# Invariantes conformes de curvas a través de la conexión de Fermi–Walker


**Beatriz Salvador**

Departamento de Geometría y Topología
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
Madrid, Spain
bsallue@yahoo.es


*Dedicado al Profesor D. Enrique Outerelo Domínguez con motivo de su jubilación.*


**ABSTRACT**

Partiendo de la teoría desarrollada en la tesis “Paralelismo y geodésicas en variedades conformes” [5], se utiliza la conexión de Fermi–Walker y el tensor conforme de Schouten para describir los invariantes conformes clásicos asociados a curvas en el espacio conforme plano $\mathbb{R}^m$. En particular, estos resultados se aplican al estudio de dos ejemplos especiales de curvas: los círculos y las hélices.



*2000 Mathematics Subject Classification:* 53A30, 53A55.
*Key words:* Geometría conforme, invariantes a lo largo de curvas, conexión conforme.


## 1. Introducción

En la tesis “Paralelismo y geodésicas en variedades conformes” [5] se desarrolla una teoría para variedades conformes Riemannianas basada en la existencia canónica de una conexión (o paralelismo) conforme a lo largo de las curvas parametrizadas de la variedad. Es la denominada conexión de Fermi–Walker. Igualmente, sobre cada curva parametrizada se puede definir también un tensor asociado con significado conforme, que llamamos tensor de Schouten de la curva.

Este par de nuevos invariantes juegan un papel fundamental en la teoría de curvas en ambientes conformes. La geometría conforme de la curva está completamente determinada por su conexión de Fermi–Walker y su tensor de Schouten, en el sentido de que a partir de ellos se pueden determinar todos los invariantes conformes clásicamente asociados a una curva, como son su arco conforme, sus curvaturas conformes,... Esta nueva reinterpretacíon es además muy geométrica y hace que la conexión de Fermi–Walker y el tensor conforme de Schouten se nos muestren como los análogos conformes de la conexión de Levi–Civita y de la aceleración Riemannianas, respectivamente. (Véase el apartado 2.1 para más detalle.)

La reinterpretación de los invariantes conformes de la curva en términos de su conexion de Fermi–Walker y su tensor de Schouten ofrece además una mayor computabilidad. Desde esta perspectiva el cálculo de los invariantes requiere únicamente construir ciertos tensores sobre la curva y derivar a través de una conexión, en el sentido habitual, a lo largo de la curva. Trabajando siempre a nivel del tangente inmediato de la variedad. Se gana con ello que ya no es necesario acudir a la intervención de una conexión normal de Cartan definida en el tangente de un fibrado especial sobre la variedad (cuyos elementos se construyen como un tipo de "referencia esférica" con sentido conforme —en el caso de Cartan [2], Sulanke [7] y otros—, o como los 2-jets de cartas normales de conexiones simétricas y conformes de la variedad —en el caso de Sternberg [6], Kobayashi [3] y otros).

La necesidad de tener que recurrir a un nivel "tan por encima de la variedad" para la definición de los invariantes conformes de una curva hacía difícil, por ejemplo, el determinar su relación con los habituales invariantes métricos de la curva.

En este artículo se hace uso de la manejabilidad que ofrece la caracterizacíon en términos de la conexión de Fermi–Walker y del tensor conforme de Schouten, para estudiar los invariantes conformes de una curva parametrizada en el ambiente plano $\mathbb{R}^m$, y su relación con los bien conocidos invariantes métricos.

## 2. Teoría general: curvas en un ambiente conforme riemanniano

Sea $t \mapsto \gamma_t \in M$ una curva (regularmente) parametrizada en una variedad conforme Riemanniana $(M, \mathcal{C})$ de dimensión $m \geq 3$. [1]

Sea $\mathbf{g} \in \mathcal{C}$ una métrica de la estructura conforme de $M$. El par $(M, \mathbf{g})$ constituye una variedad Riemanniana, con una conexión de Levi–Civita asociada, $\nabla$, y una colección de tensores ligados a su curvatura (el tensor de Ricci $Ric \in \mathfrak{T}^0_2(M)$, la función de curvatura escalar $Sc \in C^\infty(M)$,...), entre los que destacamos el llamado tensor de Schouten

$$L = \frac{1}{2-m}\left(Ric - \frac{Sc}{2(m-1)}\mathbf{g}\right) \in \mathfrak{T}^0_2(M).$$

Nuestro interés por el tensor $L \in \mathfrak{T}^0_2(M)$ y por la conexión $\nabla$, está aquí justificado por su estrecha relación con dos importantes invariantes conformes ligados a $t \mapsto \gamma_t$ como curva en el ambiente conforme $(M, \mathcal{C})$. Dichos invariantes son una conexión a

[1] La estructura conforme $\mathcal{C}$ se entiende en el sentido habitual: como una clase de métricas Riemannianas conformemente equivalentes en $M$, que difieren una de otra por un factor diferenciable de escala,

$$\mathcal{C} = \{e^{2f}\mathbf{g} : f \in C^\infty(M)\}.$$

lo largo de la curva, $D^\gamma/dt$, y un tensor $L^\gamma \in \Lambda^1(\gamma)$, cuya acción sobre $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ se define mediante identidades de la forma:

$$\begin{aligned}
\frac{D^\gamma}{dt}V &= \frac{\nabla}{dt}V + \mathbf{g}(\gamma', A)V + \mathbf{g}(V, A)\gamma' - \mathbf{g}(\gamma', V)A, \\
L^\gamma(V) &= L(\gamma', V) + \mathbf{g}(V, \nabla_{\gamma'}A) + \frac{1}{2}\mathbf{g}(A, A)\mathbf{g}(\gamma', V) + \frac{\mathbf{g}(\gamma', \frac{\nabla}{dt}\gamma')}{\mathbf{g}(\gamma', \gamma')}\mathbf{g}(A, V),
\end{aligned}$$

siendo $A \in \mathfrak{X}(\gamma)$ el campo sobre $\gamma_t$ dado por:

$$A = \frac{1}{\mathbf{g}(\gamma', \gamma')}\frac{\nabla}{dt}\gamma' - 2\frac{\mathbf{g}(\gamma', \frac{\nabla}{dt}\gamma')}{\mathbf{g}(\gamma', \gamma')^2}\gamma'.$$

