La variedad de Weil para variedades unirracionales

Carlos Andradas[*], **Tomás Recio**[†] y **J. Rafael Sendra**[‡]

Departamento de Álgebra
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
28040 Madrid, España
carlos_andradas@mat.ucm.es@mat.ucm.es

Tomás Recio
Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación
Universidad de Cantabria
39071 Santander, España
tomas.recio@unican.es

J. Rafael Sendra
Departamento de Matemáticas
Universidad de Alcalá
28871 Madrid, España
rafael.sendra@uah.es

Al Profesor Enrique Outerelo en su 65 aniversario.

ABSTRACT

This paper deals with the construction and main properties of the so called Weil variety (cf. [Weil], [ARS2]) for the case of parametric varieties (over an extension of a ground field) of arbitrary dimension. Moreover, a particular subvariety of the Weil variety is considered here in order to check, algorithmically, several interesting properties of the given variety (such as the property of being defined or parametrizable over the base field).

2000 Mathematics Subject Classification: 14E05,14Q15,14Q20,68W30.
Key words: Parametrizaciones racionales, cuerpo base, variedad de Weil.

[*]Parcialmente subvencionado por BFM2002-04797.
[†]El primer y segundo autor agradecen la hospitalidad del Programa "Topological Aspects of Real Algebraic Varieties" del Mathematical Sciences Research Institute (MSRI).
[‡]El segundo y el tercer autor parcialmente subvencionados por BFM2002-04402-C02-02.

1. Introducción

Este artículo se enmarca en el problema de la simplificación de parametrizaciones. Supongamos que tenemos una variedad paramétrica V en un espacio afín n-dimensional sobre un cuerpo algebraicamente cerrado, dada por una cierta parametrización racional; esto es, V es el cierre de Zariski de la imagen de una aplicación racional desde otro espacio afín de cierta dimensión d sobre el mismo cuerpo. ¿Qué significa "simplificar" la parametrización dada? ¿Cuándo es ésto posible? ¿Cómo puede llevarse a cabo tal simplificación algorítmicamente a partir de los datos?

El interés de estas cuestiones radica, por una parte, en su carácter elemental y, por otro, en la ubicuidad de las variedades paramétricas en las aplicaciones (al diseño geométrico asistido por ordenador, por ejemplo) y en la necesidad, por tanto, de manipular las mismas de la manera más sencilla posible (en algún sentido).

Por ejemplo, una curva plana en el plano complejo podría venir dada, tras un cierto proceso algebraico de construcción de la misma, por una parametrización racional en un parámetro t, con coeficientes complejos. Es bien sabido que, en ese caso, el cuerpo F de funciones racionales (sobre $\mathbb{C}$) de dicha curva es birracional a $\mathbb{C}(t)$ y tiene, por tanto, género cero. Lo mismo ocurre, por tanto, con el cuerpo K generado sobre $\mathbb{R}$ por la parametrización racional dada, como subcuerpo de $\mathbb{C}(t)$. Ahora bien, esto no significa que K sea isomorfo a $\mathbb{R}(t)$; esto ocurre si y sólo si la curva admite también una parametrización racional con coeficientes reales. Por tanto, si consideramos que una parametrización es más simple si tiene coeficientes reales en vez de complejos, vemos que la simplificación de una parametrización compleja es equivalente a la verificación del teorema de Lüroth real para K ([RS2]). En [RS1] se da un algoritmo de simplificación para este caso. Para el caso de superficies, existen soluciones parciales al problema anterior, véase por ejemplo [Schi1].

Otro ejemplo, de naturaleza distinta, surge cuando se considera (como en [Schi3]) una superficie paramétrica propia, es decir, tal que las funciones racionales de la parametrización generan el cuerpo de funciones racionales en dos variables, y se supone que una parametrización es más simple si disminuye el máximo grado de las funciones racionales que aparecen en la descripción de una parametrización. En este contexto de superficies, el grado de la parametrización no es un invariante, como en el caso de curvas (donde coincide con el grado de la curva), sino que puede crecer arbitrariamente si se aplica una transformación de Cremona adecuada. El problema es, naturalmente, estimar el mínimo grado y hallar la transformación que reparametriza la variedad en este sentido. Como indica Schicho ([Schi3]) las parametrizaciones de grado más pequeño permiten implicitar de modo más sencillo la variedad dada, representarla con menos datos y encontrar más fácilmente curvas racionales de grado bajo sobre la superficie.

Un tercer criterio de simplificación consiste en exigir carácter propio en la parametrización de la variedad unirracional; es decir, imponer que la aplicación racional que induce la parametrización, del espacio de parametros en la variedad, sea birracional; o equivalentemente, que el grado de la aplicación racional inducida sea 1 ([Sh]).

Obsérvese que, en general, el grado de la parametrización, es decir el máximo grado de las funciones racionales que definen la parametrización (véase parrafo anterior), no coincide con el grado de la aplicación racional que la parametrización induce. De hecho, el grado de la aplicación racional coincide con el cardinal de una fibra genérica de la misma ([Sh]). No obstante, para el caso de curvas planas existen caracterizaciones de la birracionalidad que involucran el grado de la parametrización y el grado de la ecuación implícita (véase [SW]). El caso de superficies, como ya se ha indicado anteriormente, resulta más complicado (véase también [Schi2]).

Este tipo de parametrizaciones desempeña un papel fundamental en muchas aplicaciones en diseño geométrico, ya que, en ausencia de birracionalidad, el grado de la aplicación inducida asciende e intuitivamente la parametrización recorre repetidas veces la variedad, cuando los parámetros toman valores en el cuerpo. Este problema ha sido abordado por varios autores, para el caso de curvas, mediante versiones constructivas del teorema de Lüroth (véase [Al], [AGR], [Sed], [SW]). Sin embargo, para el caso de superficies unirracionales, aunque existen soluciones algorítmicas para decidir la birracionalidad (véase [PSS]), la cuestión de simplificar una parametrización no birracional en otra birracional permanece bajo estudio. Asimismo, es importante señalar que las nociones de racionalidad y unirracionalidad, es decir la existencia de parametrizaciones propias de variedades unirracionales, son equivalentes en el caso de curvas como consecuencia del teorema de Lüroth y, para el caso de superficies, como consecuencia del teorema de Castelnouvo, la equivalencia es cierta si el cuerpo es algebraicamente cerrado. No obstante, en el caso general el problema es más complicado ya que la equivalencia de los dos conceptos no está garantizada y por tanto el problema algorítmico requiere de un criterio previo de decisión (véase [Sh]).

En nuestro trabajo, que continúa y desarrolla la ponencia [ARS2], el problema de la simplificación se ha orientado a encontrar reparametrizaciones, con coeficientes sobre una extensión de grado más bajo sobre un cuerpo base dado, de variedades de dimensión arbitraria dadas por una parametrización no necesariamente propia. En la ponencia mencionada se estudiaba, más particularmente, el caso de dimensión uno (curvas); cabe mencionar que este mismo problema, para el caso de curvas, es tratado mediante divisores canónicos en [ARS1]. Asimismo, queremos señalar que la extensión que aquí se contempla avanza en la dirección de [ARS2], no es totalmente inmediata y abre numerosas e interesantes cuestiones (veáse también la reciente tesina de [Tab]).

En general, nuestra aproximación procede del siguiente modo. En primer lugar, dada una variedad V de dimensión m, parametrizada sobre una extensión algebraica finita L de grado d de un cierto cuerpo base k de característica cero, suponemos que el espacio de parámetros tiene la misma dimensión que la variedad (tal reducción se puede realizar, clásicamente, sin demasiado problema algorítmico ([Al]). A continuación mimetizamos el proceso seguido por Weil para variedades implícitas (ver sección 2, donde se hace un breve resumen de este proceso), construyendo una variedad asociada (que denominamos variedad de Weil) mediante la anulación de las funciones racionales que resultan de la expresión de la parametrización en la base de

L como k-espacio vectorial (sección 3).

En la sección 4 se construye una subvariedad de la variedad de Weil, la llamada variedad testigo, que permite "leer" propiedades de la variedad V tales como la k-definibilidad o la k-parametrizabilidad (Teorema 4.2, Proposición 4.4) y reparametrizar, en su caso, la variedad dada (Teorema 5.2). Se discuten, en particular, las dificultades del caso unirracional no birracional, así como las peculiaridades del caso de dimensión mayor que uno.

