La correspondencia de Serre hecha a mano

Enrique Arrondo

Departamento de Álgebra
Facultad de de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
28040 Madrid
Enrique_Arrondo@mat.ucm.es

A Enrique I, de Enrique II, con mucho cariño.

ABSTRACT

En esta nota explicamos cómo, usando técnicas completamente elementales, se puede llegar a la correspondencia de Serre en codimensión dos. Concretamente, dado un subesquema Y de codimensión dos dentro de una variedad lisa X, si el determinante del fibrado normal de Y en X se extiende a un fibrado lineal sobre X, y bajo ciertas condiciones, construimos directamente un fibrado vectorial de rango dos sobre X que tiene una sección que se anula exactamente en Y.

2000 Mathematics Subject Classification: 14M07, 14F05, 14J60.
Key words: Correspondencia de Serre, codimensión dos, fibrado vectorial.

Introducción

Es bien conocida en geometría algebraica la correspondencia entre hipersuperficies de una variedad y fibrados lineales. Concretamente, toda hipersuperficie de una variedad algebraica lisa X (más en general, basta suponer que X sea *normal*) se puede obtener como el lugar de ceros de una sección de un fibrado lineal sobre X. Además, esta correspondencia induce un isomorfismo entre el *grupo de Picard de* X (i.e. las clases de equivalencia de divisores módulo equivalencia lineal) y las clases de isomorfismo de fibrados lineales sobre X.

El modo de llegar a construir un fibrado lineal a partir de una hipersuperficie es muy simple y se encuentra en cualquier texto básico (damos un pequeño recordatorio en la Observación 1.1). Se basa en el hecho de que una variedad normal tiene la propiedad de que cualquier hipersuperficie suya se puede describir localmente mediante una sola ecuación. Cuando en dos abiertos distintos tenemos ecuaciones distintas, ambas ecuaciones se "pegan" a base de multiplicar por el cociente de ellas en la intersección de los abiertos. Como precisamente la idea de un fibrado lineal consiste en pegar funciones en abiertos, tenemos inmediatamente la correspondencia entre hipersuperficies y fibrados lineales.

La situación en codimensión $r \geq 2$ cambia completamente. Para empezar, para garantizar que una subvariedad Y de X se pueda definir localmente por r ecuaciones hay que imponer condiciones sobre Y, por ejemplo que sea lisa. De todas formas, el principal problema es cómo pegar ahora estas ecuaciones locales en la intersección de dos abiertos, ya que unas ecuaciones se obtienen a partir de las otras multiplicando por una matriz $r \times r$, que no es única. Si se pudieran pegar bien, estas matrices darían lugar entonces a un fibrado vectorial de rango r sobre X que tendría una sección que se anula exactamente en Y. Sin embargo, la restricción de tal fibrado a Y debe ser el fibrado normal a Y en X (ver Observación 3.2), lo que es una condición muy fuerte para la subvariedad. Por ejemplo, esto implica que las clases de Chern del fibrado normal se deben extender a ciclos en X de igual codimensión, lo que en general sólo es cierto, por la fórmula de autointersección, para la r-ésima clase de Chern.

En el caso de codimensión $r = 2$, el hecho de que se extienda la primera clase de Chern del fibrado normal (es decir, el determinante del fibrado) es también suficiente (salvo cierta hipótesis cohomológica, ver Teorema 1.2) para que se pueda construir un fibrado vectorial de rango dos sobre X con una sección que se anule exactamente en Y. Esto es lo que se conoce como *correspondencia de Serre.* Existe una generalización de esta construcción en codimensión dos sin poner restricciones al determinante del fibrado normal. Concretamente, cualquier subvariedad de codimensión dos que satisfaga una condición algo más débil que ser lisa (y otra condición cohomológica análoga a la del Teorema 1.2) se puede obtener como lugar de dependencia de $s - 1$ secciones de un cierto fibrado vectorial de rango s sobre X (ver [3] para un enunciado preciso). Sin embargo, para codimensión $r \geq 3$ no se sabe básicamente nada en ninguno de estos sentidos.

El objetivo de esta nota es reobtener la correspondencia de Serre (en el caso primero de construir un fibrado vectorial de rango dos) con métodos completamente elementales. De hecho, las demostraciones existentes (ver [2], I.5.1.1) se basan en sofisticados métodos de cohomología y dualidad. Nosotros daremos una demostración "a mano", imitando la construcción de un fibrado lineal a partir de una hipersuperficie. Nuestro objetivo es que el trabajo sea lo más autocontenido posible, y que incluso pueda seguirse sin excesivos conocimientos previos de geometría algebraica. Aunque usaremos la terminología de esquemas, el lector que lo desee puede imaginarse que en realidad se está hablando siempre de subvariedades.

La nota está estructurada como sigue. En la sección 1, daremos los preliminares necesarios para poder seguir el resto del trabajo. En la sección 2, veremos cómo en general se pueden dar las ecuaciones locales de un subesquema de codimensión dos, y veremos las obstrucciones que aparecen a la hora de pegar dichas ecuaciones para poder obtener el fibrado vectorial de rango dos buscado. Finalmente, en la sección 3 incluimos la demostración propiamente dicha de la correspondencia de Serre. Nuestro planteamiento consiste en ir introduciendo poco a poco las hipótesis del Teorema 1.2

para que quede claro en qué momento preciso es necesaria cada una de ellas.