Sustituyendo la expresión de $A$ en las fórmulas anteriores podemos dar paso a las siguientes definiciones explícitas:

**Definición 2.1** *(a) La* conexión de Fermi–Walker $D^\gamma/dt$ *a lo largo de $t \mapsto \gamma_t$ es un invariante conforme que sobre el campo $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ actúa como:*

$$\frac{D^\gamma}{dt}V = \frac{\nabla}{dt}V - \frac{\mathbf{g}(\gamma', \frac{\nabla}{dt}\gamma')}{\mathbf{g}(\gamma', \gamma')}V + \frac{\mathbf{g}(\frac{\nabla}{dt}\gamma', V)}{\mathbf{g}(\gamma', \gamma')}\gamma' - \frac{\mathbf{g}(\gamma', V)}{\mathbf{g}(\gamma', \gamma')}\frac{\nabla}{dt}\gamma' \in \mathfrak{X}(\gamma). \quad (2.1)$$

*(b) El* tensor conforme de Schouten $L^\gamma$ *de $t \mapsto \gamma_t$ es un invariante conforme que sobre $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ actúa como:*

$$\begin{aligned}
L^\gamma(V) = L(\gamma', V) &+ \frac{\mathbf{g}\left(\frac{\nabla^2}{dt}\gamma', V\right)}{\mathbf{g}(\gamma', \gamma')} - \frac{3\mathbf{g}(\gamma', \frac{\nabla}{dt}\gamma')\,\mathbf{g}\left(\frac{\nabla}{dt}\gamma', V\right)}{\mathbf{g}^2(\gamma', \gamma')} \quad (2.2) \\
&- \left(\frac{\frac{3}{2}\mathbf{g}(\frac{\nabla}{dt}\gamma', \frac{\nabla}{dt}\gamma')}{\mathbf{g}^2(\gamma', \gamma')} + \frac{2\mathbf{g}(\frac{\nabla^2}{dt}\gamma', \gamma')}{\mathbf{g}^2(\gamma', \gamma')} - \frac{6\mathbf{g}^2(\frac{\nabla}{dt}\gamma', \gamma')}{\mathbf{g}^3(\gamma', \gamma')}\right)\mathbf{g}(\gamma', V) \in C^\infty(\gamma).
\end{aligned}$$

Obsérvese que el tensor conforme de Schouten $L^\gamma \in \Lambda^1(\gamma)$ queda totalmente caracterizado por el siguiente par de datos:

(i) su acción sobre el tangente a la curva, recogida a través de la función

$$L^\gamma(\gamma'_t) \in C^\infty(\gamma);$$

(ii) su acción sobre el espacio ortogonal a la curva, en correspondencia con el *campo ortogonal de Schouten* $\mathbb{L}^\gamma \in \mathfrak{X}(\gamma)^\perp$ que se define como

$$\mathbb{L}^\gamma = \mathbf{g}(\gamma', \gamma')(L^\gamma \circ pr^\perp)_{\uparrow_{\mathbf{g}}} \in \mathfrak{X}(\gamma)^\perp.$$

### Cambio por reparametrización de la curva $\gamma_t$

Sea $s \mapsto t_s$ un cambio de parámetro, de modo que $t'_s \neq 0\ \forall s$. La curva reparametrizada $s \mapsto \overline{\gamma}_s = \gamma_{t_s}$ tiene asociados una nueva conexión de Fermi–Walker $D^{\overline{\gamma}}/ds$ y un nuevo tensor conforme de Schouten $L^{\overline{\gamma}} \in \Lambda^1(\overline{\gamma})$. Su relación con $D^\gamma/dt$ y $L^\gamma$, correspondientes a la parametrización $t \mapsto \gamma_t$, es la siguiente:

(a) Conexión de Fermi–Walker:

Para un campo $V_t \in \mathfrak{X}(\gamma)$ se tiene que $(V \circ t)_s \in \mathfrak{X}(\overline{\gamma})$ y

$$\frac{D^{\overline{\gamma}}}{ds}(V \circ t)\Big|_s = t'_s\ \frac{D^\gamma}{dt}V\Big|_{t_{(s)}} - \frac{t''_s}{t'_s} V_{t_s}. \tag{2.3}$$

(b) Tensor conforme de Schouten:

Para un campo $V_t \in \mathfrak{X}(\gamma)$ se tiene que $(V \circ t)_s \in \mathfrak{X}(\overline{\gamma})$ y

$$L^{\overline{\gamma}}(V \circ t)_s = (t'_s)\, L^\gamma(V)_{t_s} - \frac{\mathcal{S}(t)_s}{t'_s} \frac{\mathbf{g}(\gamma', V)}{\mathbf{g}(\gamma', \gamma')}.$$

siendo $\mathcal{S}(t)_s = \frac{t'''_s}{t'_s} - \frac{3}{2}\left(\frac{t''_s}{t'_s}\right)^2$ la derivada Schwartziana[2] de $t$ respecto de $s$. Obsérvese que entonces se tienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} &L^{\overline{\gamma}}(\overline{\gamma}'_s) = (t'_s)^2 L^\gamma(\gamma')_{t_s} - \mathcal{S}(t)_s \\ &\mathbb{L}^{\overline{\gamma}}_s = \mathbf{g}(\overline{\gamma}'_s, \overline{\gamma}'_s)\left(L^{\overline{\gamma}} \circ pr^\perp\right)_{\uparrow\mathbf{g}} = (t'_s)^3 \mathbf{g}(\gamma', \gamma')_{t_s}\left(L^\gamma \circ pr^\perp\right)_{\uparrow\mathbf{g}} = (t'_s)^3 \mathbb{L}^\gamma_{t_s} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Estas fórmulas se demuestran fácilmente sustituyendo directamente en las definiciones (2.1) y (2.2), las relaciones:

$$\begin{aligned} &\tfrac{\nabla}{ds}(V \circ t)\big|_s = t'_s\ \tfrac{\nabla}{dt}V\big|_{t_{(s)}}, \quad V_t \in \mathfrak{X}(\gamma) \\ &\overline{\gamma}'_s = t'_s\, \gamma'_{t_s}. \end{aligned}$$

## 2.1. Invariantes conformes de $\gamma_t$

La conexión de Fermi–Walker $D^\gamma/dt$ y el tensor conforme de Schouten $L^\gamma$ son dos invariantes conformes que describen completamente la geometría de $t \mapsto \gamma_t \in M$ como curva en un ambiente conforme. A partir de ellos se pueden caracterizar todos los invariantes conformes clásicos (arco y curvaturas conformes, geodésicas,...), tal y

[2]Esta derivada está ligada a la estructura proyectiva de $\mathbb{R}$, heredada de la recta proyectiva real $\mathbb{P}^1 = \mathbb{R}^1 \cup \{\infty\}$, y se mantiene invariante por las homografías $s \mapsto \frac{as+b}{as+d}$ $(ad - cb \neq 0)$.

como a continuación describimos.[3] Se observará que estos resultados confirman a la conexión de Fermi–Walker como el análogo conforme de la conexión de Levi–Civita Riemanniana, y al tensor conforme de Schouten de la curva como el equivalente a la aceleración Riemanniana de la curva parametrizada.

**Parámetro proyectivo**

La curva admite un *parámetro proyectivo* $\tau$, único salvo cambios por homografías $\tau \mapsto \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$. Viene dado por aquellas parametrizaciones $\tau \mapsto \overline{\gamma}_\tau = \gamma_{t_\tau}$ tales que

$$\mathcal{S}(\tau)_t = -L^\gamma(\gamma')_t$$

A la vista de las fórmulas de reparametrización (2.4) y de la relación $\mathcal{S}(t)_\tau = -(t'_\tau)^2 \mathcal{S}(\tau)_{t_\tau}$, se observa que el parámetro proyectivo lo definen aquellas parametrizaciones $\tau \mapsto \overline{\gamma}_\tau$ tales que $L^{\overline{\gamma}}(\overline{\gamma}'_\tau) = 0$.

**Geodésica conforme**

La condición de que la curva parametrizada $t \mapsto \gamma_t$ sea una *geodésica conforme* equivale a que su tensor de Schouten sea idénticamente nulo:

$$L^\gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma_t \text{ geodésica conforme.}$$

Nuevamente, por las fórmulas de reparametrización (2.4) se observa que la curva será una pregeodésica conforme (geodésica salvo reparametrización) cuando su campo ortogonal de Schouten $\mathbb{L}^\gamma$ sea idénticamente nulo:

$$\mathbb{L}^\gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma_t \text{ pregeodésica conforme.}$$

En tal caso, $t \mapsto \gamma_t$ pasará a ser curva geodésica si se reparametriza por su parámetro proyectivo.

**Arco conforme**

Si $t \mapsto \gamma_t$ no es pregeodésica (i.e. $\mathbb{L}^\gamma$ no es idénticamente nulo), la curva admite un *arco conforme.* En términos del tensor de Schouten, el arco conforme de $t \mapsto \gamma_t$ está definido por

$$ds = \sqrt[4]{\frac{\mathbf{g}(\mathbb{L}^\gamma_t, \mathbb{L}^\gamma_t)}{\mathbf{g}(\gamma'_t, \gamma'_t)}}dt.$$

Obsérvese que, por las fórmulas (2.4) asociadas a la reparametrización, esto es lo mismo que decir que $s \mapsto \overline{\gamma}_s = \gamma_{t_s}$ estará parametrizada por su arco conforme cuando su tangente $\overline{\gamma}'_s$ y su ortogonal de Schouten $\mathbb{L}^{\overline{\gamma}}_s$ sean campos de igual longitud

$$\mathbf{g}(\overline{\gamma}'_s, \overline{\gamma}'_s) = \mathbf{g}(\mathbb{L}^{\overline{\gamma}}, \mathbb{L}^{\overline{\gamma}}) \Leftrightarrow ds \text{ arco conforme.}$$

[3]Véase [5] para la equivalencia entre la caracterización que aquí se da de los invariantes conformes de la curva y sus definiciones originales en [2] o [7], dadas mediante una conexión normal de Cartan.