La ventaja de la variedad testigo es, en general, su estructura (ver sección 5), lo que facilita, computacionalmente, los cálculos. Por ejemplo, en el caso de curvas, la k-parametrizabilidad equivale a que dicha variedad testigo sea una especie de círculo, que denominamos hipercírculo; en el caso más general, la variedad testigo tiene que ver con la estructura de los automorfismos del cuerpo de funciones racionales en varias variables. El cálculo con hipercírculos es relativamente bien conocido ([RSV]) y cómodo.

Concluímos el artículo con una colección de ejemplos que muestran las ventajas y dificultades (en algunos casos) de esta construcción.

2. La variedad de Weil

Sea k un cuerpo, que supondremos de característica cero, y $\mathbb{F}$ su cierre algebraico. Sea

$$V = \{f_1(X_1, \ldots, X_n) = \cdots = f_r(X_1, \ldots, X_n) = 0\} \subset \mathbb{F}^n$$

una variedad algebraica de dimensión m, donde $f_i \in \mathbb{F}[X_1, \ldots, X_n]$. Sea L un cuerpo intermedio, extensión finita de k, $k \subset L \subset \mathbb{F}$, que contiene todos los coeficientes de los polinomios f_i. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $L = k[\alpha]$ para algún $\alpha \in \mathbb{F}$. Sea $d = [L : k]$ el grado de la extensión y fijemos de una vez por todas la base $\{1, \alpha, \ldots \alpha^{d-1}\}$ de L como k-espacio vectorial.

Siguiendo a Weil [Weil], llamaremos variedad de Weil asociada a V a la variedad, con coeficientes en el cuerpo base k, construída del siguiente modo: reemplazamos cada variable X_i por la combinación lineal $X_i = X_{i0} + \alpha X_{i1} + \cdots + \alpha^{d-1} X_{i(d-1)}$, donde las X_{ik} son nuevas variables, y calculamos la expresión de los f_i en las nuevas nd variables:

$$f_i(X_{(1)}; X_{(2)}; \ldots; X_{(n)}) \in L[X_{(1)}; X_{(2)}; \ldots; X_{(n)}],$$

donde, por comodidad, representamos por $X_{(k)}$ el vector de variables $(X_{k0}, ..., X_{k(d-1)})$. Como $L[X_{(1)}; X_{(2)}; \ldots; X_{(n)}] = k[X_{(1)}; X_{(2)}; \ldots; X_{(n)}][\alpha]$, podemos expresar

$$\begin{aligned} f_i(X_{(1)}; X_{(2)}; \ldots; X_{(n)}) = f_{i0}(X_{(1)}; X_{(2)}; \ldots; X_{(n)}) + \alpha f_{i1}(X_{(1)}; X_{(2)}; \ldots; X_{(n)}) \\ + \cdots + \alpha^{d-1} f_{i(d-1)}(X_{(1)}; X_{(2)}; \ldots; X_{(n)}) \end{aligned}$$

con $f_{ik} \in k[X_{(1)}; X_{(2)}; \ldots; X_{(n)}]$ unívocamente determinados.

Definimos *la variedad de Weil asociada a V* como la variedad

$$W = \{f_{ik}(X_{(1)}; \cdots; X_{(n)}) = 0 \mid i = 1, \ldots, n, \quad k = 0, \ldots, d-1\} \subset \mathbb{F}^{nd}.$$

De la construcción se sigue inmediatamente que si $x = (x_{(1)}; x_{(2)}; \ldots; x_{(n)}) \in W$, donde cada $x_{(i)}$ representa la d-tupla $(x_{i0}, \ldots, x_{i(d-1)})$, entonces

$$x_V := (\Sigma_{i=0}^{d-1} x_{1i}\alpha^i, \Sigma_{i=0}^{d-1} x_{2i}\alpha^i, \ldots, \Sigma_{i=0}^{d-1} x_{ni}\alpha^i) \in V$$

es decir, el punto x_V así definido, está en V. Consideremos ahora los conjugados de α en $\mathbb{F}$, que denotamos por $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{d-1}$, donde fijamos $\alpha = \alpha_0$, y, para cada $\ell = 1, \ldots, d-1$, fijemos un automorfismo σ_ℓ de $\mathbb{F}|k$ que envíe α a α_i. Denotamos por V^{σ_ℓ} la variedad conjugada de V por σ_ℓ, esto es,

$$V^{\sigma_\ell} = \{f_1^{\sigma_\ell}(X_1^{\sigma_\ell}, \ldots, X_n^{\sigma_\ell}) = \cdots = f_r^{\sigma_\ell}(X_1^{\sigma_\ell}, \ldots, X_n^{\sigma_\ell}) = 0\} \subset \mathbb{F}^n$$

donde $f_i^{\sigma_\ell}(X_1^{\sigma_\ell}, \ldots, X_n^{\sigma_\ell})$ representa el polinomio cuyos coeficientes son la imagen por σ_ℓ de los de f_i y las $X_i^{\sigma_\ell}$ son nuevas variables.

Obsérvese que V^{σ_ℓ} está caracterizada por la condición de que para cada punto de $\mathbb{F}^n$, $(x_1, \ldots, x_n) \in V$ si y sólo si $(\sigma_\ell(x_1), \ldots, \sigma_\ell(x_n)) \in V^{\sigma_\ell}$. Obviamente V^{σ_ℓ} es una variedad algebraica isomorfa a V, y si las ecuaciones de partida tienen sus coeficientes en el cuerpo base, es decir, si $f_i \in k[X_1, \ldots, X_n]$, entonces $V^{\sigma_\ell} = V$, para todo $\ell = 1 \ldots, d-1$. Esto puede ocurrir incluso aunque $V \cap k^n = \emptyset$, como por ejemplo si $V = \{x^2 + y^2 + 1 = 0\}$ y $k = \mathbb{Q}$.

Tomemos un punto $x = (x_{(1)}; x_{(2)}; \ldots; x_{(n)}) \in W$, donde $x_{(i)} = (x_{i1}, \ldots, x_{i(d-1)})$. Como W está definida por polinomios con coeficientes en k, es invariante por conjugación, y, por tanto, el punto $y = \sigma_\ell^{-1}(x) = (\sigma_\ell^{-1}(x_{(1)}); \sigma_\ell^{-1}(x_{(2)}); \ldots; \sigma_\ell^{-1}(x_{(n)}))$ también está en W. En particular, de acuerdo con la descripción de x_V dada arriba, el punto y_V pertenece a V y, consecuentemente, su imagen por σ_ℓ está en V^{σ_ℓ}, esto es:

$$x_V^{\sigma_\ell} := (\Sigma_{i=0}^{d-1} x_{1i}\alpha_\ell^i,\ \Sigma_{i=0}^{d-1} x_{2i}\alpha_\ell^i,\ \ldots,\ \Sigma_{i=0}^{d-1} x_{ni}\alpha_\ell^i) \in V^{\sigma_\ell}.$$

De este modo, el automorfismo lineal $\psi : \mathbb{F}^{nd} \to \mathbb{F}^{nd}$ dado por

$$\begin{matrix} (X_{10} & \ldots & X_{1(d-1)}; \\ X_{20} & \ldots & X_{2(d-1)}; \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ X_{n0} & \ldots & X_{n(d-1)}) \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} ((\Sigma_{i=0}^{d-1} X_{1i}\alpha^i, & \Sigma_{i=0}^{d-1} X_{2i}\alpha^i, & \ldots, & \Sigma_{i=0}^{d-1} X_{ni}\alpha^i); \\ (\Sigma_{i=0}^{d-1} X_{1i}\alpha_1^i, & \Sigma_{i=0}^{d-1} X_{2i}\alpha_1^i, & \ldots, & \Sigma_{i=0}^{d-1} X_{ni}\alpha_1^i); \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\Sigma_{i=0}^{d-1} X_{1i}\alpha_{d-1}^i, & \Sigma_{i=0}^{d-1} X_{2i}\alpha_{d-1}^i, & \ldots, & \Sigma_{i=0}^{d-1} X_{ni}\alpha_{d-1}^i)) \end{matrix}$$

envía W en $V \times V^{\sigma_1} \times \cdots \times V^{\sigma_{d-1}}$. Obsérvese que, por comodidad, en la aplicación anterior, representamos los puntos de F^{nd} en el lado izquierdo como una matriz $n \times d$, donde cada fila representa el vector de variables $X_{(i)}$, mientras que, a la derecha, están representados como una matriz $d \times n$, donde las filas consisten en los puntos x_V, $x_V^{\sigma_1}$, $\ldots$, $x_V^{\sigma_{d-1}}$ de las variedades V, V^{σ_1}, $\ldots$, $V^{\sigma_{d-1}}$, respectivamente.

