Algunas observaciones sobre la clasificación de álgebras de Lie nilpotentes graduadas

José María Ancochea y Rutwig Campoamor

Departamento de Geometría y Topología
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
28040 Madrid, España
Jose_Ancochea@mat.ucm.es

Departamento de Geometría y Topología
Laboratoire de Mathématiques et Applications F.S.T
Université de Haute Alsace
4, rue des Frères Lumière
68093 Mulhouse Cedex, Francia
R.Campoamor@uha.fr

Al Profesor Enrique Outerelo Domínguez,
como tributo de reconocimiento a su destacada labor docente e investigadora.

ABSTRACT

Se presenta la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes $\mathfrak{g}$ graduadas naturalmente de sucesión característica lineal en dimensión arbitraria, módulo un conjunto finito de soluciones particulares correspondientes a soluciones muy bajas con respecto al nilínice de $\mathfrak{g}$.

2000 Mathematics Subject Classification: 17B30.
Key words: Álgebra de Lie nilpotente, sucesión característica, graduación natural.

Introducción

Durante las últimas décadas, el interés de las estructuras graduadas ha aumentado de forma considerable, sea en aplicaciones geométricas, donde el concepto de graduación aparece de forma natural, así como en las aplicaciones, siendo la más notable la supersimetría, de la que han surgido distintas generalizaciones de las estructuras clásicas, con el fin de obtener un formalismo compatible con los postulados de la teoría de Bose-Fermi. El concepto de graduación es una consecuencia del estudio de los espacios y grupos de cohomología, que fue rápidamente adaptado a las distintas variantes de estructuras algebraicas, tales como los anillos y las álgebras. En lo que respecta a las álgebras de Lie, las graduaciones corresponden a la posibilidad de describir su estructura a partir de ciertos bloques esenciales, relacionados entre sí por el tensor de estructura. De esta forma, las álgebras semisimples están dotadas de forma natural de una graduación, descrita por el sistema de raíces correspondiente. Para álgebras no semisimples, no clasificables en dimensión arbitraria en virtud de la ausencia de propiedades intrínsecas que codifiquen la información necesaria para separar las distintas clases de isomorfía, las graduaciones pueden definirse de múltiples formas, habitualmente relacionadas a sucesiones descendientes, para los casos resoluble y nilpotente. En concreto, para el caso de álgebras de Lie nilpotentes es corriente definir las graduaciones a partir de la sucesión central descendente (sucesión importante para el análisis de su estructura, pero topológicamente exenta de interés por su longitud finita). El primer invariante que se emplea para el estudio de las álgebras nilpotentes es obviamente su nilíndice, directamente deducible de la longitud de la citada sucesión. Desde el punto de vista de los problemas de clasificación, la dificultad para separar las clases de isomorfía es inversamente proporcional al valor del nilíndice, siendo el caso metabeliano (índice dos) insoluble. Para lás álgebras de Lie nilpotentes de nilíndice maximal, la imposición de una graduación natural (es decir, que la estructura original coincida con aquella deducida de la graduación natural asociada) da lugar una clasificación completa, proporcionando uno o dos modelos, dependiendo de la paridad de la dimensión. Estos modelos son de utilidad para el estudio de las componentes irreducibles de la variedad de leyes nilpotentes, y pueden considerarse como la estructura de base de la cual pueden obtenerse las restantes álgebras que exhiban este nilíndice.

Como es lógico, el nilíndice por si mismo es manifiestamente insuficiente para una clasificación, salvo en dimensiones muy bajas, donde las clases de isomorfía son fácilmente obtenibles por métodos rudimentarios. Estudiando los operadores adjuntos de los elementos y sus formas canónicas (en el sentido de Jordan), puede obtenerse un invariante, llamado sucesión característica, que facilita una distinción efectiva de las álgebras y permite su clasificación, dentro de ciertos márgenes. En virtud de sus interesantes propiedades respecto a las deformaciones, la característica esencial observada en las álgebras de nilíndice maximal (también conocidas por el nombre de filiformes) es extensible a nilíndices más bajos. Una estrategia razonable es abordar la clasificación de las álgebras de Lie de de una sucesión característica fija, e imponiendo, si procede, la existencia de una graduación (natural o no). Una vez clasificados los distintos modelos graduados, puede procederse al intento de obtener las leyes restantes, mediante el análisis de los grupos de cohomología o la técnica de perturbaciones. Esto dará lugar a álgebras de Lie que ya no exhiben una graduación, al menos equivalente a la empleada en el estudio de los modelos base.

