Propiedades $(BB)_n$ y topologías en $\mathcal{P}(^nE)$

José M. Ansemil, Fernando Blasco y Socorro Ponte

Departamento de Análisis Matemático
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
28040-Madrid, Spain
JM_Ansemil@mat.ucm.es

Departamento de Matemática Aplicada a los Recursos Naturales
E.T.S.I. Montes
Universidad Politécnica de Madrid
28040-Madrid, Spain
fblasco@montes.upm.es

Departamento de Análisis Matemático
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
28040-Madrid, Spain
Socorro_Ponte@mat.ucm.es

Dedicado a Enrique Outerelo con motivo de su jubilación

ABSTRACT

Properties $(BB)_n,\ n = 2, 3, ...$ on a locally convex space (see the definition below) have been recently introduced ([10]). They are interesting, among other things, in connection with the study of natural topologies on spaces of polynomials, multilinear and holomorphic mappings. As it is proved in [1] there are Fréchet spaces with the $(BB)_2$ property but without the $(BB)_3$ property. Here, for a given $n = 3, ...$ we get an space without the property $(BB)_{n+1}$ and study an equivalent condition for that space to have the $(BB)_n$ property.

2000 Mathematics Subject Classification: 46A03, 46A32, 46G20.
Key words: Tensor product, spaces of polynomials.

1. Introducción

Consideremos un espacio localmente convexo E y sea n un número natural mayor o igual que 2. Se dice que E tiene la propiedad $(BB)_n$ si todo acotado de la compleción del producto tensorial proyectivo de E por sí mismo n veces está contenido en la envoltura equilibrada, convexa y cerrada de un n-producto tensorial de acotados de E, acotados que pueden suponerse iguales; es decir, E tiene la propiedad $(BB)_n$ si para todo acotado B de $\widehat{\otimes}_\pi^n E$ existe un acotado D de E tal que $B \subset \overline{\Gamma(\otimes^n D)}$. Cuando esto mismo ocurre para los acotados de la compleción del producto tensorial proyectivo simétrico diremos que E tiene la propiedad $(BB)_{n,s}$. Se dice que la n-upla $(E_1, \ldots, E_n)$ de espacios localmente convexos tiene la propiedad (BB) si todo acotado de $E_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi E_n$ está contenido en la envoltura convexa y cerrada de un n-producto tensorial de acotados, cada uno de ellos de un E_i. La propiedad $(BB)_n$ implica la $(BB)_{n,s}$ y es un problema abierto el saber si la propiedad $(BB)_{n,s}$ implica la $(BB)_n$. Las propiedades $(BB)_n$ y $(BB)_{n,s}$ implican las propiedades $(BB)_m$ y $(BB)_{m,s}$ respectivamente, para todo $m \leq n$, pero no parece natural que eso ocurra también para $m > n$. De hecho no es cierto y eso fue probado en [1] para $n = 2$. En ese trabajo se construye un ejemplo de un espacio que tiene la propiedad $(BB)_2$ y no tiene ni siquiera la $(BB)_{3,s}$. Nuestro objetivo aquí es el dar, para cada $n \geq 3$, un ejemplo de un espacio que no tenga la propiedad $(BB)_{n+1}$ e indicar un posible camino para intentar probar que ese espacio tiene la propiedad $(BB)_n$.

La obtención de esto tendría interés para profundizar en la resolución de un problema, ya clásico, relativo a topologías naturales en los espacios de polinomios del que hablaremos a continuación.

2. Las propiedades $(BB)_n$ y las topologías en $\mathcal{P}(^nE)$

Introducimos ahora las topologías localmente convexas naturales en los espacios de polinomios n homogéneos continuos, $\mathcal{P}(^nE)$, en un espacio localmente convexo E, que vamos a considerar y que, como veremos están relacionadas con la propiedad $(BB)_n$ definida en la introducción: Éstas son, la clásica topología compacto-abierta τ_o definida por las seminormas que asignan a cada elemento de $\mathcal{P}(^nE)$ su supremo en un compacto de E, la de la convergencia uniforme τ_b cuyas seminormas se definen como en el caso anterior pero ahora tomando supremos sobre acotados, la topología fuerte β considerando a $\mathcal{P}(^nE)$ como el dual del espacio $\widehat{\otimes}_{s,\pi}^n E$ (véase [16]) y finalmente la topología portada de Nachbin τ_ω, definida por las seminormas p portadas por el 0 de E: Una seminorma p en $\mathcal{P}(^nE)$ está portada por el 0 si para todo entorno abierto V de 0 existe una constante $C > 0$ tal que $p(P) \leq C \sup\{|P(x)| : x \in V\}$ para todo $P \in \mathcal{P}(^nE)$. Pueden darse definiciones análogas para espacios de aplicaciones n-lineales en E, $\mathcal{L}(^nE)$.