Agradezco inmensamente a Luca Ugaglia y Jorge Caravantes por prestarse a leer una versión preliminar de este trabajo y aportar sugerencias y correcciones que han ayudado sin duda a mejorar considerablemente la presentación final.

1. Preliminares

En esta sección recordaremos los conceptos básicos que necesitaremos de geometría algebraica, y que se pueden encontrar por ejemplo en [1]. Terminaremos enunciando el teorema que recoge la correspondencia de Serre, y que demostraremos a lo largo de esta nota.

Trabajaremos siempre sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k. La variedad ambiente X será proyectiva, lisa e irreducible (aunque la misma construcción funciona en un ambiente más general), y la topología que usaremos sobre ella será la topología de Zariski. Recordemos que una base de la topología de Zariski está formada por abiertos afines (i.e. abiertos que son isomorfos a un conjunto algebraico afín).

Dada una variedad proyectiva X, su *haz de estructura* $\mathcal{O}_X$ consiste en asignar a cada abierto $U \subset X$ el anillo $\mathcal{O}_X(U)$ de funciones regulares definidas sobre U. Recordemos que si U es un abierto afín isomorfo a un conjunto afín $Z \subset \mathbb{A}^n$, entonces $\mathcal{O}_X(U)$ es el anillo de funciones polinomiales definidas sobre Z, que es naturalmente isomorfo a $k[X_1, \ldots, X_n]/I(Z)$, donde $I(Z)$ es el ideal de los polinomios que se anulan sobre Z. Con este lenguaje, identificaremos un *subesquema* Y de X con un haz de ideales $\mathcal{I}_Y$ de $\mathcal{O}_X$, es decir, una haz que asigna a cada abierto U de X un ideal $\mathcal{I}_Y(U)$ de $\mathcal{O}_X(U)$. En particular, una función regular sobre un abierto $Y \cap U$ del subesquema no es sino un elemento de $(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y)(U)$ (que para abiertos afines coincide con $\mathcal{O}_X(U)/\mathcal{I}_Y(U)$ y por tanto toda función regular sobre $Y \cap U$ se puede extender a una función regular sobre U). El lector alérgico a la teoría de esquemas puede sustituir tranquilamente la palabra "subesquema" por la palabra "subvariedad", y tomar como $\mathcal{I}_Y(U)$ el ideal formado por las funciones regulares en U que se anulan en $Y \cap U$.

Los abiertos afines son los más cómodos para trabajar. Aparte de que un subesquema se puede reconstruir a partir de su restricción a abiertos afines, se satisface también que la intersección de abiertos afines en una variedad proyectiva es de nuevo afín. Finalmente, se tiene también que el *teorema de los ceros de Hilbert* se puede reinterpretar en el modo siguiente: *sean $f_1, \ldots, f_s \in \mathcal{O}_X(U)$ funciones regulares que no tienen un cero en común; entonces existen funciones regulares $g_1, \ldots, g_s \in \mathcal{O}_X(U)$ tales que $g_1 f_1 + \ldots + g_s f_s = 1$.*

La noción de fibrado vectorial que usaremos es la geométrica de fibración localmente trivial, que recordamos brevemente.

Definición Un *fibrado vectorial* de rango r sobre una variedad proyectiva X consiste en una variedad algebraica F con un morfismo $p : F \to X$ tal que existe un recubrimiento por abiertos $X = \bigcup_i U_i$ de modo que para cada U_i existe un isomorfismo $\varphi_i : U_i \times k^r \to p^{-1}(U_i)$ satisfaciendo:

(i) Para todo $x \in U_i$, $v \in k^r$ se tiene $p(\varphi_i(x, v)) = x$.

(ii) Para cada dos abiertos U_i, U_j, existe una matriz A_{ij} (necesariamente inversible) de orden r cuyas entradas son funciones regulares en $U_i \cap U_j$ y tal que la aplicación $\varphi^{-1}_{i|U_i\cap U_j} \circ \varphi_{j|U_i\cap U_j} : (U_i \cap U_j) \times k^r \to (U_i \cap U_j) \times k^r$ está definida como $(x, v) \mapsto (x, A_{ij}(x)v)$.

Alternativamente, un fibrado vectorial está determinado a partir de un recubrimiento $X = \bigcup_i U_i$ y unas matrices A_{ij} de orden r cuyas entradas son funciones regulares en $U_i \cap U_j$ que satisfagan las condiciones de compatibilidad:

(i) El determinante de A_{ij} no se anula en ningún punto de $U_i \cap U_j$.

(ii) Para cualesquiera tres abiertos U_i, U_j, U_k se tiene $A_{ik} = A_{ij}A_{jk}$ en $U_i \cap U_j \cap U_k$.

(iii) La matriz A_{ii} es la identidad.

Las matrices A_{ij} se llaman *matrices de transición* del fibrado vectorial. Si el rango es $r = 1$, el fibrado se llama *fibrado lineal*, y las matrices son simplemente funciones, llamadas *funciones de transición*.

Se llama *determinante de un fibrado vectorial* F de rango r al fibrado lineal $\bigwedge^r F$, que está definido localmente por las funciones de transición $\det A_{ij}$.

