, añadimos dos observaciones:

1. En nuestro caso la frontera Γ_i es una curva diferenciable, pero lo mismo se puede hacer si es diferenciable a trozos: la transversalidad en los vértices sería a las dos ramas, por la izquierda y por la derecha.
2. Al igual que con el anterior procedimiento hemos generado en cada dominio tres triángulos, de manera análoga podríamos haber construido un número arbitrario.

Después de haber estudiado este caso particular, analizamos la situación general. Pero antes de triangular debemos descomponer adecuadamente la superficie. Para ello usaremos repetidamente la propiedad de las curvas de Jordan que nos da el lema 11.4.

d) Descomposición celular. Suponemos a partir de ahora que ninguna de nuestras regiones contiene la frontera de otra (si no aplicamos el razonamiento del apartado *c*) y triangulamos dicha región), de manera que cada región queda dividida por arcos de las fronteras que la cortan. Todas estas subdivisiones constituyen una *descomposición celular*. Estudiemos esta descomposición:

Centrémonos en el comportamiento de una región Σ_j . Si la curva Γ_1 la corta, lo hace una cantidad finita de veces de manera transversal y dando lugar a una cantidad finita de arcos de Jordan con extremos en Γ_j y contenidos en su interior, es por ello que cada uno de estos arcos γ , por el lema 11.4, divide a Σ_j en dos componentes conexas y, considerando ahora cada una de estas componentes conexas, vemos cómo vuelven a ser divididas por otro de los arcos de Jordan γ de Γ_1 . De esta manera concluimos que Σ_j queda dividida en una cantidad finita de componentes conexas que tienen como frontera arcos de Jordan de Γ_1 y Γ_j . Considerando ahora la intersección con el resto de curvas Γ_i obtenemos que Σ_j queda de nuevo dividida en una cantidad finita de componentes conexas Σ_{jl} que son regiones regulares simples que esta vez tienen por frontera arcos de Jordan de las curvas $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$. Como estas intersecciones son transversales, no generan cúspides, y las fronteras son polígonos curvilíneos. Obsérvese que las regiones Σ_{jl} se intersecan a lo largo de uniones de esos mismos arcos. *Aplicando esto a cualquier región Σ_j , obtenemos que las regiones Σ_{il} recubren todo M , y dos distintas se intersecan a lo largo de uniones de arcos.*

Observemos que los Σ_{il} que generan estas subdivisiones están contenidos en algún abierto de \mathcal{A} , ya que en particular están contenidos en algún Σ_j , y que el conjunto de puntos \mathcal{P} está en sus interiores ya que sus fronteras están contenidas en la unión de los Γ_i y las curvas Γ_i evitan dicho conjunto.

La descomposición celular es casi la unión de los vértices, aristas y caras abiertas de la triangulación, pero hace falta subdividir aún otra vez para tener efectivamente esa triangulación.

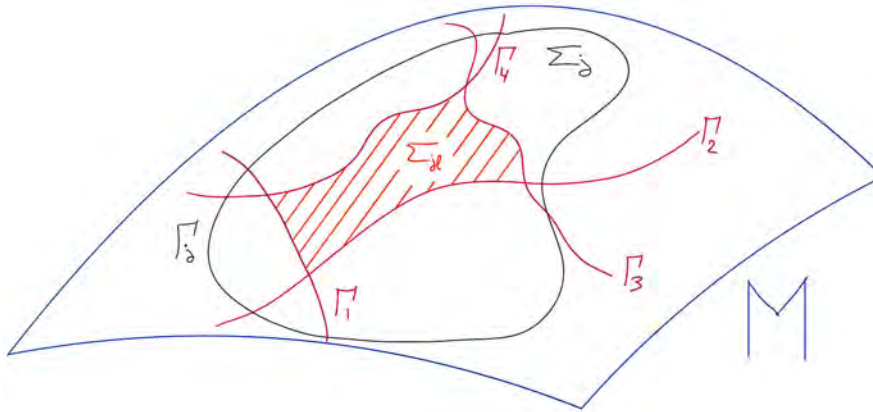


FIGURA 16. Ejemplo de región regular simple Σ_{jl} .

Aquí termina el apartado *d*).

e) *Triangulaciones*. Para definir la triangulación, elijamos como vértices los extremos de los arcos que delimitan las regiones regulares simples Σ_{jl} de la descomposición celular, un punto interior en cada arco y un punto interior en cada Σ_{jl} que no pertenezca a \mathcal{P} . Una vez determinados los vértices, definamos las aristas.

Habrán dos tipos de aristas, aquellas que unan puntos que estén en los arcos de la descomposición celular, que son simplemente los fragmentos del propio arco determinado por esos vértices, y las que unen el punto interior de Σ_{jl} con todos los vértices de la frontera. Estudiando estas segundas, a nivel topológico no encontramos mayor problema y además deducimos que dividimos la región en triángulos que se cortan a lo largo de un solo lado. Es a nivel diferenciable donde sí encontramos más dificultades, pero podemos construir las aristas como ya hicieramos en el apartado c) al triangular S_0 (con las poligonales allanadas) y así conseguir que siempre se corten de manera transversal y se eviten los puntos de \mathcal{P} que hubiera en Σ_{jl} .