Por mucho tiempo no se supo si estas topologías eran independientes del grado del polinomio, en el sentido de que si, dos de ellas coinciden en $\mathcal{P}(^nE)$ para un cierto n, ¿deben coincidir en $\mathcal{P}(^mE)$ para todo m? El espacio de Fréchet-Montel E obtenido en [3] tiene la propiedad de que $\tau_o = \tau_\omega$ en $\mathcal{P}(^1E)$, y sin embargo $\tau_o \neq \tau_\omega$ en $\mathcal{P}(^nE)$ para todo $n \geq 2$. Para el caso de $n = 2$, como ya se mencionó, el espacio considerado en [1] tiene la propiedad de que $\tau_b = \beta$ en $\mathcal{P}(^2E)$ y $\tau_b \neq \beta$ en $\mathcal{P}(^nE)$ para todo $n \geq 3$.

Este último espacio E es el producto cartesiano de l_{2p+}, con $1 < p < 2$, por el dual de un cierto espacio de Banach X_p de cotipo 2, que es un subespacio de un cociente de un $L_p(\mu)$, véase [7], y que tiene la propiedad de que el par (l_{p+}, X'_p) no tiene la propiedad (BB), véase [7, Example 9]. Recordamos que para un número real $q \geq 1$, $l_{q+} = \cap_m l_{q+\frac{1}{m}}$, y este espacio se considera dotado de la topología localmente convexa natural de esa intersección, con ella l_{q+} es un espacio de Fréchet casinormable.

Parece natural tratar de adaptar nuestro contraejemplo en [1] para, dado un $n \geq 3$, obtener un espacio de Fréchet con la propiedad $(BB)_n$ pero sin la propiedad $(BB)_{n+1,s}$. El candidato natural, para un $n \geq 3$ dado, es el espacio $E_n = l_{np+} \times X'_p$ con $1 < p < 2$. Se tiene el siguiente

Teorema 1 El espacio de Fréchet $E_n = l_{np+} \times X'_p$ con $1 < p < 2$, no tiene $(BB)_{n+1,s}$.

Demostración. Utilizaremos en primer lugar el hecho de que l_{p+} es isomorfo a un subespacio complementado de $\widehat{\otimes}^n_{\pi,s} l_{np+}$ mediante la aplicación

$$(x_j) \mapsto \sum_{j=1}^{\infty} x_j \otimes^n e_j$$

(véase [1, Proposition 3.2]). Por otra parte consideremos el siguiente isomorfismo obtenido en [2]:

$$\widehat{\otimes}^{n+1}_{\pi,s} \left(l_{np+} \times X'_p\right) \cong$$
$$\left(\widehat{\otimes}^{n+1}_{\pi,s} l_{np+}\right) \times \left[\left(\widehat{\otimes}^{n}_{\pi,s} l_{np+}\right) \widehat{\otimes}_\pi X'_p\right] \times \cdots \times \left[l_{np+} \widehat{\otimes}_\pi \left(\widehat{\otimes}^{n}_{\pi,s} X'_p\right)\right] \times \left(\widehat{\otimes}^{n+1}_{\pi,s} X'_p\right).$$

Se deduce de él que $\left(\widehat{\otimes}^{n}_{\pi,s} l_{np+}\right) \widehat{\otimes}_\pi X'_p$, que es uno de los términos de ese producto, es isomorfo a un subespacio complementado de $\widehat{\otimes}^{n+1}_{\pi,s}(l_{np+} \times X'_p)$ y como l_{p+} lo es de $\widehat{\otimes}^{n}_{\pi,s} l_{np+}$ resulta que $l_{p+} \widehat{\otimes}_\pi X'_p$ es isomorfo a un subespacio complementado de $\left(\widehat{\otimes}^{n}_{\pi,s} l_{np+}\right) \widehat{\otimes}_\pi X'_p$ y por lo tanto de $\widehat{\otimes}^{n+1}_{\pi,s}(l_{np+} \times X'_p)$. Si suponemos que $E_n = l_{np+} \times X'_p$ tiene la propiedad $(BB)_{n+1,s}$ resulta que el par (l_{p+}, X'_p) tendrá la propiedad (BB) y, como ya se indicó, ha sido probado en [7, Example 9], que eso no es cierto. Luego E_n no tiene la propiedad $(BB)_{n+1,s}$ y por lo tanto tampoco tiene la $(BB)_{n+1}$. $\square$