Definición Una *sección regular* de un fibrado vectorial $p : F \to X$ es un morfismo $s : X \to F$ tal que $p \circ s = id_X$. Con la anterior descripción alternativa de fibrado, una sección regular viene determinada por la elección en cada abierto U_i de r funciones regulares $f_{i1}, \ldots, f_{ir}$ que satisfagan la condición de compatibilidad $\begin{pmatrix} f_{i1} \\ \vdots \\ f_{ir} \end{pmatrix} = A_{ij} \begin{pmatrix} f_{j1} \\ \vdots \\ f_{jr} \end{pmatrix}$. El *lugar de ceros* de s es el subesquema Y definido por el haz de ideales $\mathcal{I}_Y$ determinado al considerar en cada abierto U_i el ideal $\mathcal{I}_Y(U_i)$ generado por $f_{i1}, \ldots, f_{ir}$ (obsérvese que la condición de compatibilidad implica que el ideal $\mathcal{I}_Y(U_i \cap U_j)$ está bien definido).

Observación 1.1 Es bien sabido que un subesquema (de codimensión pura uno) Y de X se puede definir localmente por una ecuación, es decir, existe un recubrimiento $X = \bigcup_i U_i$ tal que para cada U_i el ideal $\mathcal{I}_Y(U_i)$ está generado por un elemento $f_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$. Por tanto cada ideal $\mathcal{I}_Y(U_i \cap U_j)$ está generado tanto por f_i como por f_j (más precisamente por sus restricciones a $U_i \cap U_j$, pero en general evitaremos los símbolos de restricción para aligerar las notaciones). Por consiguiente, la función $\frac{f_i}{f_j}$ es regular en $U_i \cap U_j$ y no se anula en ningún punto. Como se satisface la relación de compatibilidad $\frac{f_i}{f_k} = \frac{f_i}{f_j}\frac{f_j}{f_k}$, estas funciones son las funciones de transición de un fibrado lineal sobre X que tiene una sección cuyo lugar de ceros es precisamente Y.

Para codimensión mayor la situación pasa de ser trivial a ser el problema abierto:

Problema Caracterizar cuándo un subesquema de codimensión pura r de una variedad X se puede definir como el lugar de ceros de una sección de un fibrado vectorial de rango r.

Para empezar, no es cierto en general que un subesquema de codimensión pura r se pueda describir localmente con r ecuaciones. Sí que ocurre por ejemplo si el subesquema es liso. La noción que funciona bien, y que es más débil que la lisitud, es entonces la siguiente:

Definición Un subesquema Y de X de codimensión r se dice que es *localmente intersección completa* si existe un recubrimiento $X = \bigcup_i U_i$ por abiertos afines tal que cada $\mathcal{I}_Y(U_i)$ está generado por r elementos.

El problema a la hora de intentar pegar estos conjuntos de r generadores es que se deben pegar usando matrices $r \times r$, que ahora no es evidente que satisfagan la relación de compatibilidad que las haga matrices de transición de un fibrado vectorial. Una condición necesaria es que el fibrado normal del subesquema se pueda extender a toda la variedad (ver Observación 3.2 para el caso $r = 2$), pero en general no es suficiente.

La respuesta en codimensión dos viene dada por la llamada correspondencia de Serre, que demostraremos a lo largo de esta nota. El enunciado concreto es el siguiente:

Teorema 1.2 *Sea X una variedad algebraica lisa y sea Y un subesquema de codimensión dos que es localmente intersección completa en X. Sea N el fibrado normal de Y en X, y supongamos que el fibrado lineal $\bigwedge^2 N$ se extiende a un fibrado lineal L sobre X que satisface $H^2(X, L^*) = 0$. Entonces existe un fibrado vectorial de rango dos sobre X que tiene una sección cuyo lugar de ceros es exactamente Y.*

Para el lector que no tenga familiaridad con el fibrado normal, lo reconstruiremos en el Lema 3.1. Respecto a la cohomología, finalizamos esta sección de preliminares recordando los fundamentos básicos que necesitaremos de dicha teoría en nuestro contexto.

Definición Sea X una variedad con un recubrimiento $\mathcal{U}$ por abiertos $X = \bigcup_i U_i$ y un fibrado vectorial $p : F \to X$. Definimos $C^p(X, F, \mathcal{U}) := \Pi_{i_0,\ldots,i_p} F(U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{ip})$, donde $F(U)$ indica el conjunto de secciones regulares del fibrado vectorial $F_{|U} := p^{-1}(U)$. Definimos el operador coborde $\partial_p : C^p(X, F, \mathcal{U}) \to C^{p+1}(X, F, \mathcal{U})$ de modo que al elemento de coordenadas $s_{i_0 \ldots i_p}$ se le asocia el elemento cuya coordenada $i_0 \ldots i_{p+1}$ es $\Sigma_{j=0}^{p+1} (-1)^j s_{i_0 \ldots \hat{i}_j \ldots i_{p+1}}$. Un *cociclo de orden* p es un elemento de $\ker \partial_p$, mientras que un *coborde de orden* p es un elemento de $\mathrm{Im}\partial_{p-1}$. Se llama *cohomología de Čech* de orden p de F respecto del recubrimiento a $H^p(X, F, \mathcal{U}) = \ker \partial_p / \mathrm{Im}\partial_{p-1}$. Si X es una variedad proyectiva y tomamos sólo recubrimientos por abiertos afines, ocurre que $H^p(X, F, \mathcal{U})$ no depende (salvo isomorfismo natural) del recubrimiento (ver [1], III.4.5). Denotamos entonces a cualquiera de estas clases de isomorfismo por $H^p(X, F)$.