El enunciado siguiente recoge las propiedades básicas de la variedad de Weil, como puede verse en [ARS2]:

Teorema 2.1 *a) El automorfismo $\psi : \mathbb{F}^{nd} \to \mathbb{F}^{nd}$ transforma W en $V \times V^{\sigma_1} \times \cdots \times V^{\sigma_{d-1}}$, que son, por consiguiente, variedades isomorfas.*

b) Sea $\widetilde{W} = W \cap \{X_{ik} = 0 \mid i = 1, \ldots, n, \quad k \geq 1\}$*. El automorfismo anterior transforma* $\widetilde{W}$ *en la diagonal* Δ *del producto* $V \times V^{\sigma_1} \times \cdots \times V^{\sigma_{d-1}}$*, que, a su vez, se identifica con la interseccción* $V \cap V^{\sigma_1} \cap \cdots \cap V^{\sigma_{d-1}}$*. Esta intersección es el mayor subconjunto (de hecho es una subvariedad) de* V *estable por conjugación.*

En particular, del apartado *b)* del teorema se deduce:

Corolario 2.2 *Los siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) La variedad V *está definida sobre* k*.*

b) $\widetilde{W}$ *es isomorfa a* V*.*

c) $\dim \widetilde{W} = \dim V$.

Ejemplo 2.3 Sea $V := \{x^2+y^2+1 = 0\} \subset \mathbb{C}^2$. Efectuando la sustitución $x = x_0+i\, x_1$ e $y = y_0 + i\, y_1$, resulta

$$x^2 + y^2 + 1 = (x_0^2 - x_1^2 + y_0^2 - y_1^2 + 1) + i\,(2x_0x_1 + y_0y_1)$$

con lo que la variedad de Weil es la subvariedad de $\mathbb{C}^4$ definida por las ecuaciones

$$x_0^2 - x_1^2 + y_0^2 - y_1^2 + 1 = 2x_0x_1 + y_0y_1 = 0.$$

El isomorfismo ψ en este caso está dado por las ecuaciones

$$(x_0, x_1, y_0, y_1) \to (x_0 + i\,x_1, y_0 + i\,y_1, x_0 - i\,x_1, y_0 - i\,y_1)$$

y la variedad $\widetilde{W}$ resulta ser la dada por $x_0^2+y_0^2+1 = x_1 = y_1 = 0$ que, evidentemente, es isomorfa a V.

3. La variedad de Weil en el caso paramétrico

Supongamos ahora que V está parametrizada por la aplicación unirracional $\varphi(T) : \mathbb{F}^d \to \mathbb{F}^n$ dada por:

$$(T_1, \ldots, T_m) \to (\varphi_1(T_1, \ldots, T_m), \ldots, \varphi_n(T_1, \ldots, T_m))$$

Esto es, supongamos que V es el cierre de Zariski de la imagen de la aplicación racional anterior, donde cada función coordenada es un cociente

$$\varphi_i(T_1, \ldots, T_m) = \frac{h_i(T_1, \ldots, T_m)}{g_i(T_1, \ldots, T_m)}.$$

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad (aumentando el cuerpo intermedio L introducido en la sección anterior), que cada $\varphi_i(T_1, \ldots, T_m)$ tiene coeficientes en $L =$

$k[\alpha]$. Además, sustituyendo g_i por el mínimo común múltiplo de los denominadores, supondremos, de ahora en adelante, que la parametrización está reducida a común denominador, que denotaremos por $g(T_1,\ldots,T_m)$. Finalmente, supondremos también que $h_1(T),\ldots,h_n(T),g(T)$ son primos entre sí.

Por conjugación, podemos obtener parametrizaciones $\varphi^{\sigma_\ell}(T)$ de las variedades V^{σ_ℓ}. Para evitar confusiones llamamos $T^{\sigma_\ell}=(T_1^{\sigma_\ell},\ldots,T_m^{\sigma_\ell})$ al vector de variables que parametriza V^{σ_ℓ}. Poniendo juntas todas estas parametrizaciones obtenemos una parametrización del producto, $\Pi:(\mathbb{F}^m)^d\to V\times V^{\sigma_1}\times\cdots\times V^{\sigma_{d-1}}$, dada por:

$$(T,T^{\sigma_1},\ldots,T^{\sigma_{d-1}})\to(\varphi(T),\varphi^{\sigma_1}(T^{\sigma_1}),\ldots,\varphi^{\sigma_{d-1}}(T^{\sigma_{d-1}}))$$

El isomorfismo lineal ψ de la sección precedente transforma esta parametrización en una parametrización de W. Alternativamente, otra parametrización de W puede obtenerse, también, como sigue: en la parametrización $\varphi(T_1,\ldots,T_m)$ de V sustituimos cada variable T_i por $T_i=T_{i0}+T_{i1}\alpha+\cdots+T_{i(d-1)}\alpha^{d-1}$, donde las T_{ik} son nuevas variables. De este modo obtenemos funciones racionales, $\varphi_i\in L(T_{(1)};\ldots;T_{(m)})$, donde, como antes, $T_{(i)}$ denota el vector de variables $(T_{i0},T_{i1},\ldots,T_{i(d-1)})$. Como $L(T_{(1)};\ldots;T_{(m)})=k(T_{(1)};\ldots;T_{(m)})[\alpha]$, estas funciones racionales tienen una única expresión de la forma

$$\varphi_i=\varphi_{i0}(T_{(1)};\ldots;T_{(m)})+\alpha\varphi_{i1}(T_{(1)};\ldots;T_{(m)})+\cdots+\alpha^{d-1}\varphi_{i(d-1)}(T_{(1)};\ldots;T_{(m)})$$

donde cada $\varphi_{ik}\in k(T_{(1)};\ldots;T_{(m)})$. Se comprueba inmediatamente que la aplicación unirracional $\Phi:\mathbb{F}^{md}\to\mathbb{F}^{nd}$ dada por

$$\begin{array}{llll} (T_{10}, & \ldots, & T_{1(d-1)}; \\ \;T_{20}, & \ldots, & T_{2(d-1)}; \\ \;\cdots & \cdots & \cdots \\ \;T_{m0}, & \ldots, & T_{m(d-1)}) \end{array} \to \begin{array}{lll} (\varphi_{10}(T_{(1)};\ldots;T_{(m)}), & \ldots, & \varphi_{1(d-1)}(T_{(1)};\ldots;T_{(m)}); \\ \;\varphi_{20}(T_{(1)};\ldots;T_{(m)}), & \ldots, & \varphi_{2(d-1)}(T_{(1)};\ldots;T_{(m)}); \\ \quad\cdots & \cdots & \cdots \\ \;\varphi_{n0}(T_{(1)};\ldots;T_{(m)}), & \ldots, & \varphi_{n(d-1)}(T_{(1)};\ldots;T_{(m)})) \end{array}$$

parametriza la variedad de Weil. Llamaremos a esta parametrización *la parametrización obtenida por desarrollo de φ*. Una sencilla comprobación muestra que esta parametrización se relaciona con la mencionada anteriormente (obtenida a partir de Π) mediante el cambio lineal de variables $\eta:\mathbb{F}^{md}\to(\mathbb{F}^m)^d$ dado por

$$\begin{array}{lll} (T_{10} & \ldots & T_{1(d-1)}; \\ \;T_{20} & \ldots & T_{2(d-1)}; \\ \;\cdots & \cdots & \cdots \\ \;T_{m0} & \ldots & T_{m(d-1)}) \end{array} \to \begin{array}{llll} (\Sigma_{i=0}^{d-1}T_{1i}\alpha^i, & \Sigma_{i=0}^{d-1}T_{2i}\alpha^i, & \ldots, & \Sigma_{i=0}^{d-1}T_{mi}\alpha^i; \\ (\Sigma_{i=0}^{d-1}T_{1i}\alpha_1^i, & \Sigma_{i=0}^{d-1}T_{2i}\alpha_1^i, & \ldots, & \Sigma_{i=0}^{d-1}T_{mi}\alpha_1^i; \\ \quad\cdots & \quad\cdots, & \cdots & \quad\cdots \\ \Sigma_{i=0}^{d-1}T_{1i}\alpha_{d-1}^i, & \Sigma_{i=0}^{d-1}T_{2i}\alpha_{d-1}^i, & \ldots, & \Sigma_{i=0}^{d-1}T_{mi}\alpha_{d-1}^i) \end{array}$$

(donde cada fila de la derecha debe interpretarse como el vector de variables $T^{\sigma_\ell}=(T_1^{\sigma_\ell},\ldots,T_m^{\sigma_\ell})$ que parametriza V^{σ_ℓ}).