El propósito de esta contribución es presentar la clasificación de las álgebras de Lie graduadas naturalmente de sucesión característica $(p, 1, .., 1)$. Esta clasificación, completa para dimensiones lo bastante altas en relación con el nilíndice, es, en dimensiones bajas, completa módulo un conjunto finito, correspondiente a soluciones particulares cuyo origen está determinado por la debilidad de las condiciones sobre la graduación y la sucesión característica. No obstante, el carácter degenerado de tales álgebras particulares en dimensiones bajas es plenamente irrelevante para el estudio geométrico y topológico de la variedad de leyes nilpotentes (si bien de innegable interés si el propósito es establecer las listas exhaustivas de las clases de isomorfía).

1. Algebras graduadas naturalmente con sucesión característica lineal

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie nilpotente de dimensión n. Designamos por $C^i(\mathfrak{g})$ los ideales de la sucesión central descendente de $\mathfrak{g}$. El álgebra $\mathbb{Z}$-graduada asociada a esta filtración está definida por:

$$\mathfrak{gr}(\mathfrak{g}) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \frac{C^i\mathfrak{g}}{C^{i+1}\mathfrak{g}} \tag{1.1}$$

Como se ha observado anteriormente, un álgebra $\mathfrak{g}$ dícese graduada naturalmente si es isomorfa a $\mathfrak{gr}(\mathfrak{g})$. La sucesión característica de $\mathfrak{g}$, invariante al que hemos hecho alusión en la introducción, viene determinado por la estructura de los bloques de Jordan de los operadores adjuntos asociados a los generadores (en el sentido propio del término). Es decir, dado un vector no nulo $X \in \mathfrak{g} - C^1\mathfrak{g}$, sea $c(X)$ la sucesión ordenada de dimensiones de los bloques de Jordan para el operador lineal $ad(X)$. El conjunto de tales sucesiones se ordena lexicográficamente. No es excesivamente arduo constatar que

$$c(\mathfrak{g}) = \max_{X\in\mathfrak{g}-C^1\mathfrak{g}} \{c(X)\} \tag{1.2}$$

constituye un invariante de $\mathfrak{g}$. Un vector cuyo sucesión asociada sea maximal se llamará vector característico de $\mathfrak{g}$. Es inmediato verificar que las álgebras de nilíndice maximal corresponden a la sucesión $(\dim\mathfrak{g} - 1, 1)$

En lo sucesivo, una sucesión característica del tipo $(q, 1, .., 1)$ (con $q \geq 2$) se llamará lineal. La justificación es la siguiente: dada la sucesión característica $(q, 1, ..., 1)$ de un álgebra de dimensión n, la diferencia $n-q$ proporciona el número de cajas unitarias del operador lineal adjunto asociado a un vector característico. En algún trabajo, los autores han utilizado el sobrenombre de "álgebras p-filiformes" para designar este tipo de estructura. No obstante, la terminología es cuanto menos desafortunada por dos motivos:

1. Según el diccionario de la Real Academia de la Lengua, el término (no paleontológico) filiforme se refiere a un objeto "que tiene forma o apariencia de hilo".

Desde este punto de vista, el término p-filiforme no tiene ninguna interpretación coherente.

2. Usualmente la p-filiformidad se refiere a la sucesión característica $(\dim \mathfrak{g} - p, 1..., 1)$. Esta inversión arbitraria de la primera entrada, correspondiente al nilíndice, sólo lleva a confusión.

Los autores han sido acusados en alguna ocasión de modificar "una terminología bien establecida en la literatura matemática" mediante esta alteración de nomenclatura. Esta afirmación es cuanto menos cuestionable, dado que este tipo de estructuras han sido utilizadas tan sólo por dos grupos de autores (excluidos los firmantes), por lo que la repercusión de tal notación en la literatura es irrelevante.

En [6] se demostró que toda álgebra filiforme naturalmente graduada es isomorfa a uno de los siguientes modelos:

1. L_n $(n \geq 3)$:
$$[X_1, X_i] = X_{i+1},\ 1 \leq i \leq n \tag{1.3}$$
sobre una base $\{X_1, .., X_{n+1}\}$.

2. Q_{2m-1} $(m \geq 3)$:
$$[X_1, X_i] = X_{i+1},\ 1 \leq i \leq 2m-1 \tag{1.4}$$
$$[X_j, X_{2m+1-j}] = (-1)^j X_{2m},\ 1 \leq j \leq m \tag{1.5}$$
sobre una base $\{X_1, .., X_{2m}\}$.

De la estructura anterior puede colegirse la razón por la cual las álgebras de este tipo han sino denominadas filiformes, así como el carácter absurdo de generalizar esta curiosa analogía.