Veamos cómo expresar la cohomología por medio de funciones en el caso que nos interesará. Sea $p : L \to X$ un fibrado lineal definido por un recubrimiento afín $\mathcal{U}$ de la forma $X = \bigcup_i U_i$, trivializaciones $\varphi_i : U_i \times k \to p^{-1}(U_i)$ y funciones de transición ψ_{ij}. Un elemento de $C^p(X, L, \mathcal{U})$ se puede representar por funciones regulares $f_{i_0 \ldots i_p}$ sobre $U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_p}$, de forma que la sección que damos de $L_{|U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_p}}$ es $x \mapsto \varphi_{i_p}(x, f_{i_0 \ldots i_p}(x))$. En concreto, un cociclo de orden dos estará representado por funciones regulares f_{ijk} que satisfacen en cada $U_i \cap U_j \cap U_k \cap U_l$ la relación

$$f_{jkl} - f_{ikl} + f_{ijl} - \psi_{kl}^{-1} f_{ijk} = 0$$

(el último elemento hay que multiplicarlo por el inverso de ψ_{kl} para pasar de la representación como sección de $p^{-1}(U_k)$ a $p^{-1}(U_l)$, que es donde están definidos los otros sumandos). Análogamente, el cociclo definido por las funciones f_{ijk} será un coborde si existen funciones g_{ij} definidas en cada $U_i \cap U_j$ de forma que en cada $U_i \cap U_j \cap U_k$ se satisface

$$f_{ijk} = g_{jk} - g_{ik} + \psi_{jk}^{-1} g_{ij}$$

2. Los datos locales

Si partimos de un subesquema Y de codimensión dos que sea localmente intersección completa, podemos encontrar un recubrimiento de X por abiertos afines $X = \bigcup_i U_i$ tal que el ideal de $\mathcal{I}_Y(U_i)$ está generado por dos funciones regulares f_i, g_i sobre U_i. Si en un abierto ocurre que $Y \cap U_i = \emptyset$, tomaremos $(f_i, g_i) = (1, 0)$. Para cada par de abiertos U_i, U_j vamos a definir ahora en su intersección una matriz inversible $A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{ij} & b_{ij} \\ c_{ij} & d_{ij} \end{pmatrix}$ con entradas $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}$ funciones regulares sobre $U_i \cap U_j$ y de forma que se satisfaga:

$$\begin{pmatrix} f_i \\ g_i \end{pmatrix} = A_{ij} \begin{pmatrix} f_j \\ g_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{ij} & b_{ij} \\ c_{ij} & d_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_j \\ g_j \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

La definición se hará dependiendo de los distintos casos:

–Si $Y \cap U_i \cap U_j$ no es vacío, su ideal en $U_i \cap U_j$ tendrá dos sistemas minimales distintos de generadores, $\{f_i, g_i\}$ y $\{f_j, g_j\}$, por lo que basta tomar A_{ij} como una matriz de paso de un sistema al otro.

–Si $Y \cap U_i = \emptyset$, como f_j, g_j definen el conjunto vacío en $U_i \cap U_j$, por el teorema de los ceros de Hilbert generan el ideal total. Por tanto, existen funciones regulares a, b en $U_i \cap U_j$ tales que $af_j + bg_j = 1$. Tomamos entonces $A_{ij} = \begin{pmatrix} a & b \\ -g_j & f_j \end{pmatrix}$.

–Si $Y \cap U_j = \emptyset$, tomamos ahora $A_{ij} = \begin{pmatrix} f_i & -d \\ g_i & c \end{pmatrix}$, donde c, d son funciones regulares en $U_i \cap U_j$ tales que $cf_i + dg_i = 1$.

–Si $Y \cap U_i, Y \cap U_j$ no son vacíos pero sí lo es $Y \cap U_i \cap U_j$, tomamos entonces $A_{ij} = \begin{pmatrix} f_i & -d \\ g_i & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -g_j & f_j \end{pmatrix}$, donde, como en los casos anteriores, a, b, c, d son funciones regulares sobre $U_i \cap U_j$ tales que $af_j + bg_j = 1 = cf_i + dg_i$.

La expresión (2.1) se puede reescribir de la siguiente forma que usaremos a menudo:

$$(g_i, -f_i)A_{ij} = \det A_{ij}(g_j, -f_j) \tag{2.2}$$

Observación 2.1 El hecho de que las funciones f_i, g_i definan el conjunto vacío en un abierto V de U_i (lo que ocurre no sólo cuando U_i no corta a Y, sino también por ejemplo cuando V es una intersección $U_i \cap U_j$ que no corta a Y) no influye en el comportamiento fundamental de las intersecciones completas. Concretamente, la propiedad que más usaremos es que, si $af_i = bg_i$ para ciertas funciones regulares a, b definidas en V, entonces existe otra función regular c tal que $a = cg_i$, $b = cf_i$. Esta propiedad también se cumple si f_i, g_i definen el conjunto vacío en V. En efecto, por el teorema de los ceros de Hilbert, existen funciones u, v tales que $uf_i + vg_i = 1$. Multiplicando esta última identidad por a y b, se observa entonces que basta tomar $c = ub + av$.