Vamos a obtener ahora una condición equivalente a la de que el espacio $E_n = l_{np+} \times X'_p$ tenga la propiedad $(BB)_n$.

Para ver si E_n tiene la propiedad $(BB)_n$ se necesita comprobar que todo acotado B de $\widehat{\otimes}^n_\pi E_n$ está contenido en $\overline{\Gamma(\otimes^n C)}$ para algún acotado C de E_n. Se verifica que:

$$\begin{aligned}\widehat{\otimes}_\pi^n(l_{np+} \times X_p') \quad \cong \quad & \left(\widehat{\otimes}_\pi^n l_{np+}\right) \times \\ & \ldots \\ & \left(\widehat{\otimes}_\pi^k l_{np+}\right) \widehat{\otimes}_\pi \left(\widehat{\otimes}_\pi^{n-k} X_p'\right) \times \\ & \ldots \\ & \left(\widehat{\otimes}_\pi^n X_p'\right).\end{aligned}$$

Tenemos tres clases de productos tensoriales. Al ser X_p' un espacio de Banach, X_p' tiene la propiedad $(BB)_n$ (lo que se sigue directamente de resultados de Grothendieck [13]).

Los otros dos tipos se pueden reducir a uno sólo como vemos a continuación.

Representemos por $F_1, F_2, ..., F_n$ a n espacios de Fréchet donde cada uno de ellos es uno de los espacios l_{np+} o X_p'. Estamos interesados en saber si $(F_1, F_2, ..., F_n)$ tiene la propiedad (BB). De la propia definición de la propiedad (BB) se sigue que $(F_1, F_2, ..., F_n)$ tiene esta propiedad si y sólo si en $\left(F_1 \widehat{\otimes}_\pi F_2 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi F_n\right)'$ la topología τ_b de la convergencia uniforme en las envolturas absolutamente convexas de productos tensoriales de acotados de los F_i coincide con la topología fuerte β de espacio dual.

Para intentar obtener la verificación de esta condición podemos usar el siguiente resultado de [6, Lemma 4.1]: Si $\mathcal{A}$ es una familia saturada de acotados de un espacio de Fréchet F y denotamos por $\tau_{\mathcal{A}}$ la topología de la convergencia uniforme en los elementos de $\mathcal{A}$; entonces si $(F', \tau_{\mathcal{A}})$ es un espacio DF y tiene una sucesión fundamental de acotados metrizables, resulta que $\tau_{\mathcal{A}}$ coincide con la topología fuerte en F'. Se aplica este resultado al espacio de Fréchet $F_1 \widehat{\otimes}_\pi F_2 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi F_n$, tomando como $\mathcal{A}$ la familia de los acotados de la forma $\overline{\Gamma(B_1 \otimes B_2 \otimes \cdots \otimes B_n)}$, siendo B_i acotado de F_i, para $i = 1, ..., n$, con lo que $\tau_{\mathcal{A}} = \tau_b$.

Entonces, para saber si $\tau_b = \beta$ en $\left(F_1 \widehat{\otimes}_\pi F_2 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi F_n\right)'$ nos bastaría con ver si $\left(\left(F_1 \widehat{\otimes}_\pi F_2 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi F_n\right)', \tau_b\right)$ es un espacio DF y tiene una sucesión fundamental de acotados metrizables. De hecho estas dos condiciones juntas equivalen a la de que $\tau_b = \beta$ en $\left(F_1 \widehat{\otimes}_\pi F_2 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi F_n\right)'$. En efecto, si ocurre esto, $\left(\left(F_1 \widehat{\otimes}_\pi F_2 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi F_n\right)', \tau_b\right)$ es un espacio DF, pues es el dual fuerte de un espacio de Fréchet, y por otra parte, para los espacios particulares F_i que estamos considerando, $F_1 \widehat{\otimes}_\pi F_2 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi F_n$ tiene la propiedad (DC) (la definición de esta propiedad puede verse en [5]), lo que se sigue de [12, Proposition 7], teniendo en cuenta que estamos manejando espacios con la propiedad (DC) tales que $(F_1, ..., F_n)$ tiene la propiedad (BB), y por lo tanto su dual fuerte $\left(\left(F_1 \widehat{\otimes}_\pi F_2 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi F_n\right)', \tau_b\right)$ tiene una sucesión fundamental de acotados metrizables [4, Theorem 1.2].