Obtenemos así un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\psi} & V \times V^{\sigma_1} \times \cdots \times V^{\sigma_{d-1}} \\ \uparrow \Phi & & \uparrow \Pi := \varphi \times \varphi^{\sigma_1} \times \cdots \times \varphi^{\sigma_{d-1}} \\ \mathbb{F}^{md} & \xrightarrow{\eta} & \mathbb{F}^m \times \mathbb{F}^m \times \cdots \times \mathbb{F}^m \end{array}$$

donde las filas horizontales vienen dadas por isomorfismos lineales y las verticales son las parametrizaciones respectivas de las variedades de Weil y producto. Recordemos que una *parametrización* $\varphi(T)$ *se dice que es birracional si* $\mathbb{F}(\varphi(T), \ldots, \varphi_n(T)) = \mathbb{F}(T)$. El siguiente resultado resume la situación anterior [ARS2]:

Teorema 3.1 *a) Si V es una variedad paramétrica, su variedad de Weil asociada, W, es también paramétrica; una parametrización suya se obtiene por desarrollo de la de V. Además, si la parametrización inicial de V es birracional, también lo es la correspondiente de W.*

b) Sea $Y := \{t \in \mathbb{F}^{md} \mid \varphi_{ik}(T) = 0, k > 0\}$. Entonces $\Phi^{-1}(\widetilde{W}) \subset Y$, de modo que $\Phi(Y) \subset \widetilde{W}$ en todos los puntos donde Φ esté definida.

Demostración. Comentamos sólamente el hecho de que Φ es birracional si y sólo si Π lo es. En efecto, supongamos que Π es birracional. Entonces

$$\mathbb{F}(\varphi(T), \varphi_1(T), \ldots, \varphi_n(T)) = \mathbb{F}(T),$$

donde $T = (T_1, \ldots, T_m)$ (y por consiguiente también

$$\mathbb{F}(\varphi^{\sigma_\ell}(T^{\sigma_\ell}), \varphi_1^{\sigma_\ell}(T^{\sigma_\ell}) \ldots, \varphi_n^{\sigma_\ell}(T^{\sigma_\ell})) = \mathbb{F}(T^{\sigma_\ell})$$

para todo ℓ). En particular, para cada $\ell = 0, \ldots, d-1$, existen funciones racionales $P_i^{\sigma_\ell} \in \mathbb{F}(X_1^{\sigma_\ell}, \ldots, X_n^{\sigma_\ell})$ tales que

$$P_i^{\sigma_\ell}(\varphi^{\sigma_\ell}(T^{\sigma_\ell}), \varphi_1^{\sigma_\ell}(T^{\sigma_\ell}) \ldots, \varphi_n^{\sigma_\ell}(T^{\sigma_\ell})) = T_i^{\sigma_\ell},$$

Sea $\psi_* P_i^{\sigma_\ell}$ la función racional transformada por el isomorfismo ψ (esto es, la obtenida al desarrollar $P_i^{\sigma_\ell}$ sustituyendo cada variable $X_j^{\sigma_\ell}$ por $X_{j0} + \alpha_\ell X_{j1} + \cdots + \alpha_\ell^{d-1} X_{j(d-1)}$).

Por otra parte, la aplicación inversa de η en el anterior diagrama nos despeja las variables T_{jk}, obteniendo ecuaciones lineales $T_{jk} = \Sigma \lambda_{i\ell} T_i^{\sigma_\ell}$, para ciertos escalares $\lambda_i^\ell \in \mathbb{F}$. Consideremos la función racional

$$Q_{jk} = \Sigma \lambda_{i\ell} (\psi_* P_i^{\sigma_\ell}) \in \mathbb{F}(X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}).$$

Una simple comprobación, usando la conmutatividad del diagrama, muestra que

$$T_{jk} = Q_{jk}(\varphi_{10}(T_{(1)}, \ldots, T_{(m)}), \ldots, \varphi_{n(d-1)}(T_{(1)}, \ldots, T_{(m)})$$

lo que prueba que

$$\mathbb{F}(\varphi_{10}(T_{(1)},\dots,T_{(m)}),\dots,\varphi_{n(d-1)}(T_{(1)},\dots,T_{(m)}) = \mathbb{F}(T_{(1)},\dots,T_{(m)}),$$

esto es, que la parametrización Φ es birracional. Recorriendo el diagrama en el sentido contrario, deducimos que, si Φ es birracional, también lo es Π y, por consiguiente, φ.

□

Ejemplo 3.2 Consideremos la parametrización

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = \dfrac{-2ti}{1+t^2} \\ y(t) = \dfrac{i(1-t^2)}{1+t^2} \end{array}\right.$$

de la circunferencia imaginaria $V = \{x^2 + y^2 + 1 = 0\}$. La parametrización es birracional y tomando $P(x,y) = \dfrac{y-i}{x}$ tenemos que $P(x(t), y(t)) = t$. La variedad conjugada $\overline{V}$, que en este caso coincide con V, está parametrizada por

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{x}(\overline{t}) = \dfrac{2\overline{t}i}{1+\overline{t}^2} \\ \overline{y}(\overline{t}) = \dfrac{-i(1-\overline{t}^2)}{1+\overline{t}^2} \end{array}\right.$$

y la función racional que nos recupera $\bar{t}$ a partir de ella es $\overline{P}(\overline{x},\overline{y}) = \dfrac{\overline{y}+i}{\overline{x}}$. Recordamos que $\overline{x},\overline{y},\overline{t}$ son otras variables. Desarrollando $P(x,y)$ y $\overline{P}(\bar{x},\bar{y})$ mediante las sustituciones $x = x_0 + ix_1$, $y = y_0 + iy_1$, $\bar{x} = x_0 - ix_1$, $\bar{y} = y_0 - iy_1$, obtenemos las funciones racionales

$$\psi_* P = \frac{y_0x_0 + y_1x_1 - x_1}{x_1^2 + x_0^2} + i\,\frac{y_1x_0 - x_0 - y_0x_1}{x_1^2 + x_0^2}$$

$$\psi_* \overline{P} = \frac{y_0x_0 + y_1x_1 - x_1}{x_1^2 + x_0^2} - i\,\frac{y_1x_0 + x_0 + y_0x_1}{x_1^2 + x_0^2}$$

señaladas en la demostración anterior.

Por otra parte, sustituyendo $t = t_0 + it_1$ y $\bar{t} = t_0 - it_1$ en la parametrización de V obtenemos la parametrización de W comentada más arriba en la sección:

$$\left\{\begin{array}{lll} x_0(t_0,t_1) = & -2 & \dfrac{t_0^2t_1 + t_1^3 - t_1}{t_0^4 + 2t_0^2t_1^2 + 2t_0^2 + t_1^4 - 2t_1^2 + 1} \\ x_1(t_0,t_1) = & -2 & \dfrac{t_0^3 + t_0t_1^2 + t_0}{t_0^4 + 2t_0^2t_1^2 + 2t_0^2 + t_1^4 - 2t_1^2 + 1} \\ y_0(t_0,t_1) = & & \dfrac{4t_0t_1}{t_0^4 + 2t_0^2t_1^2 + 2t_0^2 + t_1^4 - 2t_1^2 + 1} \\ y_1(t_0,t_1) = & - & \dfrac{-1 + t_0^4 + 2t_0^2t_1^2 + t_1^4}{t_0^4 + 2t_0^2t_1^2 + 2t_0^2 + t_1^4 - 2t_1^2 + 1} \end{array}\right.$$

Finalmente, teniendo en cuenta que $t_0 = \frac{1}{2}(t+\bar{t})$ y $t_1 = \frac{1}{2i}(t-\bar{t})$, una simple sustitución muestra que, efectivamente,

$$t_0 = \tfrac{1}{2}[\psi_* P(x_0(t_0,t_1), x_1(t_0,t_1), y_0(t_0,t_1), y_1(t_0,t_1)) + \\ \psi_* \overline{P}(x_0(t_0,t_1), x_1(t_0,t_1),\ y_0(t_0,t_1), y_1(t_0,t_1))],$$

y

$$t_1 = \tfrac{1}{2i}[\psi_* P(x_0(t_0,t_1), x_1(t_0,t_1), y_0(t_0,t_1), y_1(t_0,t_1)) - \\ \psi_* \overline{P}(x_0(t_0,t_1), x_1(t_0,t_1),\ y_0(t_0,t_1), y_1(t_0,t_1))].$$