Observación 2.2 Por supuesto, las matrices A_{ij} construidas no son únicas en esas condiciones. Por ejemplo, otra matriz $A'_{ij} = \begin{pmatrix} a'_{ij} & b'_{ij} \\ c'_{ij} & d'_{ij} \end{pmatrix}$ que satisfaga (2.1) deberá satisfacer $(A'_{ij} - A_{ij}) \begin{pmatrix} f_j \\ g_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Por tanto, $(a'_{ij} - a_{ij})f_j = -(b'_{ij} - b_{ij})g_j$ y $-(c'_{ij} - c_{ij})f_j = (d'_{ij} - d_{ij})g_j$, por lo que la Observación 2.1 implica que existen funciones ψ_{ij}, φ_{ij} tales que $a'_{ij} - a_{ij} = \psi_{ij}g_j$, $b'_{ij} - b_{ij} = -\psi_{ij}f_j$, $c'_{ij} - c_{ij} = -\varphi_{ij}g_j$, $d'_{ij} - d_{ij} = \varphi_{ij}f_j$. En otras palabras, A'_{ij} se puede escribir como

$$A'_{ij} = \begin{pmatrix} a_{ij} + \psi_{ij}g_j & b_{ij} - \psi_{ij}f_j \\ c_{ij} - \varphi_{ij}g_j & d_{ij} + \varphi_{ij}f_j \end{pmatrix}$$

Si además queremos que A'_{ij} tenga el mismo determinante que A_{ij}, debe ser $(a_{ij}f_j + b_{ij}g_j)\varphi_{ij} = -(c_{ij}f_j + d_{ij}g_j)\psi_{ij}$, es decir, $f_i\varphi_{ij} = -g_i\psi_{ij}$. De nuevo, de la Observación 2.1 se deduce que debe existir ν_{ij} tal que $\psi_{ij} = \nu_{ij}f_i$ y $\varphi_{ij} = -\nu_{ij}g_i$, con lo que A'_{ij} será de la forma

$$A'_{ij} = \begin{pmatrix} a_{ij} + \nu_{ij}f_ig_j & b_{ij} - \nu_{ij}f_if_j \\ c_{ij} + \nu_{ij}g_ig_j & d_{ij} - \nu_{ij}g_if_j \end{pmatrix}$$

Terminamos la sección demostrando un resultado que nos dice qué relaciones existen entre las distintas matrices A_{ij} construidas al inicio cuando variamos los abiertos.

Lema 2.3 *Con las notaciones anteriores, en cada intersección $U_i \cap U_j \cap U_k$ existen funciones regulares r_{ijk}, s_{ijk} tales que se satisface la igualdad* $A_{ik} - A_{ij}A_{jk} = \begin{pmatrix} r_{ijk}g_k & -r_{ijk}f_k \\ s_{ijk}g_k & -s_{ijk}f_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{ijk} \\ s_{ijk} \end{pmatrix}(g_k, -f_k)$. *Además, dichas funciones satisfacen la relación* $g_ir_{ijk} - f_is_{ijk} = \det A_{ik} - \det A_{ij} \det A_{jk}$.

Demostración: Escribimos en primer lugar $A_{ik} - A_{ij}A_{jk} = \begin{pmatrix} \alpha_{ijk} & \beta_{ijk} \\ \gamma_{ijk} & \delta_{ijk} \end{pmatrix}$. Para demostrar la primera igualdad del enunciado, multiplicamos $A_{ik} - A_{ij}A_{jk}$ a la derecha por $\begin{pmatrix} f_k \\ g_k \end{pmatrix}$ y usamos sucesivamente la expresión (2.1) para todos los pares de abiertos en U_i, U_j, U_k. Se tiene entonces la relación en $U_i \cap U_j \cap U_k$:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{ijk} & \beta_{ijk} \\ \gamma_{ijk} & \delta_{ijk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_k \\ g_k \end{pmatrix} = (A_{ik} - A_{ij}A_{jk}) \begin{pmatrix} f_k \\ g_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es decir $\alpha_{ijk}f_k = -\beta_{ijk}g_k$, $\gamma_{ijk}f_k = -\delta_{ijk}g_k$. Se deduce por tanto de la Observación 2.1 que existen r_{ijk}, s_{ijk} tales que $\alpha_{ijk} = r_{ijk}g_k$, $\beta_{ijk} = -r_{ijk}f_k$, $\gamma_{ijk} = s_{ijk}g_k$, $\delta_{ijk} = -s_{ijk}f_k$, que es la igualdad que buscábamos.