**Curvaturas conformes**

Si $s \mapsto \overline{\gamma}_s = \gamma_{t_s}$ está parametrizada por su arco conforme, $\overline{\gamma}'_s$ y $\mathbb{L}^\gamma_s$ son de la misma longitud. Este par de campos se puede extender a una *referencia conforme móvil de Frênet*, de la forma:

$$\{E_1 = \overline{\gamma}', E_2 = \mathbb{L}^\gamma, E_3, ..., E_m\}_s,$$

con $\mathbf{g}(E_i, E_i) = \mathbf{g}(\overline{\gamma}'_s, \overline{\gamma}'_s)$, que se obtiene aplicando a $\{\overline{\gamma}', \mathbb{L}^{\overline{\gamma}}, \frac{D^{\overline{\gamma}}}{ds}\mathbb{L}^{\overline{\gamma}}, ..., (\frac{D^{\overline{\gamma}}}{ds})^{m-2}\mathbb{L}^{\overline{\gamma}}\}_s$ un proceso análogo al de ortonormalización de bases de Gram-Schmidt.

Las *curvaturas conformes* se definen a partir de la referencia de Frênet del modo habitual; son las funciones $(\lambda_2)_s, (\lambda_3)_s, ..., (\lambda_{m-1})_s$ que intervienen en las fórmulas:

$$\begin{cases} \frac{D^{\overline{\gamma}}}{ds}E_2 = \lambda_2 E_3 \\ \frac{D^{\overline{\gamma}}}{ds}E_i = -\lambda_{i-1}E_{i-1} + \lambda_i E_{i+1}, \quad {\scriptstyle (i=3,...,m-1)} \\ \frac{D^{\overline{\gamma}}}{ds}E_m = -\lambda_{m-1}\, E_{m-1} \end{cases}$$

Obsérvese que en este caso es $\frac{D^{\overline{\gamma}}}{ds}E_1 = \frac{D^{\overline{\gamma}}}{ds}\overline{\gamma}' = 0$.

### 3. Curvas en el ambiente conforme plano $\mathbb{R}^m$

Sea $t \mapsto \gamma_t \in \mathbb{R}^m$ una curva (regularmente) parametrizada en el espacio $\mathbb{R}^m$ con $m \geq 3$. El ambiente $\mathbb{R}^m$ tiene una estructura natural de variedad conforme plana, en donde el producto euclídeo habitual define una métrica $\mathbf{g}(.,.) =< .,. >$ de la estructura conforme. Obsérvese que en este caso la métrica $\mathbf{g}$ no tiene curvatura y su tensor asociado de Schouten $L \in \mathfrak{T}^0_2(\mathbb{R}^m)$ es idénticamente nulo.

Vamos a partir de una curva $t \mapsto \gamma_t \in \mathbb{R}^m$ que asumimos parametrizada por su longitud de arco $\mathbf{g}$-métrico ($\mathbf{g}(\gamma'_t, \gamma'_t) = 1$, $\forall t$). Sea $\{e_1 = \gamma'_t, e_2, ..., e_m\}_t$ la referencia ortonormal móvil de Frênet sobre $t \mapsto \gamma_t$, cuyos campos verifican:

$$\begin{cases} \frac{\nabla}{dt}e_1 = \kappa_1\, e_2, \\ \frac{\nabla}{dt}e_i = -\kappa_{i-1}\, e_{i-1} + \kappa_i\, e_{i+1}, \quad {\scriptstyle (i=2,...,m-1)} \\ \frac{\nabla}{dt}e_m = -\kappa_{m-1}\, e_{m-1} \end{cases}$$

para las funciones de curvatura $(\kappa_1)_t, ..., (\kappa_{m-1})_t$ asociadas a $\gamma_t$ como curva en un ambiente Riemanniano. Contamos entonces con las igualdades:

$$\gamma' = e_1; \quad \frac{\nabla}{dt}\gamma' = \kappa_1 e_2; \quad \frac{\nabla^2}{dt}\gamma' = -\kappa_1^2 e_1 + \kappa_1' e_2 + \kappa_1\kappa_2 e_3,$$

que simplifican las expresiones en (2.1) y (2.2) para $D^\gamma/dt$ y $L^\gamma$, dando lugar a las siguientes fórmulas:

(a) La conexión de Fermi–Walker de $\gamma_t$ es

$$\frac{D^\gamma}{dt}V = \frac{\nabla}{dt}V + \kappa_1\,(\mathbf{g}(e_2, V)\, e_1 - \mathbf{g}(e_1, V)e_2), \quad \forall V \in \mathfrak{X}(\gamma).$$

En particular,

$$\frac{D^\gamma}{dt}e_1 = 0, \quad \frac{D^\gamma}{dt}e_2 = \kappa_2 e_3, \quad \frac{D^\gamma}{dt}e_i = -\kappa_{i-1}e_{i-1} + \kappa_i\, e_{i+1}, \quad {\scriptstyle (i\geq 3)}$$

(b) El tensor conforme de Schouten de $\gamma_t$ es

$$L^\gamma(V) = -\tfrac{1}{2}\kappa_1^2\,\mathbf{g}(e_1, V) + \kappa_1'\,\mathbf{g}(e_2, V) + \kappa_1\kappa_2\,\mathbf{g}(e_3, V), \quad \forall V \in \mathfrak{X}(\gamma)$$

de modo que:

$$\begin{aligned} L^\gamma(\gamma_t') &= -\frac{1}{2}\kappa_1^2 \in C^\infty(\gamma); \\ \mathbb{L}^\gamma &= \kappa_1'\, e_2 + \kappa_1\kappa_2\, e_3 \in \mathfrak{X}(\gamma)^\perp. \end{aligned}$$

**Observación 3.1** *Combinando los resultados anteriores, podemos determinar la expresión del campo* $\frac{D^\gamma}{dt}\mathbb{L}^\gamma \in \mathfrak{X}(\gamma)^\perp$*:*

$$\begin{aligned} \frac{D^\gamma}{dt}\mathbb{L}^\gamma &= \frac{D^\gamma}{dt}\left(\kappa_1'\, e_2 + \kappa_1\kappa_2\, e_3\right) \\ &= \kappa_1''\, e_2 + \kappa_1'\,\frac{D^\gamma}{dt}e_2 + (\kappa_1'\kappa_2 + \kappa_1\kappa_2')\, e_3 + \kappa_1\kappa_2\,\frac{D^\gamma}{dt}e_3 \\ &= (\kappa_1'' - \kappa_1\kappa_2^2)\, e_2 + (2\kappa_1'\kappa_2 + \kappa_1\kappa_2')\, e_3 + \kappa_1\kappa_2\kappa_3 e_4. \end{aligned}$$

### 3.1. Invariantes conformes

Los resultados generales de la sección 2.1 anterior se aplican en particular a las curvas parametrizadas en el ambiente conforme plano $\mathbb{R}^m$.