En lo sucesivo haremos uso del formalismo de Maurer–Cartan para describir las álgebras de Lie. Estas ecuaciones, de gran relevancia en el estudio de las conexiones en los grupos de Lie, no ha sido sin embargo adoptada de manera unánime para la descripción de la geometría tangente, pese a las innegables ventajas que conlleva. Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie de dimensión n, determinada por un tensor de estructura $\left\{C_{ij}^k\right\}$ sobre una base $\{X_1, .., X_n\}$, puede definirse sobre el espacio dual $\{\omega_1, .., \omega_n\}$ la diferencial exterior
$$d\omega_i \left(X_j, X_k\right) = -C_{jk}^i. \tag{1.6}$$
De este modo, $\mathfrak{g}$ se reescribe en términos de 2-formas como:
$$d\omega_i = -C_{jk}^i \omega_j \wedge \omega_k \ 1 \leq i, j, k \leq n, \tag{1.7}$$
La condición de Jacobi es equivalente a $d^2\omega_i = 0$ para todo i. Por tanto, la determinación de estructura se reduce al cálculo de un sistema cerrado de formas diferenciales.

En la práctica la fórmula anterior es más fácil de evaluar que la condición de Jacobi para las distintas tripletas de elementos básicos, y permite asimismo reconocer las deformaciones y extensiones.

La clasificación de álgebras de Lie de dimensión n y graduadas naturalmente y cuya sucesión característica sea $(n-t, 1, .., 1)$ (para valores $2 \leq t \leq \left[\frac{n}{2}\right]$) se apoya en dos resultados auxiliares cuya justificación puede obtenerse sin dificultad del formalismo de Maurer–Cartan:

Proposición 1.1 *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie descomponible graduada naturalmente. Entonces $\mathfrak{g}$ no admite extensiones centrales de grado uno graduadas naturalmente e indescomponibles que conserven simultáneamente el nilíndice y la linearidad de la sucesión característica.*

Proposición 1.2 *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión n y sucesión característica $(p, 1, ..., 1)$. Entonces existe un álgebra $\mathfrak{g}'$ graduada naturalmente con el mismo nilíndice y tal que la sucesión*

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}' \rightarrow 0 \tag{1.8}$$

es exacta.

Partiendo de estos dos premisas, y aplicando el tipo de razonamiento empleado en los trabajos [1, 4], la clasificación de los modelos esenciales para la sucesión característica $(n-q, 1, .., 1)$ se reduce al siguiente

Teorema 1.3 *Para dimensión suficientemente alta, toda álgebra de Lie graduada naturalmente no escindida y cuya sucesión característica sea $\left(dim\mathfrak{g} - k, 1, .^{(k)}., 1\right)$ (con $2 \leq k \leq \left[\frac{\dim \mathfrak{g}}{2}\right]$) es isomorfa a uno de los siguientes modelos :*

1. $L_n(t_1, .., t_p)$; $1 \leq t_1 < .. < t_p \leq \left[\frac{n-1}{2}\right]$, $n \geq 7$

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= d\omega_2 = 0 \\ d\omega_j &= \omega_1 \wedge \omega_{j-.1},\ 3 \leq j \leq n \\ d\omega_{n+i} &= \sum_{j=2}^{t_i+1} (-1)^j \omega_j \wedge \omega_{2t_i+3-j},\ 1 \leq i \leq p \end{aligned}$$

2. $Q_{2m-1}(t_1, .., .t_p)$; $1 \leq t_1 < .. < t_p \leq \left[\frac{2m-1}{2}\right]$, $m \geq 3$

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= d\omega_2 = 0 \\ d\omega_j &= \omega_1 \wedge \omega_{j-1},\ 3 \leq j \leq 2m-1 \\ d\omega_{2m} &= \omega_1 \wedge \omega_{2m-1} + \sum_{j=2}^{\left[\frac{2m+1}{2}\right]} (-1)^j\ \omega_j \wedge \omega_{2m+1-j} \\ d\omega_{2m+1+j} &= \sum_{i=2}^{t_j} (-1)^j \omega_i \wedge \omega_{2t_j+3-i},\ 1 \leq j \leq p \end{aligned}$$

3. $D_{2m}(t_1,..,t_p)$; $1 \leq t_1 < .. < t_p \leq m-3,\ m \geq 4$

$$\begin{aligned}
d\omega_1 &= d\omega_2 = 0\\
d\omega_j &= \omega_1 \wedge \omega_{j-1},\ 3 \leq j \leq 2m-3\\
d\omega_{2m-2} &= \omega_1 \wedge \omega_{2m-3} + \sum_{j=2}^{m-1} (-1)^j\ \omega_j \wedge \omega_{2m-3-j}\\
d\omega_{2m-1} &= \omega_1 \wedge \omega_{2m-2} + \sum_{j=2}^{m-1} (-1)^j (m-j)\ \omega_j \wedge \omega_{2m-2-j}\\
&\qquad + (2-m)\ \omega_2 \wedge \omega_{2m}\\
d\omega_{2m} &= \sum_{j=2}^{m-1} (-1)^j\ \omega_j \wedge \omega_{2m-3-j}\\
d\omega_{2m+i} &= \sum_{j=2}^{t_i-1} (-1)^j\ \omega_j \wedge \omega_{2t_i+3-j},\ 1 \leq i \leq p
\end{aligned}$$