4. La variedad testigo

Consideremos el diagrama conmutativo de la sección anterior y el denominador $g(T)$ de la parametrización φ. Entonces $g^{\sigma_\ell}(T^{\sigma_\ell})$ es el denominador de la parametrización $\varphi^{\sigma_\ell} : \mathbb{F}^m \to V^{\sigma_\ell}$. El automorfismo η^{-1} transforma los polinomios $g(T)$, $g^{\sigma_1}(T^{\sigma_1})$,..., $g^{\sigma_{d-1}}(T^{\sigma_{d-1}})$ en polinomios en $\mathbb{F}[T_{10}, \ldots, T_{1(d-1)}; \ldots; T_{m0}, \ldots, T_{m(d-1)}]$ (es decir, en el espacio de la esquina inferior izquierda del diagrama). Llamemos δ al producto de todos ellos. Por construcción, δ es invariante por conjugación, y, por tanto, tiene coeficientes en el cuerpo base k, i.e.,

$$\delta \in k[T_{10}, \ldots, T_{1(d-1)}; \ldots; T_{m0}, \ldots, T_{m(d-1)}].$$

Más aún, δ puede tomarse como denominador común de la parametrización Φ, lo que supondremos de ahora en adelante. Destacamos la siguiente observación:

Observación 4.1 El abierto $D_\delta := \{\delta \neq 0\} \subset \mathbb{F}^{md}$ se corresponde por η con el abierto $\{g(T) \neq 0\} \times \{g^{\sigma_1}(T^{\sigma_1}) \neq 0\} \times \cdots \times \{g^{\sigma d-1}(T^{\sigma_{d-1}}) \neq 0\}$ y, por consiguiente, las aplicaciones Φ y Π del diagrama son, respectivamente, regulares sobre ellos. $\square$

Desgraciadamente, no podemos asegurar que Φ (respectivamente Π) defina un recubrimiento topológico sobre su imagen cuando se restringe al abierto D_δ (respectivamente $\eta(D_\delta)$). Ni siquiera en el caso en que Φ es birracional podemos asegurarlo, ya que es posible que su inversa no esté definida en toda la imagen de $\Phi(D_\delta)$ (respectivamente que la inversa de Π no esté definida sobre todo

$$\Pi(\{g(T) \neq 0\} \times \{g^{\sigma_1}(T^{\sigma_1}) \neq 0\} \times \cdots \times \{g^{\sigma d-1}(T^{\sigma_{d-1}}) \neq 0\}),$$

véase ejemplo 6.2.

Sin embargo, las parametrizaciones Φ y Π sí que son genéricamente finito a uno. De modo más preciso, existe un abierto de Zariski de $V \times V^{\sigma_1} \times \cdots \times V^{\sigma_{d-1}}$ en el que la fibra de Π tiene un número finito y constante de puntos (siempre considerando las variedades sobre el cuerpo algebraicamente cerrado $\mathbb{F}$). En efecto, existe un abierto $A \subset V$ en el que la parametrización φ tiene un número q finito y constante de preimágenes, que coincide con el grado de la extensión del cuerpo de funciones racionales sobre V, $\mathbb{F}(V)$, sobre el cuerpo $\mathbb{F}(\varphi_1(T),\ldots,\varphi_n(T)) \subset \mathbb{F}(T_1,\ldots,T_d)$, cf. [Sh]. Consideremos ahora el abierto $\mathcal{A} := A \times A^{\sigma_1} \times \cdots \times A^{\sigma_{d-1}} \subset V \times V^{\sigma_1} \times \cdots \times V^{\sigma_{d-1}}$, y sean $B = \Pi^{-1}(\mathcal{A}) \subset (\mathbb{F}^m)^d$ y, finalmente, $U = \eta^{-1}(B)$. Tenemos que las aplicaciones $\Phi : U \to \psi^{-1}(\mathcal{A})$ y $\Pi : B \to \mathcal{A}$ son regulares y con cardinal de la fibra constante e igual a qd.

Recordemos que la variedad $\widetilde{W}$ sirve para indicar cuándo la variedad V está definida sobre k. Nosotros estamos interesados en detectar esta propiedad, no a través de $\widetilde{W}$, sino de Y. Para empezar, pudiera ocurrir que $\widetilde{W}$ estuviera contenida en el cerrado en el que la parametrización no está definida, esto es, que $\Phi^{-1}(\widetilde{W}) \cap Y = \emptyset$, cf. ejemplo 6.3. Sin embargo, esto no puede ocurrir cuando V está definida sobre k. En efecto, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 4.2 *Son equivalentes:*

a) *La variedad V está definida sobre k.*

b) *La restricción de Φ a $Y \cap D_\delta \cap U \to \widetilde{W}$ es una aplicación uniracional del abierto no vacío $Y \cap D_\delta \cap U$ en $\widetilde{W}$.*

c) $\dim(Y \cap D_\delta \cap U) = \dim \widetilde{W} = \dim V$.

Además, si se verifican estas condiciones y $\tau : \mathbb{F}^m \to Y \cap D_\delta \cap U$ es una parametrización uniracional con coeficientes en k de $Y \cap D_\delta \cap U$, la composición $\psi \circ \Phi \circ \tau$ es una parametrización unirracional de V. En particular, si $Y \cap D_\delta \cap U$ es una variedad paramétrica sobre k, también lo es V.

Demostración. Supongamos que V está definida sobre k. En este caso sabemos que $\widetilde{W}$ es isomorfa a V. Como V está parametrizada mediante la aplicación unirracional $\varphi(T) = h(T)/g(T)$, la imagen del abierto $\{g(T) \neq 0\} \subset \mathbb{F}^m$ en el que φ está definida contiene un abierto de Zariski de V. Como V es irreducible, la intersección de este abierto con el abierto A en el que la fibra de φ tiene cardinal constante es un abierto denso no vacío de Zariski de V. Correspondientemente, para todo ℓ, la imagen de $\{g^{\sigma_\ell} \neq 0\}$ contiene un abierto de Zariski de $V^{\sigma_\ell} = V$ en el que la fibra de la parametrización tiene cardinal constante. La intersección de todos estos abiertos es un abierto Ω de Zariski de $V = V \cap V^{\sigma_1} \cap \cdots \cap V^{\sigma_{d-1}}$. El abierto $\Omega \times \cdots \times \Omega \subset V \times \cdots \times V^{\sigma_{d-1}}$ determina un abierto (identificable con Ω) de la diagonal Δ del producto, que está contenido en la imagen del abierto de definición de Π, y en el que la fibra de esta parametrización tiene cardinal constante. Trasladando estos datos a la columna de la izquierda del cuadrado conmutativo de la sección anterior, encontramos un abierto de Zariski de $\widetilde{W}$ que está contenido en la imagen del abierto D_δ de definición de Φ, y en el que la fibra tiene cardinal constante. Por consiguiente $\Phi^{-1}(\widetilde{W})$ contiene un abierto de $Y \cap D_\delta \cap U$ en el que la restricción de Φ es un recubrimiento topológico de qd hojas del abierto $\psi^{-1}(\Delta \cap (\Omega \times \cdots \times \Omega)) \subset \widetilde{W}$ que, a su vez, es isomorfo al abierto Ω de V. Esto demuestra que a) implica b).