**Parámetro proyectivo**

El parámetro proyectivo $\tau = \tau_t$ de la curva $t \mapsto \gamma_t$ se obtiene por integración de la ecuación

$$\mathcal{S}(\tau)_t = -L^\gamma(\gamma')_t = \tfrac{1}{2}(\kappa_1)_t^2.$$

**Geodésica conforme**

La curva $t \mapsto \gamma_t$ es una pregeodésica conforme si se cumple

$$\mathbb{L}^\gamma = 0 \Leftrightarrow \kappa_1'\, e_2 + \kappa_1\kappa_2\, e_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa_1 = cte \\ \kappa_2 = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, las geodésicas conformes de $\mathbb{R}^m$ coinciden con las curvas de curvatura $\kappa_1$ constante y $\kappa_2 = 0$. Estos son precisamente los círculos generalizados de $\mathbb{R}^m$, que más adelante tratamos con detalle. Parametrizándolos por su parámetro proyectivo son las geodésicas conformes de $\mathbb{R}^m$.

**Arco conforme**

El arco conforme de la curva $t \mapsto \gamma_t$ está definido por

$$ds = \sqrt[4]{\frac{\mathbf{g}(\mathbb{L}_t^{\gamma}, \mathbb{L}_t^{\gamma})}{\mathbf{g}(\gamma_t', \gamma_t')}}dt = \sqrt[4]{(\kappa_1')_t^2 + (\kappa_1\kappa_2)_t^2}dt.$$

siempre que la curva $\gamma_t$ no describa un círculo generalizado en $\mathbb{R}^m$.

**Curvaturas conformes: primera curvatura** $(\lambda_2)$

Las curvaturas conformes de la curva se definen mediante su referencia conforme de Frênet $\{E_1, ..., E_m\}$, que se construye a partir de las sucesivas derivadas del campo ortogonal de Schouten sobre una parametrización por el arco conforme. Estudiamos con detalle la primera de las curvaturas conformes, $(\lambda_2)$.

Sea $s \mapsto \overline{\gamma}_s = \gamma_{t_s}$ una parametrización por el arco conforme de la curva, obtenida a partir de un cambio de parámetro $s \mapsto t_s$ verificando:

$$t_s' = \frac{dt}{ds} = \mathbf{g}(\mathbb{L}_{t_s}^{\gamma}, \mathbb{L}_{t_s}^{\gamma})^{-1/4}.$$

Los primeros elementos de la referencia conforme de Frênet son por definición:

$$\begin{aligned}(E_1)_s &= \overline{\gamma}_s' = t_s'\,\gamma_{t_s}' \\ (E_2)_s &= \mathbb{L}_s^{\overline{\gamma}} = (t_s')^3\,\mathbb{L}_{t_s}^{\gamma}.\end{aligned}$$

Y dado que es $\frac{D^{\overline{\gamma}}}{ds}E_2 = \lambda_2 E_3$ y $\mathbf{g}(E_3, E_3) = \mathbf{g}(\overline{\gamma}_s', \overline{\gamma}_s') = (t_s')^2$, la primera curvatura conforme $(\lambda_2)_s$ verifica:

$$(\lambda_2)_s^2 = \frac{\mathbf{g}(\frac{D^{\overline{\gamma}}}{ds}E_2, \frac{D^{\overline{\gamma}}}{ds}E_2)}{\mathbf{g}(E_3, E_3)} = \frac{\mathbf{g}(\frac{D^{\overline{\gamma}}}{ds}\mathbb{L}^{\overline{\gamma}}, \frac{D^{\overline{\gamma}}}{ds}\mathbb{L}^{\overline{\gamma}})}{(t_s')^2}. \tag{3.1}$$

Necesitamos determinar $\mathbf{g}(\frac{D^{\overline{\gamma}}}{ds}\mathbb{L}^{\overline{\gamma}}, \frac{D^{\overline{\gamma}}}{ds}\mathbb{L}^{\overline{\gamma}})$, para el campo $\mathbb{L}_s^{\overline{\gamma}} = (t_s')^3\,\mathbb{L}_{t_s}^{\gamma} \in \mathfrak{X}(\overline{\gamma})$.