Habiendo definido ya los vértices y aristas, los triángulos cerrados son las regiones simples que estas generan y como están contenidas en algún Σ_{jl} , en particular están contenidas en algún abierto de \mathcal{A} .

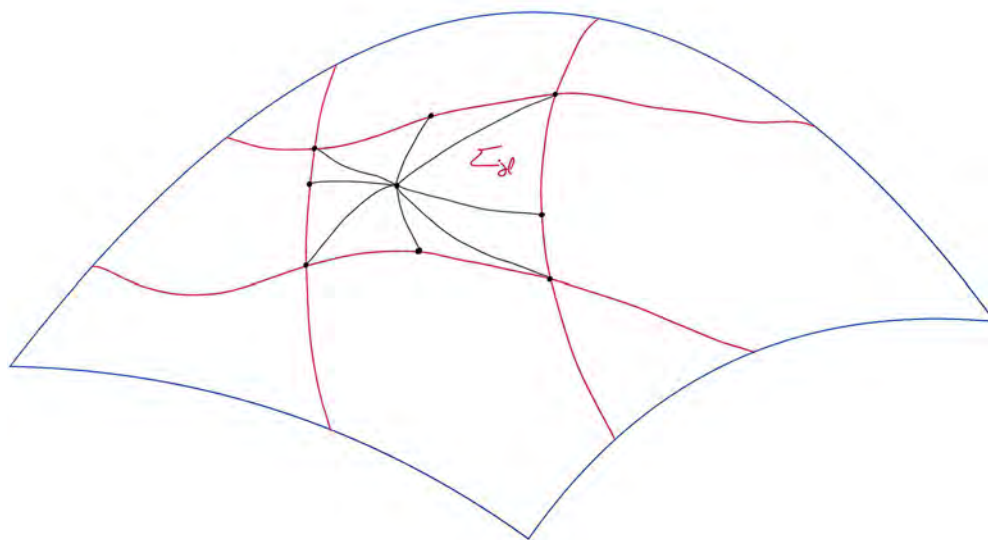


FIGURA 17. Ejemplo de triangulación de un Σ_{jl} .

Finalizamos así el apartado e).

Queda así construida una triangulación diferenciable como la enunciada en el teorema. \square

13. INTEGRACIÓN EN SUPERFICIES.

En esta sección definimos el concepto de integración de una función en una superficie. Para ello haremos uso de la teoría de variedades diferenciables y la integración de formas.

Sea M una superficie diferenciable orientable.

13.1. Formas diferenciales, elemento volumen e integración de funciones. Partimos de que ya conocemos la teoría de formas diferenciales y cómo estas se integran gracias a la asignatura de Variedades Diferenciables. No obstante, recordamos cómo se integran ya que nos será útil más adelante:

Sea U un abierto de $\mathbb{E}^2 = \mathbb{R}^2$ o \mathbb{H}^2 y $\omega \in \Gamma_c^2(U)$ una forma diferencial de grado 2 que se anula fuera de un compacto $K \subset U$ y que escribiremos como $\omega = f du \wedge dv$. Entonces se define la integral de ω como

$$\int_U \omega = \int_{\mathbb{E}^2} f(u, v) du dv$$

Este primer caso considerando abiertos de \mathbb{E}^2 nos sirve para definir la integración de formas en superficies de la siguiente manera: Existe una única forma lineal $\int_M : \Gamma_c^2(M) \rightarrow \mathbb{R} : \omega \mapsto \int_M \omega$ tal que si \mathbf{x} es el sistema de coordenadas de M correspondiente a una parametrización φ compatible con la orientación y ω se anula fuera de un compacto del dominio U de \mathbf{x} , entonces $\int_M \omega = \int_{\mathbf{x}(U)} \varphi^* \omega$.

Una vez hemos recordado esto, consideramos la aplicación de Gauss de M , $\nu : M \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$.

Definimos el llamado *elemento de volumen* $\Omega = \det(\nu, \cdot, \cdot) \Big|_M$, que es una forma diferencial de grado 2 (justo las que somos capaces de integrar en una superficie).

Justificamos su nombre gracias al razonamiento que se da al obtener su expresión local. Sea $\varphi : W \rightarrow V$ una parametrización de un abierto V de M . Veamos la forma que induce Ω vía φ en W , i.e. su *pull-back* $\varphi^* \Omega = a du \wedge dv$. Tenemos

$$\begin{aligned} a &= (\varphi^* \Omega)(e_1, e_2) = \Omega(\varphi_* e_1, \varphi_* e_2) = \Omega\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right) = \det\left(\nu, \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right) = \text{vol}\left(\nu, \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right) \\ &= \text{área}\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right) = \left\| \frac{\partial}{\partial u} \times \frac{\partial}{\partial v} \right\| = \sqrt{\left\| \frac{\partial}{\partial u} \right\|^2 \left\| \frac{\partial}{\partial v} \right\|^2 - \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle^2} = \sqrt{EG - F^2} \end{aligned}$$

ya que recordemos que

$$\begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

donde φ_* es la derivada de φ . Aclaremos que $\det = \text{vol}$ es un resultado de geometría elemental, que $\text{vol} = \text{área}$ por ν ser unitario y perpendicular a M , que el área se calcula con el producto vectorial es una fórmula trigonométrica y que la norma del producto vectorial se calcula como se indica para obtener la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Obsérvese que con nuestra teoría de integración en superficies solo somos capaces de integrar formas de grado 2, mientras que nuestro objetivo es integrar funciones diferenciables en M , que son formas de grado 0. Es por ello que definiremos la *integral de una*