Para demostrar la segunda igualdad, multiplicamos ahora $A_{ik} - A_{ij}A_{jk}$ a la izquierda por $(g_i, -f_i)$ y usamos (2.2) repetidamente, con lo que obtenemos

$$(g_i, -f_i)(A_{ik} - A_{ij}A_{jk}) = (\det A_{ik} - \det A_{ij} \det A_{jk})(g_k, -f_k)$$

Pero de la primera igualdad ya demostrada para $A_{ik} - A_{ij}A_{jk}$ se tiene también

$$(g_i, -f_i)(A_{ik} - A_{ij}A_{jk}) = (g_i r_{ijk} - f_i s_{ijk})(g_k, -f_k)$$

Igualando los términos de la derecha de las dos últimas igualdades y observando que f_k y g_k no son ambos nulos en $U_i \cap U_j \cap U_k$, se deduce la relación buscada $g_i r_{ijk} - f_i s_{ijk} = \det A_{ik} - \det A_{ij} \det A_{jk}$. $\square$

3. Pegando los datos locales

El Lema 2.3 indica que en general las matrices A_{ij} que hemos construido no son las matrices de un fibrado vectorial, a menos que r_{ijk}, s_{ijk} sean cero. Además, de estas funciones parece que podemos dar cierta información extra sólo cuando $\det A_{ik} - \det A_{ij} \det A_{jk} = 0$, es decir, cuando los determinantes de las matrices A_{ij} son funciones de transición de un cierto fibrado lineal. En esta sección veremos cómo a partir de estas ideas, imponiendo sucesivamente las hipótesis adecuadas (las del Teorema 1.2) se llega a construir el fibrado vectorial.

La primera observación es que el Lema 2.3 nos dice que las matrices A_{ij}, restringidas a Y, son las matrices de transición de un fibrado vectorial sobre Y (ya que las funciones f_k, g_k se anulan sobre Y). En el siguiente lema demostramos que tal fibrado lineal es precisamente el fibrado normal de Y en X.

Lema 3.1 *Con las notaciones de la sección precedente, el fibrado normal N de Y en X se puede describir mediante el recubrimiento $Y = \bigcup_i (Y \cap U_i)$ tomando como matrices de transición de $Y \cap U_i$ a $Y \cap U_j$ la restricción a Y de la matriz A_{ij}.*

Demostración: El fibrado conormal N^* de Y en X es, por definición, el generado localmente por df_i, dg_i en cada $Y \cap U_i$. Por tanto, diferenciando en (2.1) y teniendo en cuenta que f_j, g_j son cero en $Y \cap U_i$ obtenemos relaciones

$$\begin{pmatrix} df_i \\ dg_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{ij} & b_{ij} \\ c_{ij} & d_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} df_j \\ dg_j \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

definidas sobre $Y \cap U_i \cap U_j$. Por tanto, una forma diferencial que se exprese en $Y \cap U_i$ de la forma $\varphi_i df_i + \psi_i dg_i$ se escribirá en $Y \cap U_i \cap U_j$ como $\varphi_j df_j + \psi_j dg_j$, donde las nuevas funciones φ_j, ψ_j se relacionan con las anteriores mediante la expresión

$$\begin{pmatrix} \varphi_j \\ \psi_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{ij} & c_{ij} \\ b_{ij} & d_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_i \\ \psi_i \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

con lo que $\begin{pmatrix} a_{ij} & c_{ij} \\ b_{ij} & d_{ij} \end{pmatrix}^{-1}$ es la matriz de paso de $Y \cap U_i$ a $Y \cap U_j$ para el fibrado conormal de Y en X. Dualizando, se obtiene que $\begin{pmatrix} a_{ij} & b_{ij} \\ c_{ij} & d_{ij} \end{pmatrix}$ es la matriz de paso de $Y \cap U_i$ a $Y \cap U_j$ para N, el fibrado normal de Y en X.

La condición de compatibilidad $A_{ik} = A_{ij}A_{jk}$ sobre Y se obtiene, como ya hemos observado, al restringir a Y la igualdad del Lema 2.3. □

Observación 3.2 Si Y fuera el lugar de ceros de una sección de un fibrado vectorial F de rango dos sobre X, se podrían tomar como funciones f_i, g_i una representación local de dicha sección de F. Entonces, como matriz A_{ij} en la relación (2.1) se podría tomar la matriz de transición de U_i a U_j para F. Usando el Lema 3.1, esto demuestra el hecho conocido de que la restricción de F a Y es precisamente N.

Como hemos observado al inicio de la sección, la última igualdad del Lema 2.3 indica que se podría sacar alguna consecuencia extra si supiéramos que las funciones $\det A_{ij}$ son las funciones de transición de un fibrado lineal sobre X. El Lema 3.1 nos dice que, sobre Y, las matrices A_{ij} definen el fibrado normal N, luego las funciones $\det A_{ij}$ restringidas a Y definen el fibrado lineal $\bigwedge^2 N$. Parece pues natural sospechar que la condición que queremos sobre los determinantes equivalga a decir que $\bigwedge^2 N$ se extiende a un fibrado lineal sobre todo X (que es en efecto la primera hipótesis del Teorema 1.2). Esto es lo que probarán los dos lemas siguientes. En el primero, cambiaremos las funciones f_i, g_i, que ya dejaremos fijas hasta el final de la construcción. En el segundo lema, como ya sólo hay que cambiar la matriz A_{ij} de (2.1), el cambio que se usará tendrá el aspecto que predecía la Observación 2.2.