Haciendo uso de la fórmula de reparametrización (2.3) en la sección anterior, se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{D^{\overline{\gamma}}}{ds}\mathbb{L}^{\overline{\gamma}} &= \frac{D^{\overline{\gamma}}}{ds}\left((t_s')^3\,\mathbb{L}_{t_s}^{\gamma}\right) = 3(t_s')^2(t_s'')\mathbb{L}_{t_s}^{\gamma} + (t_s')^3\frac{D^{\gamma}}{ds}\mathbb{L}_{t_s}^{\gamma} \\ &= 3(t_s')^2(t_s'')\mathbb{L}_{t_s}^{\gamma} + (t_s')^3\left(t_s'\left.\frac{D^{\gamma}}{dt}\mathbb{L}_{t_s}^{\gamma}\right|_{t_{(s)}} - \frac{t_s''}{t_s'}\,\mathbb{L}_{t_s}^{\gamma}\right) \\ &= 2t_s''(t_s')^2\,\mathbb{L}_{t_s}^{\gamma} + (t_s')^4\frac{D^{\gamma}}{dt}\mathbb{L}_{t_s}^{\gamma}.\end{aligned}$$

Para hallar el valor de $\mathbf{g}(\frac{D^{\overline{\gamma}}}{ds}\mathbb{L}^{\overline{\gamma}}, \frac{D^{\overline{\gamma}}}{ds}\mathbb{L}^{\overline{\gamma}})$ tenemos en cuenta las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}(\mathbb{L}^{\gamma}_{t_s}, \mathbb{L}^{\gamma}_{t_s}) &= (t'_s)^{-4} \\
\mathbf{g}(\mathbb{L}^{\gamma}_{t_s}, \frac{D^{\gamma}}{dt}\mathbb{L}^{\gamma}_{t_s}) &= \tfrac{1}{2}\,\tfrac{d}{dt}\Big|_{t_s}\{\mathbf{g}(\mathbb{L}^{\gamma}_{t_s}, \mathbb{L}^{\gamma}_{t_s})\} = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{ds}{dt}\right)_{t_s}\tfrac{d}{ds}\Big|_{s}\{(t'_s)^{-4}\} \\
&= \tfrac{1}{2}(t'_s)^{-1}(-4(t'_s)^{-5}t''_s) = -2(t'_s)^{-6}t''_s
\end{aligned}$$

a través de las cuales llegamos a la identidad:

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}(\frac{D^{\overline{\gamma}}}{ds}\mathbb{L}^{\overline{\gamma}}_s, \frac{D^{\overline{\gamma}}}{ds}\mathbb{L}^{\overline{\gamma}}_s) &= 4(t''_s)^2(t'_s)^4\mathbf{g}(\mathbb{L}^{\gamma}_{t_s}, \mathbb{L}^{\gamma}_{t_s}) + 4t''_s(t'_s)^6\mathbf{g}(\mathbb{L}^{\gamma}_{t_s}, \frac{D^{\gamma}}{dt}\mathbb{L}^{\gamma}_{t_s}) \\
&\quad + (t'_s)^8\mathbf{g}(\frac{D^{\gamma}}{dt}\mathbb{L}^{\gamma}_{t_s}, \frac{D^{\gamma}}{dt}\mathbb{L}^{\gamma}_{t_s}) \\
&= -4(t''_s)^2 + (t'_s)^8\mathbf{g}(\frac{D^{\gamma}}{dt}\mathbb{L}^{\gamma}_{t_s}, \frac{D^{\gamma}}{dt}\mathbb{L}^{\gamma}_{t_s}).
\end{aligned}$$

Sustituyendo este resultado en la fórmula de partida (3.1), se obtiene una expresión para la curvatura conforme $(\lambda_2)_s$ en términos del campo ortogonal de Schouten $\mathbb{L}^{\gamma}_t$ sobre la curva $t \mapsto \gamma_t$ parametrizada por su longitud de arco $\mathbf{g}$-métrico:

$$(\lambda_2)^2_s = -\left(\frac{2t''_s}{t'_s}\right)^2 + (t'_s)^6\mathbf{g}(\frac{D^{\gamma}}{dt}\mathbb{L}^{\gamma}_{t_s}, \frac{D^{\gamma}}{dt}\mathbb{L}^{\gamma}_{t_s}) \tag{3.2}$$

siendo $t'_s = \mathbf{g}(\mathbb{L}^{\gamma}_{t_s}, \mathbb{L}^{\gamma}_{t_s})^{-1/4}$.

**Observación 3.2** *Para la deducción de esta fórmula no se ha utilizado el hecho de que el ambiente conforme sea el espacio plano $\mathbb{R}^m$. La fórmula es igualmente válida para un ambiente conforme general $M$, siempre que la parametrización de partida $t \mapsto \gamma_t$ sea por el arco $\mathbf{g}$-métrico.*

En el ambiente conforme $\mathbb{R}^m$, se tiene que es $\mathbb{L}^{\gamma}_t = (\kappa'_1\, e_2 + \kappa_1\kappa_2\, e_3)_t$ y por lo tanto $\mathbf{g}(\mathbb{L}^{\gamma}_t, \mathbb{L}^{\gamma}_t) = (\kappa'_1)^2_t + (\kappa_1\kappa_2)^2_t$. Obtenemos así que[4]:

$$t'_s = \mathbf{g}(\mathbb{L}^{\gamma}_{t_s}, \mathbb{L}^{\gamma}_{t_s})^{-1/4} = ((\kappa'_1)^2_{t_s} + (\kappa_1\kappa_2)^2_{t_s})^{-1/4}$$

Derivando esta última identidad obtenemos también:

$$2t''_s = -(t'_s)^6\left(\kappa'_1\kappa''_1 + \kappa_1\kappa'_1\kappa_2^2 + \kappa_1^2\kappa_2\kappa'_2\right)_{t_s}$$

[4]Hacemos notar que aquí y en adelante se hace uso de la notación:

$$(\kappa'_i)_{t_s} = \frac{d\kappa_i}{dt}\Big|_{t_s}, \quad (\kappa''_i)_{t_s} = \frac{d^2\kappa_i}{dt^2}\Big|_{t_s}, \ldots$$