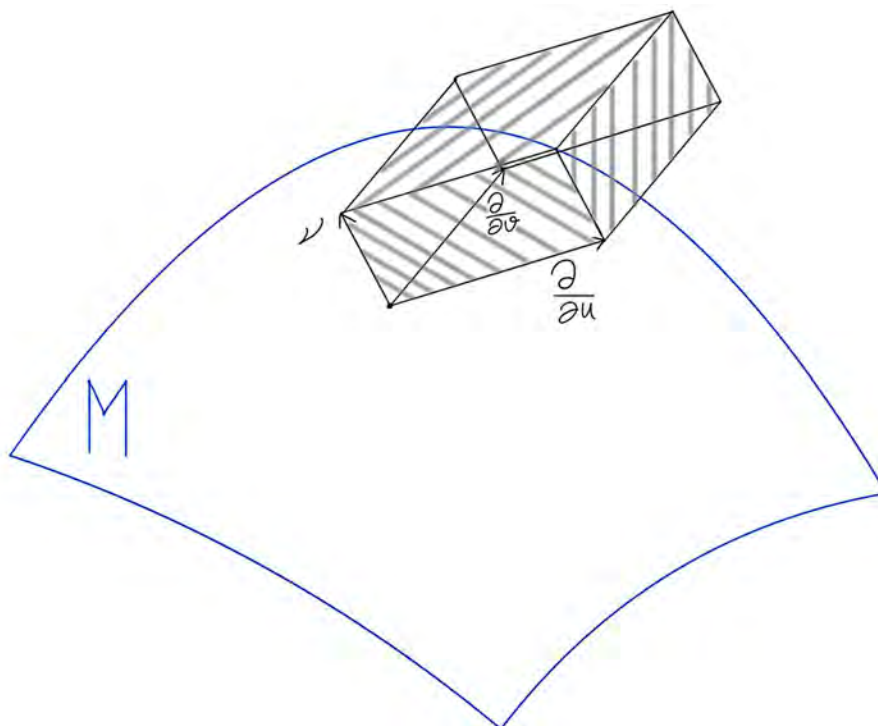


FIGURA 18. Dibujo del cubo unidad formado por las parciales y el normal.

función haciendo uso del elemento de volumen, dándonos cuenta de que $f\Omega$ es una forma de grado 2:

$$\int_M f = \int_M f\Omega$$

13.2. Integración en un dominio de coordenadas. Una vez hemos definido la integral de una función diferenciable, veamos su expresión local en el caso de que el dominio de la función esté contenido en un dominio de coordenadas correspondiente a una parametrización $\varphi : W \rightarrow V$ donde V es un abierto de M :

$$\int_M f = \int_M f\Omega = \int_W \varphi^*(f\Omega) = \int_W (f \circ \varphi)\varphi^*(\Omega) = \int_W (f \circ \varphi) \sqrt{EG - F^2} \, dudv$$

Obsérvese que esta integral no depende de la parametrización φ que se tome pues está definida de manera global independiente de φ . Las parametrizaciones solo se usan para el cálculo.

13.3. Caso de una superficie compacta. Aprovechemos ahora las triangulaciones para calcular la integral de una función en una superficie compacta.

Empecemos recordando un concepto capital a la hora de integrar: un *conjunto de medida nula* es aquel que está contenido en una unión numerable de cubos cuyo volumen total puede tomarse arbitrariamente pequeño. Se sabe que: (i) la unión numerable de conjuntos de medida nula es de medida nula, (ii) las aplicaciones diferenciables conservan la medida nula y (iii) estos conjuntos son despreciables a la hora de calcular la integral: El primer

ejemplo de conjunto de medida nula son los subespacios vectoriales de dimensión inferior, que al pasar a variedades se corresponden con las subvariedades de dimensión inferior.

Supongamos ahora que M es compacta. Sea $\Sigma \subset M$ un conjunto y $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Por el teorema de triangulación diferenciable podemos tomar una triangulación $M = \cup_l T_l$ tal que cada triángulo T_l esté cubierto por una parametrización $\varphi_l : W_l \rightarrow V_l$. Nótese que la integral $\int_{\Sigma \cap T_l} f$ sí la sabemos calcular, por estar en un dominio parametrizado, y que su valor coincide con el de la integral $\int_{\Sigma \cap T_l^0} f$ por ser los lados del triángulo T_l de medida nula en M . Como los interiores de los triángulos son disjuntos, podemos calcular

$$\int_M f = \int_M f \Omega = \sum_l \int_{\Sigma \cap T_l} f = \sum_l \int_{W_l} (f \circ \varphi_l) \sqrt{E_l G_l - F_l^2} du_l dv_l$$

donde u_l, v_l son las coordenadas locales de φ_l y E_l, G_l, F_l los coeficientes de la primera forma fundamental en esas coordenadas.

Obsérvese que, como ya hemos comentado, al estar la integral definida de manera global es independiente de parametrizaciones y triangulaciones.