Como Φ restringido a $D_\delta \cap U$ es un recubrimiento topológico de qd hojas y envía Y en $\widetilde{W}$, la implicación de b) a c) es inmediata. Finalmente, que c) implica a) se sigue del Teorema 2.1. La última aseveración del enunciado se deduce del apartado b), ya que la composición de aplicaciones racionales es racional y, tanto Φ como ψ, tienen coeficientes en k. □

El abierto U puede ser, en general difícil de calcular (cf. [PS]), mientras que el cómputo de D_δ e Y es puramente mecánico, como resultado de su definición. Por eso, *denotaremos por VT (Variedad Testigo) al cierre de Zariski de $Y \cap D_\delta$.* Desgraciadamente —al contrario de lo que sucede en el caso de curvas estudiado en [ARS2]— la variedad testigo por si sola no nos sirve, en general, para certificar que V esté definida sobre k, ya que, si prescindimos de U en el enunciado anterior, el Teorema 4.2 no es cierto, como muestran los ejemplos 6.1 y 6.2 de la última sección. Puede suceder incluso que VT sea una variedad paramétrica sobre k, pero que V no sea ni siquiera k-definida (véase el ejemplo 6.1) No obstante, VT nos proporciona una condición necesaria para la racionalidad de V, como indica el resultado siguiente que es consecuencia directa de 4.2:

Corolario 4.3 *Si V está definida sobre k, entonces $Y \cap D_\delta$ contiene un abierto de dimensión* $\dim V$. □

En el caso de que la parametrización φ sea birracional, es decir, que se tenga la igualdad $\mathbb{F}(\varphi(T)) = \mathbb{F}(T)$ entre el cuerpo de funciones de V y el cuerpo de fracciones del anillo de polinomios $\mathbb{F}[T_1, \ldots, T_m]$, entonces la parametrización Φ define un isomorfismo en el abierto $D_\delta \cap U$, y el Teorema 4.2 puede precisarse un poco más:

Proposición 4.4 *Supongamos que φ define un isomorfismo birracional con V. Entonces la variedad V está definida sobre k si y sólo si VT tiene una componente irreducible que es k-birracional con V. Además, en este caso, V es reparametrizable sobre k si y sólo si VT tiene una componente irreducible parametrizable sobre k que es k birracional con V.*

Demostración. Si V está definida sobre k, sabemos, por el teorema, que la restricción $\Phi : Y \cap D_\delta \cap U \to \widetilde{W}$ define un recubrimiento topológico con tantas hojas como grado de φ, que, en este caso, es uno. Es decir sobre esta restricción, Φ define un isomorfismo algebraico. Como V es irreducible, la clausura de Zariski de $(Y \cap D_\delta \cap U)$ es una componente irreducible de VT, que es k birracional con V.

Recíprocamente, supongamos que VT tiene una componente que es k-birracional con V. Como VT está definida sobre k, también lo están sus componentes irreducibles, y, por consiguiente, V está, también, k-definida. Además una k-parametrización de V se traslada, por medio de la aplicación que define el isomorfismo, a la componente con la que es k-birracional; y viceversa, lo que prueba la segunda afirmación. □

5. Las α-hipercuádricas

Sea θ un automorfismo del cuerpo de funciones racionales en n variables

$$\theta : \mathbb{F}(T_1, \ldots, T_m) \to \mathbb{F}(T_1, \ldots, T_m)$$

que suponemos dado por la sustitución

$$T_1 = \theta_1(T_1, \ldots, T_m), \ldots, T_m = \theta_m(T_1, \ldots, T_m).$$

Supongamos que los coeficientes de las θ_j pertenecen a $L = k[\alpha]$ y desarrollemos cada una de las funciones racionales θ_j en función de la base:

$$\theta_j(T_1, \ldots, T_m) = \Sigma_{i=0}^{d-1} \theta_{ji}(T_1, \ldots, T_m)\alpha^i.$$

Definición 5.1 *Llamamos α-hipercuádrica a la variedad en $\mathbb{F}^{md}$ parametrizada por las componentes $\theta_{jk}(T_1, \ldots, T_m)$, $j = 1, \ldots, m$, $k = 0, \ldots, d-1$ de un automorfismo θ de $L(T_1, \ldots, T_m)$ en la base $\{1, \alpha, \ldots, \alpha^{d-1}\}$*

Esta definición tienen su origen en el trabajo [ARS1] en el caso de curvas. Veremos un ejemplo en 6.4. Con la ayuda de este concepto podemos precisar un poco el rastro de las parametrizaciones consideradas en la sección anterior.

Supongamos primero que $Y \cap D_\delta \cap U$ está parametrizado por $T_{ik} = \theta_{ik}(U_1, \ldots, U_m) \in k(U_1, \ldots, U_m)$, $i = 1, \ldots, n$, $k = 0, \ldots, d-1$. Componiendo con η y luego con φ tenemos que

$$\varphi(\eta(\theta(U))) := \varphi_1(\Sigma_{i=0}^{d-1}\theta_{1i}(U)\alpha^i), \ldots, \varphi_n(\Sigma_{i=0}^{d-1}\theta_{mi}(U)\alpha^i)$$

es una parametrización de V. Además, como el punto $(\theta_{(1)}(U), \ldots, \theta_{(m)}(U))$ está en VT, resulta que $\varphi_{ik}(\theta_{(1)}(U), \ldots, \theta_{(m)}(U)) = 0$ para todo $k > 0$, y, por la conmutatividad del diagrama, tenemos

$$\varphi(\eta(\theta(U))) = \psi(\Phi(\theta(U))) = (\varphi_{10}(U), \ldots, \varphi_{n0}(U))$$

con lo que obtenemos una parametrización de V con coeficientes en k. En otras palabras, la sustitución $T_j = \Sigma_{i=0}^{d-1}\theta_{ji}(U)\alpha^i$, $j = 1, \ldots, m$ transforma la parametrización dada en una parametrización sobre k.

Recíprocamente, supongamos que la parametrización dada de V, $\varphi(T)$, sea un isomorfismo birracional y que V es reparametrizable sobre k. Sea $\xi : \mathbb{F} \to V$ una parametrización racional de V. En particular, V está definida sobre k y $V = V^{\sigma_\ell}$, para todo ℓ. En este caso, la columna de la derecha en el diagrama correspondiente a la parametrización ξ, es

$$\Pi_\xi = \xi \times \cdots \times \xi : (\mathbb{F}^m)^d \to V^d : (s, s^{\sigma_1}, \ldots, s^{\sigma_{d-1}}) \to (\xi(s), \ldots, \xi(s^{\sigma_{d-1}}))$$

Los puntos de la diagonal del producto corresponden a los valores $s = s_1^{\sigma} = \cdots = s^{\sigma_{d-1}}$. Las parametrizaciones φ y ξ están relacionadas por un automorfismo del cuerpo de funciones racionales $\mathbb{F}(S_1, \ldots, S_m) \to \mathbb{F}(T_1, \ldots, T_m)$ que suponemos dado por la sustitución

$$T_1 = \theta_1(S_1, \ldots, S_m), \ldots, T_m = \theta_m(S_1, \ldots, S_m),$$

esto es, $\xi(S) = \varphi(\theta(S))$. Desarrollando cada una de las funciones racionales θ_j en función de la base:

$$\theta_j(S) = \Sigma_{i=0}^{d-1} \theta_{ji}(S)\alpha^i$$

resulta que

$$\begin{aligned} \eta(\theta_{10}(S), \ldots, \theta_{1(d-1)}(S); \ldots; \theta_{m0}(S), \ldots, \theta_{m(d-1)}(S)) = \\ = (\theta(S); \theta^{\sigma_1}(S), \ldots, \theta^{\sigma_{d-1}}(S)) \end{aligned}$$

para cada S, y Π envía estos puntos a la diagonal. En definitiva, encontramos que los coeficientes

$$T_{jk} = \theta_{jk}(S_1, \ldots, S_m) \in k(U_1, \ldots, U_m), \qquad i = 1, \ldots, m;\; k = 1, \ldots, d-1$$

del desarrollo del isomorfismo θ proporcionan una parametrización del abierto $Y \cap D_\delta \cap U$ de VT, en el que VT y $\widetilde{W}$ son isomorfas. Resumimos esto en el siguiente resultado:

Teorema 5.2 *Supongamos que la parametrización φ es birracional. Entonces:*

a) Si VT es k-parametrizable por, digamos, $T_{jk} = \theta_{jk}(U_1, \ldots, U_m) \in k(U_1, \ldots, U_m)$, una k-parametrización de V se obtiene a partir de esta parametrización por la sustitución $T_j = \Sigma_{i=0}^{d-1} \theta_{ji}(U)\alpha^i$

b) Si V es k-parametrizable, entonces VT tiene una componente k-parametrizable cuya parametrización viene dada por las componentes de un automorfismo de $L(T_1, \ldots, T_m)$ en la base $\{1, \alpha, \ldots, \alpha^{d-1}\}$.

Es decir V es k-parametrizable si y sólo si VT tiene una componente que es una α-hipercuádrica y en todas las demás la dimensión de la fibra de la parametrización φ no es genérica. □

Este teorema proporciona información que puede ser útil desde una perspectiva computacional para determinar si una variedad paramétrica es k-parametrizable o no, véase el ejemplo 6.2.