Así mismo, de la observación 3.1 que describe $\frac{D^\gamma}{dt}\mathbb{L}^\gamma$, conocemos que es

$$\mathbf{g}(\frac{D^\gamma}{dt}\mathbb{L}^\gamma, \frac{D^\gamma}{dt}\mathbb{L}^\gamma)_{t_s} = (\kappa_1'' - \kappa_1\kappa_2^2)^2_{t_s} + (2\kappa_1'\kappa_2 + \kappa_1\kappa_2')^2_{t_s} + (\kappa_1\kappa_2\kappa_3)^2_{t_s}\,.$$

Al sustituir estas igualdades en la fórmula (3.2), que puede verse como:

$$(\lambda_2)^2_s = (t_s')^{10}\left(-\left(\frac{2t_s''}{(t_s')^6}\right)^2 + (t_s')^{-4}\,\mathbf{g}(\frac{D^\gamma}{dt}\mathbb{L}^\gamma_{t_s}, \frac{D^\gamma}{dt}\mathbb{L}^\gamma_{t_s})\right),$$

y simplificando posteriormemente, se concluye con el siguiente resultado:

**Proposición 3.3** *La primera curvatura conforme $(\lambda_2)$ de la curva $t \mapsto \gamma_t \in \mathbb{R}^m$, parametrizada por su longitud de arco $\mathbf{g}$-métrico, viene dada por:*

$$(\lambda_2)^2_t = \frac{\left(\kappa_1'(2\kappa_1'\kappa_2 + \kappa_1\kappa_2') - \kappa_1\kappa_2(\kappa_1'' - \kappa_1\kappa_2^2)\right)^2_t}{((\kappa_1')^2 + (\kappa_1\kappa_2)^2)^{5/2}_t} + \frac{(\kappa_1\kappa_2\kappa_3)^2_t}{((\kappa_1')^2 + (\kappa_1\kappa_2)^2)^{3/2}_t} \tag{3.3}$$

*siendo $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ las primeras curvaturas $\mathbf{g}$-métricas de la curva.*

**Observación 3.4** *Si la dimensión ambiente es $m = 3$, la curva $t \mapsto \gamma_t$ sólo tiene asociada la primera de las curvaturas conformes, que está dada por la expresión*

$$(\lambda_2)_t = \frac{\kappa_1'(2\kappa_1'\kappa_2 + \kappa_1\kappa_2')_t - \kappa_1\kappa_2(\kappa_1'' - \kappa_1\kappa_2^2)_t}{((\kappa_1')^2 + (\kappa_1\kappa_2)^2)^{5/4}_t}.$$

Los resultados que hemos obtenido describen la relación que existe entre las curvaturas métricas $\kappa_i$ de una curva en $\mathbb{R}^m$ y su curvatura conforme $\lambda_2$, definida originalmente por Cartan en [2] y tratada en trabajos como el de Sulanke [7].

A. Montesinos, M.C. Romero y E. Sanabria proponen en [4] una definición alternativa para las curvaturas conformes de una curva en $\mathbb{R}^m$, definidas a partir de los radios y los centros de las llamadas $i$-esferas osculatrices de la curva. Ahora, la expresión explícita de la clásica curvatura conforme $\lambda_2$ que se da en (3.3) nos permite asegurar, tras un sencillo cálculo, que esta última coincide con la 2-curvatura conforme de [4] dada por las esferas osculatrices de una curva en $\mathbb{R}^m$ $(m \geq 3)$.[5]

[5]Esta coincidencia era ya conocida para $m = 3$. El caso del espacio tridimensional se ha tratado en el artículo de G. Cairns, R.W. Sharpe y L. Webb [1], en donde se ofrece ya la descripción explícita que aquí hemos obtenido para la curvatura conforme $\lambda_2$ de una curva en $\mathbb{R}^3$ en términos de sus curvaturas métricas.

### 3.2. Ejemplo 1: Círculos generalizados

Hemos visto que las pregeodésicas conformes de $\mathbb{R}^m$ se corresponden con la familia de curvas que tienen únicamente curvatura de primer orden $\kappa_1$ y además ésta es constante:

$$\kappa_1 = \alpha \ (cte); \qquad \kappa_i = 0, \ \forall i \geq 2.$$

Las curvas de esta familia se conocen como *círculos generalizados* de $\mathbb{R}^m$, englobando con este término a las rectas (si $\kappa_1 = 0$) y a los círculos en el sentido habitual (si $\kappa_1 = \alpha > 0$).

Para estas curvas no es posible definir el arco conforme ni tampoco las curvaturas conformes asociadas. Sin embargo, admiten la definición de un parámetro proyectivo $\tau$, mediante el cual pasan a ser geodésicas conformes de $\mathbb{R}^m$.

Sea $t \mapsto \gamma_t$ un círculo generalizado parametrizado por su longitud de arco, con curvatura $\kappa_1 = \alpha \geq 0$. El parámetro proyectivo asociado $\tau = \tau_t$ está caracterizado por la ecuación

$$\mathcal{S}(\tau)_t = \frac{1}{2}\,(\kappa_1)_t^2 = \frac{1}{2}\,\alpha^2 \ (cte).$$

La resolución de esta ecuación se ve facilitada por ser $\kappa_1$ constante, y da lugar a dos tipos de soluciones:

$$\begin{aligned} &\text{Si } \alpha = 0: \quad \tau_t = \frac{at+b}{ct+d} && \text{(p. proyectivo de la recta);} \\ &\text{Si } \alpha > 0: \quad \tau_t = \frac{a\sin(\frac{\alpha t}{2}) + b\cos(\frac{\alpha t}{2})}{c\sin(\frac{\alpha t}{2}) + d\cos(\frac{\alpha t}{2})} && \text{(p. proyectivo del círculo).} \end{aligned}$$

para $ad - bc \neq 0$.