14. EL TEOREMA DE GAUSS-BONNET LOCAL.

En esta sección se demuestra la versión local del teorema de Gauss-Bonnet, paso previo al teorema de Gauss-Bonnet propiamente dicho.

En tanto que el objetivo principal de este trabajo es la demostración del teorema de Gauss-Bonnet obsérvese cómo a lo largo de estas dos secciones se aplican en numerosas ocasiones todos los resultados expuestos durante el trabajo. En particular, en esta sección para la demostración de la parte local se usa fuertemente el concepto de determinación del ángulo y el Umlaufsatz.

Sea M una superficie diferenciable.

Demostremos la versión local del teorema de Gauss-Bonnet.

Teorema 14.1. *Sea K la curvatura de Gauss de la superficie M . Sea $\Sigma \subset M$ una región regular simple contenida en el dominio de coordenadas V de una parametrización ortogonal $\varphi : W \rightarrow V \subset M$. Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ una parametrización positiva PPA de la frontera de Σ , $\partial\Sigma$; denotamos por $\Delta\theta_1, \dots, \Delta\theta_n$ sus ángulos externos y por $k_g(s)$ su curvatura geodésica (definida a trozos). Entonces*

$$\int_{\Sigma} K + \int_a^b k_g(s) = 2\pi - \sum_k \Delta\theta_k$$

Demostración. Comenzamos la demostración calculando la integral curvilínea de la curvatura geodésica. Para ello tomaremos una partición $a = s_0 < s_1 < \dots < s_n = b$ del intervalo de definición de la curva $\alpha [a, b]$. Por tanto,

$$\int_{\alpha} k_g = \sum_k \int_{s_{k-1}}^{s_k} k_g(s) ds$$

Por la Proposición 7.1 obtenemos

$$\sum_k \int_{s_{k-1}}^{s_k} k_g(s) ds = \sum_k \int_{s_{k-1}}^{s_k} \left(\theta'_k + \frac{1}{2\sqrt{EG}} (G_u v' - E_v u') \right) ds$$

donde θ_k es una determinación del ángulo de tangencia de α_k en $[s_{k-1}, s_k]$. Fijamos el ángulo inicial $\theta_1(s_0)$ y elegimos los siguientes usando los ángulos de la siguiente manera

$$\theta_{k+1}(s_k) = \theta_k(s_k) + \Delta\theta_k$$

Nótese que definiremos $\theta_{n+1}(s_n) = \theta_n(s_n) + \Delta\theta_n$ pero éste sólo se evaluará en s_n ya que sólo queremos denotar dicho valor, $\theta_{n+1}(s_n)$, de manera consistente para un mejor manejo en la siguiente fórmula.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \int_{s_{k-1}}^{s_k} \theta'_k ds &= \sum_{k=1}^n (\theta_k(s_k) - \theta_k(s_{k-1})) \\ &= \theta_{n+1}(s_n) + [-\theta_{n+1}(s_n) + \theta_n(s_n) - \theta_n(s_{n-1}) + \theta_{n-1}(s_{n-1}) - \theta_{n-1}(s_{n-2}) + \dots \\ &\quad \dots + \theta_1(s_1)] - \theta_1(s_0) \\ &= \theta_{n+1}(s_n) - \sum_k (\theta_{k+1}(s_k) - \theta_k(s_k)) - \theta_1(s_0) \\ &= (\theta_{n+1}(s_n) - \theta_1(s_0)) - \sum_k \Delta\theta_k = (\theta_{n+1}(b) - \theta_1(a)) - \sum_k \Delta\theta_k \\ &= 2\pi i(\alpha) - \sum_k \Delta\theta_k = 2\pi - \sum_k \Delta\theta_k \end{aligned}$$

en donde la penúltima igualdad la tenemos por la definición de determinación del ángulo y la última por el Umlaufsatz para una parametrización positiva. Por tanto,

$$(*) \quad \int_{\alpha} k_g = 2\pi - \sum_k \Delta\theta_k + \sum_k \int_{s_{k-1}}^{s_k} \frac{1}{2\sqrt{EG}} (G_u v' - E_v u') ds$$

Calculemos ahora el sumatorio de integrales.

En el abierto $W = \varphi^{-1}(V) \subset \mathbb{R}^2$ consideramos el compacto $R = \varphi^{-1}(\Sigma)$ y su frontera $\partial\Sigma = \varphi^{-1}(\partial R)$. Escribimos

$$v' ds = dv, u' ds = du, A = \frac{1}{2\sqrt{EG}} G_u, B = \frac{1}{2\sqrt{EG}} E_v$$

y remarcamos que $\sum_k \int_{s_{k-1}}^{s_k} = \partial\Sigma, \partial R = \varphi^{-1}(\partial\Sigma)$.

Obtenemos así:

$$\sum_k \int_{s_{k-1}}^{s_k} \frac{1}{2\sqrt{EG}} (G_u v' - E_v u') ds = \sum_k \int_{s_{k-1}}^{s_k} (A v' - B u') ds = \int_{\partial R} Adv - Bdu$$

El borde ∂R está orientado como frontera de R en la última integral ya que α es parametrización positiva de $\partial\Sigma = \varphi^{-1}(\partial R)$.