4. $E_{2m+1}(t_1,..,t_p)$; $1 \leq t_1 < .. < t_p \leq m-3,\ m \geq 4$

$$\begin{aligned}
d\omega_1 &= d\omega_2 = 0\\
d\omega_j &= \omega_1 \wedge \omega_{j-1},\ 3 \leq j \leq 2m-3\\
d\omega_{2m-2} &= \omega_1 \wedge \omega_{2m-3} + \sum_{j=2}^{m-1} (-1)^j\ \omega_j \wedge \omega_{2m-1-j}\\
d\omega_{2m-1} &= \omega_1 \wedge \omega_{2m-2} + \sum_{j=2}^{m-1} (-1)^j (m-j)\ \omega_j \wedge \omega_{2m-j}\\
&\qquad + (m-2)\ \omega_2 \wedge \omega_{2m+1}\\
d\omega_{2m} &= \omega_1 \wedge \omega_{2m-1} + \sum_{j=3}^{m} \frac{(-1)^j (j-2)(2m-1-j)}{2}\ \omega_j \wedge \omega_{2m+1-j}\\
&\qquad + (m-2)\ \omega_3 \wedge \omega_{2m+1}\\
d\omega_{2m+1} &= \sum_{j=2}^{\left[\frac{2m+1}{2}\right]-1} (-1)^j\ \omega_j \wedge \omega_{2m-1-j}\\
d\omega_{2m+1+i} &= \sum_{j=2}^{t_i+1} (-1)^j \omega_j \wedge \omega_{2t_i+3-j},\ 1 \leq i \leq p
\end{aligned}$$

La demostración de esta afirmación es completamente análoga a la exhibida en [1] para las sucesiones del tipo $(n,q,1)$, y está basada esencialmente en un razonamiento inductivo sobre la estructura de las extensiones, así como su comportamiento respecto a la estructura de la graduación. Los detalles sobre el procedimiento pueden encontrase en [1, 4].

Según consta a los autores, existe la creencia de que la clasificación de modelos graduados es absolutamente dependiente de métodos computacionales. Huelga decir que no compartimos tal hipótesis, y es más, estimamos que un tratamiento puramente mecánico y automatizado necesariamente causa la pérdida de ciertas pautas que pueden permitir la separación efectiva de las clases de isomorfía. Si bien este tipo de métodos pueden ser de suma utilidad, no son, a nuestro juicio, el factor determinante para un análisis estructural, dada la incompletitud de los conjuntos de invariantes conocidos.

El resultado anterior admite un corolario evidente. Toda álgebra de Lie graduada naturalmente y cuya sucesión característica sea $\left(\dim \mathfrak{g} - k, 1, .^{(k)}., 1\right)$ (con $2 \leq k \leq \left[\frac{\dim \mathfrak{g}}{2}\right]$) es isomorfa a una suma directa de uno de los modelos anteriores y un álgebra abeliana (para dimensión suficientemente alta).

Observación final

Llegados a este punto, es necesario precisar el significado de la expresión "para dimensión suficientemente alta". Si se aborda la clasificación de estas álgebras para dimensiones bajas, la condición sobre la sucesión característica no es lo bastante fuerte como para evitar la aparición de soluciones aisladas en número finito, y que corresponden a álgebras no pertenecientes a las familias anteriores. No obstante, este tipo de álgebras son patológicas en el sentido de que, al aumentar la dimensión en una unidad, no existen soluciones que correspondan a una extensión de tales álgebras particulares. Para dimensiones altas en relación al índice de nilpotencia, este tipo de soluciones "singulares" ya no pueden darse, por la estructura de la graduación.

Referencias

[1] J.M. Ancochea, R. Campoamor–Stursberg: *On certain families of naturally graded Lie algebras.* J. Pure Appl. Algebra **170** (2002), 1–27.

[2] ———: *Classification of* $(n-5)$*-filiform Lie algebras.* Linear Alg. Appl. **336** (2001), 167–180.

[3] ———: *2-step solvable Lie algebras and weight graphs.* Transf. Groups **7** (2002), 307–320.

[4] ———: *On characteristically nilpotent Lie algebras of type Q*. Linear Alg. Appl. **367** (2003), 195–212.

[5] R. Campoamor–Stursberg: *On k-abelian, p-filiform Lie algebras I.* Acta Math. Univ. Comen. **71** (2002), 51–68.

[6] M. Vergne: *Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes. Applications a l'étude de la variété des algèbres de Lie nilpotentes.* Bull. Soc. Math. France **98** (1970), 81–116.