### 3.3. Ejemplo 2: Hélices

Vamos a estudiar tambien el caso particular de las hélices en $\mathbb{R}^3$. Consideramos la hélice parametrizada por su longitud de arco dada por:

$$\gamma_t = \left( \alpha \cos \tfrac{t}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \alpha \sin \tfrac{t}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \tfrac{t\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \right) \qquad \alpha > 0, \beta \neq 0.$$

La referencia ortonormal de Frênet sobre $t \mapsto \gamma_t$ está formada por los campos:

$$\begin{aligned} (e_1)_t &= \left( \tfrac{-\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \sin \tfrac{t}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \tfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \cos \tfrac{t}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \tfrac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \right) \\ (e_2)_t &= \left( -\cos \tfrac{t}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, -\sin \tfrac{t}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, 0 \right) \\ (e_3)_t &= \left( \tfrac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \sin \tfrac{t}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \tfrac{-\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \cos \tfrac{t}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \tfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \right) \end{aligned}$$

y sus curvaturas métricas vienen dadas por las funciones:

$$\kappa_1 = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}; \qquad \kappa_2 = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}.$$

Si aplicamos los cálculos anteriores a este ejemplo concreto obtenemos los siguientes resultados:

1. La conexión de Fermi–Walker de la hélice $\gamma_t$ es:

$$\frac{D^\gamma}{dt}V = \frac{\nabla}{dt}V + \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}\left(\langle e_2, V\rangle\ e_1 - \langle e_1, V\rangle\ e_2\right), \quad \forall V \in \mathfrak{X}(\gamma).$$

2. El tensor conforme de Schouten de la hélice $\gamma_t$ es:

$$L^\gamma(V) = \frac{\alpha}{\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2}\left( -\tfrac{1}{2}\ \alpha\ \langle V, e_1\rangle + \beta\ \langle V, e_3\rangle\right), \quad \forall V \in \mathfrak{X}(\gamma),$$

de modo que:

$$L^\gamma(\gamma')_t = \frac{-\alpha^2}{2\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2} \in C^\infty(\gamma)$$
$$\mathbb{L}^\gamma = \frac{\alpha\beta}{\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2}\, e_3 \in \mathfrak{X}(\gamma)^\perp.$$

3. El parámetro proyectivo $\tau = \tau_t$ viene dado por las soluciones de la ecuación

$$\mathcal{S}(\tau)_t = \frac{1}{2}\left(\kappa_1\right)_t^2 = \frac{\alpha^2}{2\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2}\ (cte)$$

Nuevamente es la curvatura $\kappa_1$ constante (y no nula), de modo que las soluciones de esta ecuación son

$$\tau_t = \frac{a\sin\left(\frac{\alpha t}{2(\alpha^2+\beta^2)}\right) + b\cos\left(\frac{\alpha t}{2(\alpha^2+\beta^2)}\right)}{c\sin\left(\frac{\alpha t}{2(\alpha^2+\beta^2)}\right) + d\cos\left(\frac{\alpha t}{2(\alpha^2+\beta^2)}\right)}$$

para $ad - bc \neq 0$, y definen el cambio al parámetro proyectivo $\tau$ de la hélice.

4. El arco conforme es

$$ds = \sqrt[4]{\frac{\alpha^2\beta^2}{\left(\alpha^2+\beta^2\right)^4}}dt = \frac{\sqrt{\alpha\,|\beta|}}{\alpha^2+\beta^2}dt.$$

de modo que

$$t'_s = \frac{\alpha^2+\beta^2}{\sqrt{\alpha\,|\beta|}}.$$

Esto significa que la reparametrización que pasa del parámetro arco métrico $t$ al parámetro arco conforme $s$ en el caso de la hélice es

$$s \mapsto t_s = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\sqrt{\alpha\,|\beta|}}\, s + c.$$

5. Finalmente, la primera curvatura conforme de la hélice $t \mapsto \gamma_t$ es:

$$(\lambda_2)_t = \frac{(\kappa_1^2 \kappa_2^3)_t}{(|\kappa_1 \kappa_2|)_t^{5/2}} = \frac{\kappa_2}{|\kappa_1 \kappa_2|^{1/2}} = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha\,|\beta|}}$$

y concluimos que las hélices son curvas en $\mathbb{R}^3$ con curvatura conforme constante (no nula), que toma el valor:

$$\text{si } \beta > 0: \quad (\lambda_2) = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} > 0;$$
$$\text{si } \beta < 0: \quad (\lambda_2) = -\sqrt{\frac{|\beta|}{\alpha}} < 0.$$

## References


[1] G. Cairns, R.W. Sharpe, L. Webb: *Conformal invariants for curves and surfaces in three dimensional space forms.* Rocky Mountain J. Math. **24** (1994), 933–959.

[2] E. Cartan: *Les espaces a connexion conforme.* Ann. Soc. Math. France **2** (1923), 171–221.

[3] S. Kobayashi: *Transformation groups in differential geometry.* Springer-Verlag, Berlin 1972.

[4] A. Montesinos, M.C. Romero, E. Sanabria: *Conformal curvatures of curves in* $\mathbb{R}^{n+1}$. Indagationes Math. **12** (2001), 369–382.

[5] B. Salvador: *Paralelismo y geodésicas en variedades conformes.* Tesis Doctoral, Univ. Complutense de Madrid, 2003.

[6] S. Sternberg: *Lectures on differential geometry.* Prentice Hall Inc., 1964.

[7] R. Sulanke: *Submanifolds of the Möbius space II, Frênet formulas and curves of constant curvature.* Math. Nachr. **100** (1981), 235–247.