6. Ejemplos

Ejemplo 6.1 (Un plano que no es $\mathbb{Q}$-definible pero cuya variedad VT es otro plano $\mathbb{Q}$-parametrizable.) Sea α la raíz cuadrada de 2, y consideremos la siguiente parametrización, con coeficientes en $\mathbb{Q}[\alpha]$, del plano $V = \{z = \alpha x + y\}$ en $\mathbb{C}^3$:

$$\begin{cases} x(u,v) = u \\ y(u,v) = uv \\ z(u,v) = \alpha u + uv \end{cases}$$

Obviamente V no admite ecuaciones sobre $\mathbb{Q}$. Obsérvese que la parametrización es uno a uno en todos los puntos del plano V con $x \neq 0$, que la fibra del $(0,0,0)$ es todo el eje $u = 0$, y que no cubre los puntos con $\{x = 0, y \neq 0\}$. Sustituyendo las variables $u = u_0 + u_1\alpha$ y $v = v_0 + v_1\alpha$ resulta

$$\begin{cases} x(u_0,u_1,v_0,v_1) = u_0 + \alpha u_1 \\ y(u_0,u_1,v_0,v_1) = (u_0v_0 + 2u_1v_1) + \alpha(u_0v_1 + u_1v_0 \\ z(u_0,u_1,v_0,v_1) = (u_0v_0 + 2u_1 + 2u_1v_1) + \alpha(u_0 + u_0v_1 + u_1v_0) \end{cases}$$

Como no hay denominadores, tenemos $\delta = 1$, e Y coincide con VT. Sus ecuaciones se obtienen igualando a cero los coeficientes de α en la parametrización anterior, con lo que resulta el plano de $\mathbb{C}^4$ dado por $u_0 = u_1 = 0$. Por consiguiente, $\dim VT = \dim V$, pero V no es definible sobre $\mathbb{Q}$. La aparente contradicción con el Teorema 4.2 proviene de que VT está contenida en su totalidad en el conjunto de puntos donde la parametrización no tiene fibra finita, de modo que $VT \cap U = \emptyset$, donde U es el abierto del enunciado del teorema. Por otra parte, obsérvese que VT no es $\mathbb{Q}$-birracional con V, con lo que no hay contradicción con la Proposición 4.4.

Sustituyendo α por la raíz cúbica de 2, o más generalmente, por la raíz de orden d, obtenemos VT con dimensión d, lo que muestra que la dimensión de la variedad testigo puede ser arbitrariamente alta.

Ejemplo 6.2 (Un plano $\mathbb{Q}$-definible en el que VT tiene dos componentes de dimensiones distintas.) Sea ahora α la raíz cúbica de 2, y consideremos la parametrización siguiente, con coeficientes en $\mathbb{Q}[\alpha]$, del plano $V := \{z = x + y\}$ en $\mathbb{C}^3$:

$$\begin{cases} x(u,v) = \alpha u \\ y(u,v) = (\alpha + 2)uv \\ z(u,v) = \alpha u + (\alpha + 2)uv \end{cases}$$

De nuevo la parametrización es uno a uno en todos los puntos del plano V con $x \neq 0$, y la fibra sobre el punto $(0,0,0)$ es todo el eje $u = 0$. Las sustituciones respectivas $u = u_0 + u_1\alpha + u_2\alpha^2$ y $v = v_0 + v_1\alpha + v_2\alpha^2$ arrojan ahora como resultado las siguientes ecuaciones para $Y = VT$ (ya que, de nuevo $\delta = 1$ al no haber denominadores):

$$VT = \{u_0 = u_1 = 0, v_0 + v_2 = 0, v_1 + 2v_2 = 0\} \cup \{u_0 = u_1 = u_2 = 0\}$$

La segunda componente tiene dimensión 3 en $\mathbb{C}^6$ y está totalmente contenida en el cerrado de $\mathbb{C}^6$ en el que la parametrización no es un recubrimiento finito, por lo que no aporta información alguna sobre la V original. Sin embargo, la primera componente es un plano de dimensión 2 en $\mathbb{C}^6$ que sí interseca al abierto en el que la parametrización es un recubrimiento uno a uno y, de acuerdo con el Teorema 4.2, indica que la variedad V está definida sobre $\mathbb{Q}$. Además nos indica cómo reparametrizar V con coeficientes en $\mathbb{Q}$, según lo señalado en el Teorema 5.2: basta hacer $u_0 = u_1 = 0$, $v_0 = -v_2$ y $v_1 = -2v_2$ en los cambios formales anteriores, de modo que si ponemos: $u = \alpha^2 s$ y $v = (-1 - 2\alpha + \alpha^2)t$ resulta la parametrización racional

$$\begin{cases} x(s,t) = s \\ y(s,t) = -5st \\ z(s,t) = s - 5st \end{cases}$$

El siguiente ejemplo muestra cómo la inclusión del denominador δ en la definición de VT es esencial, aún en el caso de curvas.

Ejemplo 6.3 Sea α la raíz cuarta de 2, y consideremos la parametrización siguiente de una curva plana con coeficientes en $\mathbb{Q}[\alpha]$:

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{t-1} \\ \\ y(t) = \dfrac{\alpha t}{t-1} \end{cases}$$

que, obviamente, representa la recta $y = \alpha x$ en $\mathbb{C}^2$ y, por tanto, no admite ecuaciones sobre $\mathbb{Q}$. La sustitución de las variables $t = t_0 + t_1\alpha + t_2\alpha^2 + t_3\alpha^3$ y el cálculo posterior de δ e Y con Maple arroja el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} \delta \;=\; & 1 - 2\,{t_1}^4 + {t_0}^4 + 4\,{t_0}^3 - 16\,t_0\,t_1\,t_3 + 8\,{t_1}^2\,t_2\,t_0 - 16\,t_1\,{t_2}^2\,t_3 - 8\,t_1\,t_3\,{t_0}^2 + \\ & + 16\,t_2\,{t_3}^2\,t_0 - 4\,{t_2}^2 - 8\,t_1\,t_3 + 8\,{t_1}^2\,t_2 + 16\,t_2\,{t_3}^2 - 8\,{t_2}^2\,t_0 + \\ & + 8\,{t_1}^2\,{t_3}^2 - 4\,{t_2}^2\,{t_0}^2 + 4\,{t_2}^4 - 8\,{t_3}^4 + 4\,t_0 + 6\,{t_0}^2 \end{aligned}$$

mientras que Y es la variedad definida por los ceros de los siguientes 6 polinomios:

$$\begin{aligned} f_1 \;=\; & -16\,{t_3}^4 + 6\,{t_0}^3 - 4\,{t_2}^2 - 4\,{t_1}^4 + 8\,{t_2}^4 + 2\,t_0 - 32\,t_1\,{t_2}^2\,t_3 + 2\,{t_0}^4 + \\ & + 16\,{t_1}^2\,t_2\,t_0 - 16\,t_1\,t_3\,{t_0}^2 + 32\,t_2\,{t_3}^2\,t_0 - 24\,t_0\,t_1\,t_3 + 12\,{t_1}^2\,t_2 + \\ & + 16\,{t_1}^2\,{t_3}^2 + 24\,t_2\,{t_3}^2 - 8\,{t_2}^2\,{t_0}^2 - 8\,t_1\,t_3 - 12\,{t_2}^2\,t_0 + 6\,{t_0}^2 \end{aligned}$$

$$f_2 = 4\,t_0\,t_1 - 8\,t_2\,t_3 + 4\,t_1\,{t_2}^2 - 4\,{t_1}^2\,t_3 + 2\,{t_0}^2\,t_1 + 2\,t_1 + 8\,{t_3}^3 - 8\,t_0\,t_2\,t_3$$

$$f_3 = 8\,t_2\,t_1\,t_3 - 2\,{t_1}^2 + 2\,t_2 - 4\,{t_2}^3 - 4\,{t_3}^2 + 4\,t_2\,t_0 - 2\,t_0\,{t_1}^2 + 2\,t_2\,{t_0}^2 - 4\,{t_3}^2\,t_0$$

$$f_4 = 4\,t_0\,t_1 - 8\,t_2\,t_3 + 4\,t_1\,{t_2}^2 - 4\,{t_1}^2\,t_3 + 2\,{t_0}^2\,t_1 + 2\,t_1 + 8\,{t_3}^3 - 8\,t_0\,t_2\,t_3$$

$$f_5 = 8\,t_2\,t_1\,t_3 - 2\,{t_1}^2 + 2\,t_2 - 4\,{t_2}^3 - 4\,{t_3}^2 + 4\,t_2\,t_0 - 2\,t_0\,{t_1}^2 + 2\,t_2\,{t_0}^2 - 4\,{t_3}^2\,t_0$$

$$f_6 = 2\,t_3 + 2\,t_3\,{t_0}^2 - 4\,t_1\,t_2\,t_0 - 4\,t_1\,{t_3}^2 + 4\,{t_2}^2\,t_3 - 4\,t_1\,t_2 + 2\,{t_1}^3 + 4\,t_3\,t_0$$

Puede comprobarse que Y contiene el siguiente plano de $\mathbb{C}^4$:

$$\begin{cases} t_0 + \alpha t_1 + \alpha^2 t_2 + \alpha^3 t_3 = 0 \\ t_0 + \alpha_1 t_1 + \alpha_1^2 t_2 + \alpha_1^3 t_3 = 0 \end{cases}$$

así como a sus conjugados. El mismo ejemplo, tomando α de grado d arbitrariamente alto, da lugar a la correspondiente Y con dimensión $d-2$. Sin embargo, es fácil comprobar que estos planos están contenidos en los ceros de δ, de modo que $Y \cap D_\delta = \{(0,0,0,0)\}$ demostrando que, efectivamente, V no está definida sobre $\mathbb{Q}$.