Supondremos a partir de ahora que todas las $(n-1)-$uplas formadas por los F_i tienen la propiedad (BB), obsérvese que esto es cierto para $n = 3$; en este caso las $(3-1)$-uplas son (l_{np+}, l_{np+}), que tiene (BB), (véase [7, Example 11]) y $(l_{np+}, X_p^{'})$ que también tiene esa propiedad, (véase [7, Proposition 2]). Entonces $\left(\left(F_1\widehat{\otimes}_\pi F_2\widehat{\otimes}_\pi\cdots\widehat{\otimes}_\pi F_n\right)', \tau_b\right)$ tiene, para nuestros espacios F_i particulares, una sucesión fundamental de acotados metrizables. En efecto:

$$\left(\left(F_1\widehat{\otimes}_\pi F_2\widehat{\otimes}_\pi\cdots\widehat{\otimes}_\pi F_n\right)', \tau_b\right) \cong \mathcal{L}_b(F_1, F_2, ..., F_{n-1}, F_n) \cong$$

$$\mathcal{L}_b(F_1, F_2, ..., F_{n-1}; (F_n^{'}, \beta)) \cong \mathcal{L}_b(F_1\widehat{\otimes}_\pi F_2\widehat{\otimes}_\pi\cdots\widehat{\otimes}_\pi F_{n-1}; (F_n^{'}, \beta))$$

y en este punto podemos aplicar [4, Proposition 1.6]: Si F es un espacio metrizable con la (DC) y G es un espacio localmente convexo con una sucesión fundamental de acotados metrizables, entonces $\mathcal{L}_b(F, G)$ tiene también una sucesión fundamental de acotados metrizables. Esto puede aplicarse en nuestro caso pues se satisfacen las hipótesis requeridas en todas las posibles situaciones con los espacios l_{np+} o X'_p (recordamos que los productos tensoriales proyectivos de nuestros $n-1$ espacios particulares tienen la propiedad (DC) al tenerla cada uno de ellos y haber supuesto que las $(n-1)$-uplas de los F_i tienen la propiedad (BB), (véase [12, Proposition 7]) y que $(F_n^{'}, \beta)$ tiene una sucesión fundamental de acotados metrizables al tener F_n la propiedad (DC)).

Se ha demostrado así el siguiente

Teorema 2 El espacio $E_n = l_{np+} \times X'_p$ tiene la propiedad $(BB)_n$ si y sólo si los espacios duales $\left(\left(F_1\widehat{\otimes}_\pi F_2\widehat{\otimes}_\pi\cdots\widehat{\otimes}_\pi F_n\right)', \tau_b\right)$ son de tipo DF siendo los F_i iguales a l_{np+} o $X_p^{'}$ y suponiendo que cualquier $(n-1)$-upla de los F_i tiene la propiedad (BB).

Dado que esta última condición se cumple si $n = 3$ se tiene el siguiente:

Corolario El espacio $E_3 = l_{3p+} \times X'_p$ tiene la propiedad $(BB)_3$ si y sólo si los espacios
$\left(\left(F_1\widehat{\otimes}_\pi F_2\widehat{\otimes}_\pi F_3\right)', \tau_b\right)$ son de tipo DF siendo los F_i iguales a l_{np+} o $X_p^{'}$.