Supongamos por tanto que $\bigwedge^2 N$ se puede extender a un fibrado lineal L sobre X. Refinamos el recubrimiento por abiertos de X de la sección anterior para que también sirva para trivializar el fibrado lineal L. Sean entonces h_{ij} las funciones de transición de L.

Lema 3.3 *Las matrices* A_{ij} *de (2.1) se pueden escoger de forma que* $\det A_{ij} = h_{ij}$ *en cada* $Y \cap U_i \cap U_j$*.*

Demostración: A lo largo de esta demostración, usaremos una barra para denotar la restricción a Y de cualquier objeto. Así por ejemplo, N es un fibrado vectorial sobre Y con matrices de transición $\bar{A}_{ij}$, y $L_{|Y}$ es un fibrado lineal con funciones de transición $\bar{h}_{ij}$. El hecho de que $L_{|Y}$ sea isomorfo a $\bigwedge^2 N$ quiere decir que en cada abierto $Y \cap U_i$ existe una función regular sin ceros $\bar{\phi}_i$ (que define localmente el isomorfismo de $L_{|Y}$ a $\bigwedge^2 N$), y que se satisface la condición de compatibilidad $\bar{\phi}_i \det \bar{A}_{ij} = \bar{\phi}_j \bar{h}_{ij}$ sobre $Y \cap U_i \cap U_j$. Como $Y \cap U_i$ es un esquema afín en U_i, se tiene que las funciones $\bar{\phi}_i$ se extienden a funciones ϕ_i definidas sobre U_i y que no se anulan en $Y \cap U_i$. Dado que $Y \cap U_i$ está definido por el ideal (f_i, g_i), las funciones ϕ_i, f_i, g_i no se pueden anular simultáneamente en U_i. Se tiene por tanto que U_i se puede recubrir por los abiertos (afines) $U'_i = \{\phi_i \neq 0\}$, $V'_i = \{f_i \neq 0\}$ y $W'_i = \{g_i \neq 0\}$.

Refinamos entonces nuestro recubrimiento de X cambiando cada U_i por U'_i, V'_i y W'_i. Aplicamos ahora la construcción de la sección anterior a este recubrimiento. Por tanto (aunque este dato no sea relevante en esta demostración) en los abiertos V'_i y W'_i las funciones que consideramos son $\{1, 0\}$. En cambio, para cada nuevo abierto U'_i consideramos como funciones que generan $\mathcal{I}_Y(U'_i)$ las funciones $\{\phi_i f_i, g_i\}$ (obsérvese que, por definición, ϕ_i es una unidad de $\mathcal{O}_X(U'_i)$). De este modo, el paso de U'_i a U'_j (el único cambio relevante a la hora de restringir a Y) vendrá dado por

$$\begin{pmatrix} \phi_i f_i \\ g_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\phi_i a_{ij}}{\phi_j} & \phi_i b_{ij} \\ \frac{c_{ij}}{\phi_j} & d_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_j f_j \\ g_j \end{pmatrix}$$

Se tiene ahora que el determinante de $\begin{pmatrix} \frac{\bar{\phi}_i \bar{a}_{ij}}{\bar{\phi}_j} & \bar{\phi}_i \bar{b}_{ij} \\ \frac{\bar{c}_{ij}}{\bar{\phi}_j} & \bar{d}_{ij} \end{pmatrix}$ es precisamente $\bar{h}_{ij}$, lo que concluye el resultado. □

Lema 3.4 *Las matrices* A_{ij} *de (2.1) se pueden escoger de forma que* $\det A_{ij} = h_{ij}$ *en cada* $U_i \cap U_j$*. En particular,* $\det A_{ik} = \det A_{ij} \det A_{jk}$*.*

Demostración: Como a raíz del Lema 3.3 las funciones $\det A_{ij}$ y h_{ij} coinciden en cada $Y \cap U_i \cap U_j$, tenemos entonces que se diferencian en un elemento del ideal (f_i, g_i). Podemos escribir entonces

$$h_{ij} = \det A_{ij} + \varphi_{ij} f_i + \psi_{ij} g_i = \det A_{ij} + (\varphi_{ij} a_{ij} + \psi_{ij} c_{ij}) f_j + (\varphi_{ij} b_{ij} + \psi_{ij} d_{ij}) g_j$$

para ciertas funciones φ_{ij}, ψ_{ij} definidas sobre $U_i \cap U_j$. Esto nos permite sustituir (2.1) por

$$\begin{pmatrix} f_i \\ g_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{ij} + \psi_{ij} g_j & b_{ij} - \psi_{ij} f_j \\ c_{ij} - \varphi_{ij} g_j & d_{ij} + \varphi_{ij} f_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_j \\ g_j \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

y la nueva matriz de transición $\begin{pmatrix} a_{ij}+\psi_{ij}g_j & b_{ij}-\psi_{ij}f_j \\ c_{ij}-\varphi_{ij}g_j & d_{ij}+\varphi_{ij}f_j \end{pmatrix}$ (que tiene el aspecto que predecía la Observación 2.2) cumple la propiedad buscada de que su determinante sea h_{ij}. $\square$

Ahora que ya tenemos la igualdad que buscábamos para los determinantes, el Lema 2.3 nos permite inmediatamente la siguiente mejora:

Lema 3.5 *En cada intersección $U_i \cap U_j \cap U_k$ existen funciones regulares μ_{ijk} tales que* $A_{ik} - A_{ij}A_{jk} = \mu_{ijk}\begin{pmatrix} f_ig_k & -f_if_k \\ g_ig_k & -g_if_k \end{pmatrix} = \mu_{ijk}\begin{pmatrix} f_i \\ g_i \end{pmatrix}(g_k, -f_k)$.