Ejemplo 6.4 (Un ejemplo de una hipercuádrica de dimensión 2).
Sea $\alpha = \sqrt[3]{2}$ y consideremos la superficie parametrizada por

$$\begin{cases} x(u,v) = -\dfrac{\alpha u^2 - \alpha^2 uv}{v} \\ y(u,v) = u - \alpha v \\ z(u,v) = \dfrac{\alpha^2 u^2}{v^2} \end{cases}$$

Efectuando las sustituciones $u = u_0 + u_1\alpha + u_2\alpha^2$ y $v = v_0 + v_1\alpha + v_2\alpha^2$ en $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ y normalizando, se obtiene el denominador

$$\delta = (4v_2^3 - 6v_2v_1v_0 + v_0^3 + 2v_1^3)^2,$$

así como las seis polinomios en $\mathbb{Q}[u_0,u_1,u_2,v_0,v_1,v_2]$, que definen Y, y que corresponden a los coefficientes de α y α^2 de los numeradores de $x(u_0+u_1\alpha+u_2\alpha^2, v_0+v_1\alpha+v_2\alpha^2)$, $y(u_0+u_1\alpha+u_2\alpha^2, v_0+v_1\alpha+v_2\alpha^2)$ y $z(u_0+u_1\alpha+u_2\alpha^2, v_0+v_1\alpha+v_2\alpha^2)$, después de ser normalizadas.

Utilizando Maple y el programa de software simbólico para geometría algebraica C.A.S.A. (http://www.risc.uni-linz.ac.at/research/software/casa/casa.html) se deduce que la variedad testigo VT contiene una componente W de dimensión 2 (véase Figura 1), cuyas ecuaciones implícitas son

$$-u_0u_1 + 2u_2^2 = 0, v_0 - u_1 = 0, v_1 - u_2 = 0, u_0v_2 - u_1u_2 = 0, 2u_2v_2 - u_1^2 = 0,$$

y que está parametrizada por la expresión

$$\begin{cases} u_0 = s \\ u_1 = 2t^2/s \\ u_2 = t \end{cases} \qquad \begin{cases} v_0 = 2t^2/s \\ v_1 = t \\ v_2 = 2t^3/s^2 \end{cases}$$

Esto certifica que la superficie está definida sobre $\mathbb{Q}$. En efecto, la sustitución

$$\begin{cases} u = s + \frac{2t^2}{s}\alpha + t\alpha^2 \\ v = \frac{2t^2}{s} + t\alpha + \frac{2t^3}{s^2}\alpha^2 \end{cases}$$

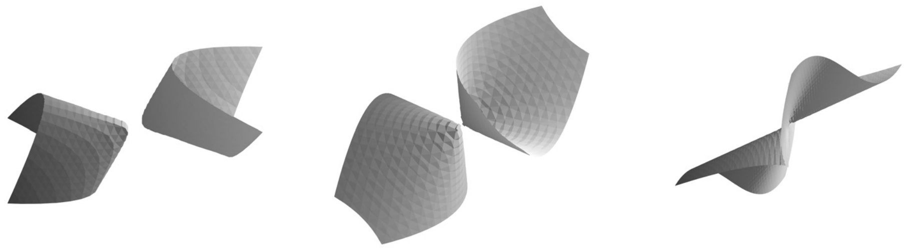

Figura 1: Proyección de W sobre el espacio $u_0u_1u_2$ (izquierda), sobre el espacio $v_0v_1v_2$ (centro), sobre el espacio $u_0v_1v_2$ (derecha).

transforma la parametrización dada en la parametrización racional

$$\begin{cases} x(s,t) = \frac{s^3-4t^3}{st} \\ y(s,t) = \frac{s^3-4t^3}{s^2} \\ z(s,t) = \frac{s^2}{t^2} \end{cases}$$

que representa el paraguas de Whitney $x^2 - zy^2 = 0$ (véase Figura 2).

La sustitución anterior es en realidad un cambio de variables, esto es, un isomorfismo de $\mathbb{C}(u,v)$ en $\mathbb{C}(s,t)$ como se comprueba fácilmente despejando s y t en función de u y v. Por tanto VT, es una α-hipercuádrica asociada a dicho cambio.

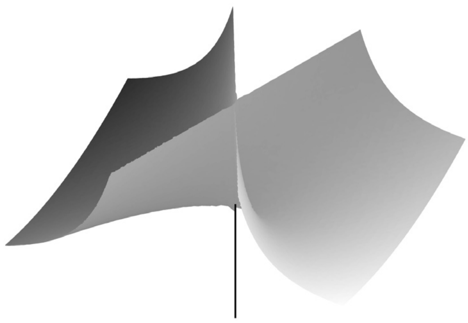

Figura 2: Paraguas de Whitney $x^2 - zy^2 = 0$.

Referencias

[Al] C. Alonso: *Desarrollo, análisis e implementación de algoritmos para la manipulación de variedades paramétricas.* Tesis Doctoral, Univ. de Cantabria 1993.

[AGR] C. Alonso, J. Gutierrez, T. Recio: *A rational function decomposition algorithm by near-separated polynomials.* J. Symbolic Computation, **19** (1995), 527–544.

[ARS1] C. Andradas, T. Recio, J.R. Sendra: *A relatively optimal reparametrization algorithm.* Proc. ISSAC 1997, 349–356, ACM Press (1997).

[ARS2] ________: *Base field restriction techniques for parametric curves.* Proc. ISSAC 1999, 17–22, ACM Press (1999).

[BCR] J. Bochnak, M. Coste, M.-F. Roy: *Real algebraic geometry.* Ergeb. Math. Greuzgeb, (3) **36,** Springer Verlag, Berlin 1998.

[PSS] S. Pérez-Díaz, J. Schicho, J.R. Sendra: *Properness and inversion of rational parametrizations of surfaces.* Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing, **13** (2002), 29–51.

[PS] S. Pérez-Díaz, J.R. Sendra: *Computation of the degree of rational surface parametrizations.* J. Pure and Applied Alg., en prensa (2004).

[RS1] T. Recio, J.R. Sendra: *Real reparametrizations of real curves.* J. Symbolic Computation, **23** (1997), 241–254.

[RS2] ________: *A really elementary proof of real Lüroth's theorem.* Rev. Mat. Univ. Complutense de Madrid, **10** (1997, número Suplementario), 283–290.

[RSV] T. Recio, J.R. Sendra, C. Villarino: *From hypercircles to units.* Proc. ISSAC 2004. ACM Press, en prensa.

[Schi1] J. Schicho: *Rational parametrization of real algebraic surfaces.* Proc. ISSAC 1998, 302–308, ACM Press.

[Schi2] ________: *A degree bound for the parametrization of a rational surface.* J. Pure and Applied Alg., **145** (1999), 91–105.

[Schi3] ________: *Simplification of surface parametrizations.* Proc. ISSAC 2002, 229–237, ACM Press.

[Sed] T.W. Sederberg: *Improperly parametrized rational curves.* Computer Aided Geometric Design, **3** (1986), 67–75.

[Sh] I.R. Shafarevich: *Basic algebraic geometry*, vol. I, II. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1994.

[SW] J.R. Sendra, F. Winkler: *Tracing index of rational curve parametrizations.* Computer Aided Geometric Design, **18** (2001), 771–795.

[Tab] L.F. Tabera: *Geometría algebraica de las extensiones y contracciones de cuerpos.* Tesina de Licenciatura, Univ. de Cantabria. (2003).

[Weil] A. Weil: *Adèles et groupes algebriques.* Seminaire Bourbaki, **186,** 1959.