Observación Supongamos $n = 3$. Para algún $p \in (1, 2)$ el espacio l_{3p+} puede ser también de la forma l_{2q+} con $q \in (1, 2)$, por ejemplo, para $p = \frac{7}{6}$ resulta que $3 \times \frac{7}{6} = 3.5 = 2 \times \frac{7}{4}$. Luego nuestro espacio $l_{3.5+}$ es también de la forma l_{2q+} con $q = \frac{7}{4} \in (1, 2)$ y parece que el espacio $l_{3.5+} \times X_p^{'}$ no debería tener la propiedad $(BB)_3$, de acuerdo con nuestro resultado en [1]. No obstante, como ya hemos advertido, el espacio X'_p que se considera depende de p y nosotros sabemos que $E = l_{2q+} \times X'_q$, con el X_q correspondiente a $q = \frac{7}{4}$ no tiene $(BB)_3$ pero no sabemos qué ocurre con el X_p correspondiente a $p = \frac{7}{6}$.

Establecemos ahora un resultado que proporciona algunas condiciones equivalentes a la de que $\left(\left(\widehat{\otimes}^n_\pi l_{np+}\right)', \tau_b\right)$ sea un espacio de tipo DF para $n = 3$, lo que está relacionado con el Corolario anterior para el caso $F_i = l_{np+}, i = 1, 2, 3$.

Teorema 3 Para todo número real q, mayor o igual que 3, las siguientes condiciones son equivalentes:

1) $\left(\left(\widehat{\otimes}^3_\pi l_{q+}\right)', \tau_b\right)$ es un espacio DF

2) $(\mathcal{L}(^3l_{q+}), \tau_b)$ es reflexivo

3) $(\mathcal{L}(^3l_{q+}), \tau_b)$ es tonelado

4) $(\mathcal{L}(^3l_{q+}), \tau_b)$ es bornológico.

Demostración. (1) $\Longrightarrow$ (2). Es conocido (véase [15, Theorem 15.4.2]) que

$$\widehat{\otimes}^3_\pi l_{q+} = \lim_{\substack{\longleftarrow \\ m}} \widehat{\otimes}^3_\pi l_{q+\frac{1}{m}}$$

siendo el límite reducido. Puesto que $q \geq 3$,

$$\frac{3}{q + \frac{1}{m}} < 1,$$

y resultados de [8] nos dan que $\widehat{\otimes}^3_\pi l_{q+\frac{1}{m}}$ es reflexivo para todo m y entonces $\widehat{\otimes}^3_\pi l_{q+}$ es reflexivo. Como consecuencia lo es su dual fuerte. De la demostración del Teorema 2 se deduce que $(\mathcal{L}(^3l_{q+}), \tau_b)$ tiene una sucesión fundamental de acotados metrizables, y como es DF, se sigue de [6, Lemma 4.1] que $\tau_b = \beta$ y por lo tanto $(\mathcal{L}(^3l_{q+}), \tau_b)$ es reflexivo.

(2) $\Longrightarrow$ (3) En general, reflexivo implica tonelado.

(3) $\Longrightarrow$ (4) Si $(\mathcal{L}(^3l_{q+}), \tau_b)$ es tonelado, entonces $\tau_b = \tau_\omega$ en $\mathcal{L}(^3l_{q+})$ (pues l_{q+} es metrizable, [9, Proposition 3.41]), luego $(\mathcal{L}(^3l_{q+}), \tau_b)$ es incluso ultrabornológico, pues esta propiedad la tiene la topología τ_ω que, en $\mathcal{L}(^3l_{q+})$ puede describirse como un límite inductivo de espacios de Banach, de manera análoga a como se hace para espacios de polinomios.

(4) $\Longrightarrow$ (1) Si $(\mathcal{L}(^3l_{q+}), \tau_b)$ es bornológico entonces $\tau_b = \tau_\omega$ en $\mathcal{L}(^3l_{q+})$ con lo que $\tau_b = \beta$ en $\mathcal{L}(^3l_{q+})$. En consecuencia $\left(\left(\widehat{\otimes}^3_\pi l_{3p+}\right)', \tau_b\right)$ es el dual fuerte del espacio de

Fréchet $\widehat{\otimes}_\pi^3 l_{q+}$ y por lo tanto es un espacio DF. □

Corolario Si se verifican las condiciones equivalentes del teorema anterior entonces $(\mathcal{P}(^3l_{q+}), \tau_b)$ es también reflexivo.

En efecto, $(\mathcal{P}(^3l_{q+}), \tau_b)$ es un subespacio complementado de $(\mathcal{L}(^3l_{q+}), \tau_b)$.