Es decir, hemos trasladado nuestra integral en una superficie a una integral en \mathbb{R}^2 , y estamos en situación de aplicar la fórmula de Green, la cual dice

$$\int_{\partial R} Adv - Bdu = \int_R \left(\frac{\partial A}{\partial u} + \frac{\partial B}{\partial v} \right) dudv.$$

Gracias a la Proposición 5.3, haciendo uso de las coordenadas ortogonales, tenemos que

$$\frac{\partial A}{\partial u} + \frac{\partial B}{\partial v} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} \frac{G_u}{\sqrt{EG}} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right) = -K\sqrt{EG}$$

Para finalizar, volvamos a remarcar que $R = \varphi^{-1}(\Sigma)$ y por tanto concluimos que

$$\sum_k \int_{s_{k-1}}^{s_k} \frac{1}{2\sqrt{EG}} (G_u v' - E_v u') ds = - \int_{\varphi^{-1}(\Sigma)} K\sqrt{EG} dudv = - \int_{\Sigma} K$$

Nótese que la última igualdad se debe a la propia definición de integral de una función en una superficie, recordemos que la primera forma fundamental es la encargada de traducir las medidas en superficies al dominio de coordenadas, que es donde nosotros contamos con la integración usual en abiertos de \mathbb{R}^2 , y viceversa.

Finalmente, sustituyendo en (*) obtenemos el resultado deseado

$$\int_{\Sigma} K + \int_a^b k_g(s) = 2\pi - \sum_k \Delta\theta_k$$

□

15. EL TEOREMA DE GAUSS-BONNET.

En esta sección abordaremos, finalmente, la demostración del teorema de Gauss-Bonnet, considerado uno de los teoremas más importantes de las matemáticas debido a que sirve como nexo de unión para la geometría y la topología ya que relaciona el concepto de curvatura de Gauss de una superficie compacta, propio de la geometría, con el de la característica de Euler de superficie, puramente topológico.

En tanto que el objetivo de este capítulo es analizar este teorema con el mayor detalle posible, objetivo principal de este trabajo, usaremos fuertemente los conceptos explicados a lo largo de todo el proyecto como las triangulaciones de superficies diferenciables y el Umlaufsatz.

Antes de comenzar con la demostración demos una definición.

Definición 15.1. Sea M una superficie compacta orientable de \mathbb{R}^3 y K su curvatura de Gauss. Se denomina *curvatura íntegra de M* a la integral $\int_M K$.

Enunciemos y demostremos el *teorema de Gauss-Bonnet*:

Teorema 15.2. *Sea M una superficie compacta orientable. Entonces se tiene que*

$$\int_M K = 2\pi\chi$$

Demostración. Por el teorema de triangulación diferenciable podemos tomar $M = \cup_l T_l$ una triangulación diferenciable de M (con C caras, A aristas y V vértices) tal que todo triángulo cerrado T_l sea un triángulo curvilíneo contenido en una parametrización ortogonal compatible con la orientación de M y orientemos positivamente los bordes de todos los triángulos (mismo contexto que el mostrado en el apartado 10.4 de orientación de triangulaciones).

Nótese que estamos en las hipótesis del teorema de Gauss-Bonnet local para cada triángulo T_l por lo que

$$\int_{T_l} K + \int_{a_i}^{b_l} k_g^l(s) = 2\pi - \sum_{k=1}^3 \Delta\theta_k^l$$

Sumando todas estas expresiones tenemos que:

$$(*) \sum_l \int_{T_l} K = \int_M K$$

Gracias a la definición establecida en el apartado 13.3 que trata la integración a lo largo de una superficie.

$$(**) \sum_l \int_{a_i}^{b_l} k_g^l(s) = 0$$

Debido a cómo se orientan las triangulaciones según la orientación de la superficie, con dos caras adyacentes induciendo la orientaciones opuestas en su arista común, por lo que las integrales se van cancelando dos a dos ya que cada lado de un triángulo es recorrido dos veces en sentidos contrarios.

Por tanto, como hay C triángulos tenemos que

$$(1) \int_M K = 2\pi C - \sum_{l=1}^C \sum_{k=1}^3 \Delta\theta_k^l$$

Nótese que esta fórmula está en función de los ángulos externos $\Delta\theta_k^l$ pero, para dos razonamientos posteriores, nos convendrá usar los correspondientes ángulos internos $\phi_k^l = \pi - \Delta\theta_k^l$

Por tanto, tenemos que

$$\sum_{l=1}^C \sum_{k=1}^3 \Delta\theta_k^l = 3\pi C - \sum_{l=1}^C \sum_{k=1}^3 \phi_k^l$$

Y aplicando la fórmula $3C = 2A$, introducida en el apartado 10.2, la cual se cumple para toda triangulación y tiene una demostración directa, obtenemos que

$$(2) \sum_{l=1}^C \sum_{k=1}^3 \Delta\theta_k^l = 2\pi A - \sum_{l=1}^C \sum_{k=1}^3 \phi_k^l$$