Demostración: Por el Lema 2.3 tenemos $A_{ik} - A_{ij}A_{jk} = \begin{pmatrix} r_{ijk} \\ s_{ijk} \end{pmatrix}(g_k, -f_k)$. Además, como $\det A_{ik} = \det A_{ij} \det A_{jk}$, tenemos por el mismo lema la igualdad $g_ir_{ijk} = f_is_{ijk}$. De aquí se deduce, por la Observación 2.1, que existe μ_{ijk} tal que $s_{ijk} = \mu_{ijk}g_i$ y $r_{ijk} = \mu_{ijk}f_i$, lo que concluye el resultado. $\square$

Falta ahora por ver en qué condiciones podemos conseguir $\mu_{ijk} = 0$. Esto es lo que vemos a continuación:

Observación 3.6 Si queremos cambiar cada matriz A_{ij} por otra A'_{ij} que tenga el mismo determinante h_{ij}, hemos visto en la Observación 2.2 que debemos tomar $A'_{ij} = \begin{pmatrix} a_{ij}+\nu_{ij}f_ig_j & b_{ij}-\nu_{ij}f_if_j \\ c_{ij}+\nu_{ij}g_ig_j & d_{ij}-\nu_{ij}g_if_j \end{pmatrix}$ para alguna función ν_{ij} sobre $U_i \cap U_j$. Queremos también que se satisfaga:

$$0 = A'_{ik} - A'_{ij}A'_{jk} = A_{ik} - A_{ij}A_{jk} +$$

$$\nu_{ik}\begin{pmatrix} f_ig_k & -f_if_k \\ g_ig_k & -g_if_k \end{pmatrix} - A_{ij}\nu_{jk}\begin{pmatrix} f_jg_k & -f_jf_k \\ g_jg_k & -g_jf_k \end{pmatrix} - \nu_{ij}\begin{pmatrix} f_ig_j & -f_if_j \\ g_ig_j & -g_if_j \end{pmatrix}A_{jk} =$$

$$(\mu_{ijk} + \nu_{ik} - \nu_{jk} - \det A_{jk}\nu_{ij})\begin{pmatrix} f_ig_k & -f_if_k \\ g_ig_k & -g_if_k \end{pmatrix}$$

donde hemos usado respectivamente (2.1) y (2.2) para los dos últimos sumandos de la última igualdad. Por tanto, necesitamos que μ_{ijk} se pueda escribir como $\mu_{ijk} = \nu_{jk} - \nu_{ik} + \det A_{jk}\nu_{ij}$. En otras palabras, las funciones μ_{ijk} deberían definir un coborde de orden dos de L^*.

Es ahora cuando entra en juego la última condición del Teorema 1.2: $H^2(X, L^*)$ debe ser cero, lo que nos va a permitir terminar enseguida:

Fin de la demostración del Teorema 1.2: Por la Observación 3.6 y la hipótesis $H^2(X, L^*) = 0$, basta ver que las funciones μ_{ijk} del Lema 3.5 definen un cociclo de orden dos de L^*. De la identidad

$$A_{ij}(A_{jl} - A_{jk}A_{kl}) - (A_{il} - A_{ik}A_{kl}) + (A_{il} - A_{ij}A_{jl}) - (A_{ik} - A_{ij}A_{jk})A_{kl} = 0$$

se deduce, usando el Lema 3.5,

$$0 = \mu_{jkl}A_{ij}\begin{pmatrix} f_j \\ g_j \end{pmatrix}(g_l, -f_l) - \mu_{ikl}\begin{pmatrix} f_i \\ g_i \end{pmatrix}(g_l, -f_l) +$$

$$+\mu_{ijl}\begin{pmatrix} f_i \\ g_i \end{pmatrix}(g_l, -f_l) - \mu_{ijk}\begin{pmatrix} f_i \\ g_i \end{pmatrix}(g_k, -f_k)A_{kl} =$$

$$(\mu_{jkl} - \mu_{ikl} + \mu_{ijl} - \det A_{kl}\mu_{ijk})\begin{pmatrix} f_i \\ g_i \end{pmatrix}(g_l, -f_l)$$

de donde se obtiene $\mu_{jkl} - \mu_{ikl} + \mu_{ijl} - \det A_{kl}\mu_{ijk} = 0$. Luego efectivamente las funciones μ_{ijk} definen un cociclo de orden dos, lo que concluye la demostración. $\square$

Referencias

[1] R. Hartshorne: *Algebraic geometry.* Springer-Verlag, Berlin 1977.

[2] C. Okonek, M. Schneider, H. Spindler: *Vector bundles on complex projective spaces.* Progress in Mathematics **3,** Birkhäuser, Boston 1980.

[3] J.A. Vogelaar: *Constructing vector bundles from codimension-two subvarieties.* Ph.D. Thesis, Leiden 1978.