Por último obtenemos un resultado relativo a la reflexividad de $(\mathcal{L}(^nl_{q+}), \beta)$ con n natural arbitrario:

Teorema 4 Si $n \leq q$, $(\mathcal{L}(^nl_{q+}), \beta)$ es reflexivo y si $n > q$, $(\mathcal{L}(^nl_{q+}), \beta)$ no es reflexivo.

Demostración. Para $n \leq q$ se tiene que $\frac{n}{q+\frac{1}{m}} < 1$ y resultados de [14] para $n = 2$ y de [8] para $n \geq 2$, implican que

$$\varprojlim_{m} l_{q+\frac{1}{m}} \widehat{\otimes}_\pi \overset{n}{\cdots} \widehat{\otimes}_\pi l_{q+\frac{1}{m}}$$

es reflexivo. Luego su dual fuerte, que es $(\mathcal{L}(^nl_{q+}), \beta)$, es también reflexivo.

Supongamos ahora que $n > q$. Para m grandes $\frac{n}{q+\frac{1}{m}} > 1$ y entonces l_1 está complementado en $l_{q+\frac{1}{m}} \widehat{\otimes}_\pi \overset{n}{\cdots} \widehat{\otimes}_\pi l_{q+\frac{1}{m}}$. Esto implica que l_∞ está complementado en $(\mathcal{L}(^nl_{q+}), \beta)$, por lo tanto ese espacio no puede ser reflexivo. □

Puede observarse que de la forma en que l_1 está complementado en el espacio $l_{q+\frac{1}{m}} \widehat{\otimes}_\pi \overset{n}{\cdots} \widehat{\otimes}_\pi l_{q+\frac{1}{m}}$ se deduce que l_∞ también está complementado en $(\mathcal{L}(^nl_{q+}), \tau_b)$ y por lo tanto $(\mathcal{L}(^nl_{q+}), \tau_b)$ tampoco es reflexivo si $n > q$. Con demostraciones similares se obtienen resultados análogos para $\mathcal{P}(^nl_{q+})$.

Referencias

[1] J.M. Ansemil, F. Blasco, S. Ponte: *(BB) properties on Fréchet spaces.* Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **25** (2000), 307–316.

[2] J.M. Ansemil, K. Floret: *The symmetric tensor product of a direct sum of locally convex spaces.* Studia Math. **129** (1998), 285–295.

[3] J.M. Ansemil, J. Taskinen: *On a problem of topologies infinite dimensional holomorphy.* Arch. Math. (Basel) **54** (1990), 61–64.

[4] K.D. Bierstedt, J. Bonet: *Density conditions in Fréchet and (DF) spaces.* Rev. Mat. Complutense **2** (1989), 59–75.

[5] ________: *Stefan Heinrich's density condition for Fréchet spaces.* Math. Nachr. **135** (1988), 149–180.

[6] J. Bonet, J.C. Díaz, J. Taskinen: *Tensor stable Fréchet and (DF)-spaces.* Collect. Math. **42**, 3 (1991), 199–236.

[7] A. Defant, A. Peris: *Maurey's extension theorem and Grothendieck's "problème des topologies".* J. London Math. Soc. **58** (1998), no.2, 679–696.

[8] V. Dimant, I. Zalduendo: *Bases in spaces of multilinear forms over Banach spaces.* J. Math. Anal. Appl. **200** (1996), no.3, 548–566.

[9] S. Dineen: *Complex analysis in locally convex spaces.* North–Holland Math. Studies **57**, Amsterdam 1981.

[10] ________: *Holomorphic functions and the (BB) property.* Math. Scand. **74** (1994), 215–236.

[11] ________: *Complex analysis on infinite dimensional spaces.* Springer-Verlag Monograph Series, 1999.

[12] ________: *Holomorphic functions on Fréchet–Montel spaces.* J. Math. Anal. Appl. **163**, 2 (1992), 581–587.

[13] A. Grothendieck: *Produits tensoriels topologiques et espaces nucleaires.* Memoirs AMS **16** (1955).

[14] J.R. Holub: *Hilbertian operators and reflexive tensor products.* Pacific J. Math. **36** (1971), 185–194.

[15] J. Jarchow: *Locally convex spaces.* B.G. Teubner, Stuttgart, 1981.

[16] R. Ryan: *Applications of topological tensor products to infinite dimensional holomorphy.* Ph.D. Thesis, Trinity College, Dublin, 1980.