Para finalizar calculemos la suma de todos los ángulos internos en un vértice cualquiera. Gracias a la teoría desarrollada en el capítulo del Umlaufsatz sobre ángulos internos y orientaciones, afirmamos que dichos ángulos son todos positivos en la dirección de la orientación inducida en el vértice y que la unión de las caras cuyas aristas intersecan en el vértice forman un entorno de dicho vértice. Es por ello que si sumamos todos los ángulos

internos, dando una vuelta completa alrededor del vértice, sumarán 2π . Dado que la suma de los ángulos internos en un vértice es 2π , si sumamos todos los ángulos internos de todos los vértices, que hay V , tendremos que

$$(3) \sum_{l=1}^C \sum_{k=1}^3 \phi_k^l = 2\pi V$$

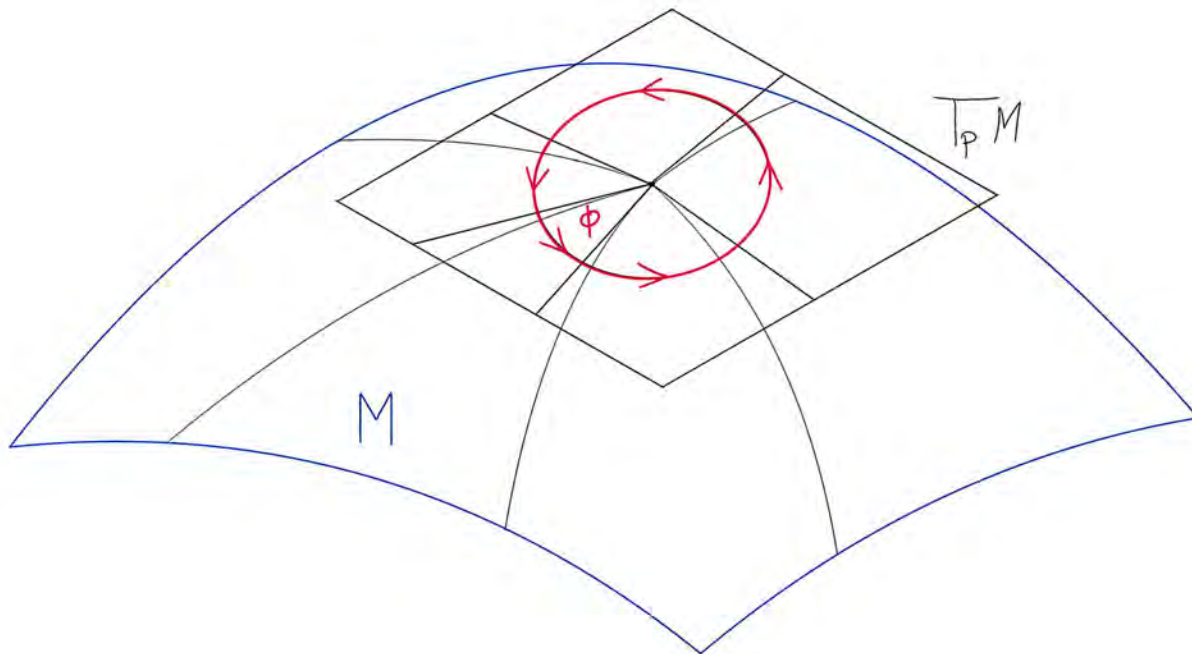


FIGURA 19. La suma de todos los ángulos internos alrededor de un vértice es 2π .

Por tanto, teniendo en cuenta (1), (2), (3) y que $\chi = C - A + V$

$$\int_M K = 2\pi C - 2\pi A + 2\pi V = 2\pi\chi$$

□

16. EL GRADO DE LA APLICACIÓN DE GAUSS.

En esta última sección vamos a introducir el concepto de grado de una aplicación y lo calcularemos utilizando valores regulares. Además el teorema de Gauss-Bonnet lo relacionará con la característica de Euler y la curvatura. Terminaremos con algunas consecuencias de esa relación.

16.1. Teorema del cambio de variable generalizado: grado de una aplicación diferenciable. Si $f : M \rightarrow N$ es una aplicación diferenciable entre dos superficies conexas compactas, existe un entero $d \in \mathbb{Z}$ tal que para toda forma ω de grado 2 de N se cumple

$$\int_M f^* \omega = d \int_N \omega$$

Llamamos a este entero *grado de f* .

El cálculo del grado requiere una pequeña discusión previa de los valores regulares de f . A pesar de que este concepto fue introducido junto al teorema de Sard en la sección 11, explicaremos ahora ambas ideas con mayor detenimiento.

16.2. El teorema de Sard. Sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable como antes. Recordemos que un punto $a \in N$ se llama *valor regular de f* si en la fibra $f^{-1}(a)$ no hay ningún punto crítico de f , es decir, $d_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ es un isomorfismo lineal para todo $x \in f^{-1}(a)$.

Como ya sabemos, el teorema de Sard (11.2) afirma que el conjunto $VR_f \subset N$ de los valores regulares de f es denso en N . El conjunto $N \setminus VR_f$ es la imagen del conjunto $C_f \subset M$ de los puntos críticos de F , que es un conjunto cerrado (ya que localmente C_f se describe por la anulación del determinante jacobiano de f).

Recordemos que en nuestro caso M es compacta y como C_f es cerrado en M también es compacta, por lo que también lo es su imagen (que por tanto es además cerrada en N). Es por ello que VR_f es además un conjunto abierto de N . Por tanto, gracias al teorema de Sard y a estar en esta situación particular, VR_f es un abierto denso en N . En otras palabras, un *punto genérico* de N es un valor regular de f , ya que se llama punto genérico a aquel que se toma en un abierto denso.

16.3. Comportamiento local de f en un en un valor regular de f . En la situación anterior, fijamos un valor regular $a \in N$ de f . Entonces $d_x f$ es isomorfismo para todo $x \in f^{-1}(a)$, luego existe un entorno U^x de x tal que $f|_{U^x}$ es inyectiva (por el teorema de inversión local (2.5)), con lo que $f^{-1}(a) \cap U^x = \{x\}$. Es decir, $f^{-1}(a)$ es un conjunto discreto y como es cerrado en el compacto M , es discreto compacto, luego es finito. Digamos que $f^{-1}(a) = \{x_1, \dots, x_r\}$. Como ya hemos señalado, existen entornos conexos (disjuntos) U^{x_i} de los x_i tales que $f|_{U^{x_i}} : U^{x_i} \rightarrow V^{x_i}$ son difeomorfismos sobre un entorno abierto V^{x_i} de a . De hecho, usando la compacidad, un pequeño truco topológico permite reducir los U^{x_i} para que todos los V^{x_i} sean iguales, pero esto no lo utilizaremos aquí. Como los U^{x_i} son conexos, los difeomorfismos $f|_{U^{x_i}}$ conservan o invierten la orientación y denotamos

$$\text{sign}_{x_i} f = \begin{cases} +1 & \text{si se conserva,} \\ -1 & \text{si se invierte.} \end{cases}$$

En fin, resulta la fórmula

$$d = \sum_{i=1}^r \text{sign}_{x_i} f$$

Esta es la fórmula del grado de Brower-Kronecker.

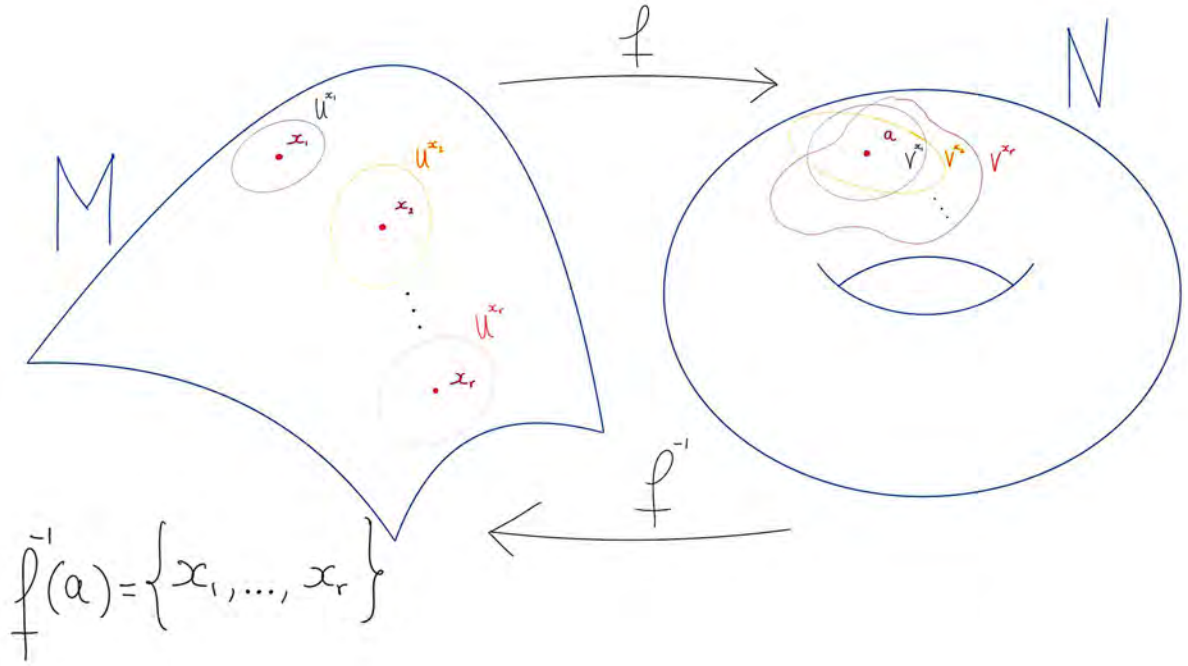


FIGURA 20. Esquema de la fibra de un valor regular.

16.4. Grado de la aplicación de Gauss. Apliquemos ahora lo anterior a la aplicación de Gauss $\nu: M \rightarrow \mathbb{S}^2$. Consideramos $\Omega_{\mathbb{S}^2}$, el elemento de volumen de la esfera, como forma de grado 2 de \mathbb{S}^2 . Por tanto,

$$\int_M \nu^* \Omega_{\mathbb{S}^2} = d \int_{\mathbb{S}^2} \Omega_{\mathbb{S}^2}$$

Demostremos ahora la igualdad $\nu^* \Omega_{\mathbb{S}^2} = K \Omega_M$.

Recordemos que $\Omega|_M = \det(\nu, \cdot, \cdot)|_M$ y $K(a) = \det(-d_a \nu)$, entonces tenemos:

$$\begin{aligned} (\nu^* \Omega_{\mathbb{S}^2})_a(u_1, u_2) &= \Omega_{\mathbb{S}^2, \nu(a)}(\nu_* u_1, \nu_* u_2) = \Omega_{\mathbb{S}^2, \nu(a)}(d_a \nu(u_1), d_a \nu(u_2)) \\ &= \det(\nu(a), d_a \nu(u_1), d_a \nu(u_2)) = \Omega_{M, a}(d_a \nu(u_1), d_a \nu(u_2)) \\ &= \det(d_a \nu) \Omega_{M, a}(u_1, u_2) = \det(-d_a \nu) \Omega_{M, a}(u_1, u_2) \\ &= K(a) \Omega_{M, a}(u_1, u_2) \end{aligned}$$

Donde hemos usado que el campo normal unitario compatible de \mathbb{S}^2 en $\nu(a)$ es $\nu(a)$ y el campo normal unitario compatible de M en a es $\nu(a)$, que como la dimensión es 2 entonces $\det(L) = \det(-L)$ y un importante resultado en la teoría de formas (basta considerar la versión para formas multilineales y no las diferenciables) llamado teorema del determinante.

Finalmente calculemos cada término:

$$(1) \quad \text{Como } \nu^* \Omega_{\mathbb{S}^2} = K \Omega_M, \text{ entonces } \int_M \nu^* \Omega_{\mathbb{S}^2} = \int_M K \Omega_M = \int_M K = 2\pi \chi(M).$$

$$(2) \quad d \int_{\mathbb{S}^2} \Omega_{\mathbb{S}^2} = d \text{ área}(\mathbb{S}^2) = 4\pi d.$$

Por tanto,

$$d = \frac{1}{2} \chi(M).$$

16.5. Consecuencias de la relación del grado con χ . Si ν no es suprayectiva, tomamos $a \in \mathbb{S}^2 \setminus \nu(M)$, que será un valor regular con $f^{-1}(a) = \emptyset$, luego $d = \sum_{x \in f^{-1}(a)} \text{sign}_a f = 0$. Es decir, si la aplicación de Gauss no es sobreyectiva, la curvatura íntegra y la característica de Euler son nulas. Excluida esta situación inicial, supongamos ν suprayectiva.

Un $a \in \mathbb{S}^2$ genérico es un valor regular de ν (por el teorema de Sard). Este $a \in \mathbb{S}^2$ es un vector normal de M tal que,

- Los puntos $x \in M$ cuyo vector normal es a son una cantidad finita.
- En cada uno de ellos $K(x) \neq 0$, ya que $K(x) = \det(-d_x \nu)$ y como $x \in \nu^{-1}(a)$ y a es un valor regular de ν , $d_x \nu$ es isomorfismo lineal por lo que $-d_x \nu$ también lo es.
- Teniendo en cuenta que $K(x) = \det(-d_x \nu) = \det(d_x \nu)$ (como ya hemos comentado, en dimensión 2, $\det(-L) = \det(L)$), observamos que si $K(x) > 0$, ν conserva la orientación en x y si $K(x) < 0$, ν invierte la orientación en x .

Por tanto,

$$\frac{1}{2} \chi(M) = d = \# \text{puntos (con vector normal } a) \text{ con curvatura } \textit{positiva} \\ - \# \text{puntos (con vector normal } a) \text{ con curvatura } \textit{negativa}$$

Para relacionar este resultado con la curvatura íntegra basta recordar:

$$\int_M K = 2\pi \chi(M) = 4\pi d$$

por lo que si $\int_M K > 0$ hay más puntos con curvatura positiva que negativa, si $\int_M K = 0$ hay los mismos y si $\int_M K < 0$ hay menos.

Por ejemplo, recordando que $\chi(M) = 2 - 2g$, donde g es el *género de la superficie* M , y que

$$\begin{aligned} \chi(M) &= 2 \text{ para la esfera,} \\ \chi(M) &= 0 \text{ para el toro,} \\ \chi(M) &\leq -2 \text{ para las demás superficies,} \end{aligned}$$

concluimos que:

Las esferas tienen más puntos elípticos que hiperbólicos, los toros tantos elípticos como hiperbólicos, y las demás superficies menos elípticos que hiperbólicos.

□

REFERENCIAS

- [1] JOSÉ M. RODRÍGUEZ SANJURJO, JESÚS M. RUIZ: *Introducción a la geometría diferencial I: Curvas* [26](#)
Sanz y Torres, Madrid 2012
- [2] JOSÉ M. RODRÍGUEZ SANJURJO, JESÚS M. RUIZ: *Introducción a la geometría diferencial II: Superficies* [26](#), [41](#)
Sanz y Torres, Madrid 2019
- [3] J. MANUEL GAMBOA, JESÚS M. RUIZ: *Iniciación al estudio de las variedades diferenciables.*
Sanz y Torres, Madrid 2016
- [4] K. UENO, K. SHIGA, S. MORITA: *A Mathematical Gift, Volume 1 : The Interplay Between Topology, Functions, Geometry, and Algebra* [12](#)
American Mathematical Soc., Washington 2003
- [5] L. AHLFORS, L. SARIO: *Riemann Surfaces*
Princeton University Press, New Jersey 1960