COHOMOLOGÍA E INTEGRACIÓN

Pedro Calvo-Sotelo   Guillermo Gallego   Pablo Manchón

Resumen

En estas notas introducimos la denominada *cohomología con soportes compactos*, que nos permitirá definir la integral en las clases de cohomología de grado máximo. Después demostraremos un teorema que conduce a la noción de *grado de Brouwer*, de la que comentaremos algunos resultados básicos. Terminamos describiendo el profundo *Teorema de Gauss-Bonnet*.

1. Cohomología con soportes compactos

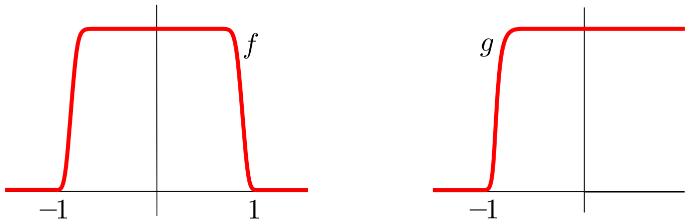
Sea $M \subset \mathbb{R}^p$ una variedad diferenciable de dimensión m. Se dice que una forma diferencial ω de grado k *tiene soporte compacto* si es idénticamente nula fuera de un compacto K de M. Se denota $\Gamma_c^k(M)$ al conjunto de las formas diferenciales de grado k *con soporte compacto*.

Recordamos que una forma diferencial es *cerrada* si su diferencial exterior es nula, y que una forma diferencial es *exacta* si es la diferencial exterior de otra, que llamamos *primitiva* suya. Denotaremos $Z_c^k(M)$ al conjunto de las formas diferenciales cerradas de grado k con soporte compacto y $B_c^k(M)$ al conjunto de las formas diferenciales exactas de grado k que tienen alguna primitiva con soporte compacto.

Nótese que se tienen las siguientes inclusiones

$$\Gamma^k(M) \supset \Gamma_c^k(M) \supset Z_c^k(M) \supset B_c^k(M).$$

Exigir que la primitiva de una forma exacta tenga soporte compacto no es algo superfluo puesto que existen formas exactas con soporte compacto cuyas primitivas no tiene soporte compacto. Por ejemplo, una función meseta $f \equiv 1$ en $(-1,1)$ y $f \equiv 0$ fuera del compacto $[-1,1]$ tiene una primitiva de la forma: $g(t) = \int_{-\infty}^{t} f(s)ds$, que es distinta de 0 para todo $t > -1$, luego $f dt$ es una forma exacta con una primitiva g que no tiene soporte compacto, ni lo tiene ninguna otra g+cte.



Se define el *k-ésimo grupo de cohomología de de Rham con soportes compactos* como el espacio vectorial cociente

$$H_c^k(M) = Z_c^k(M) / B_c^k(M).$$

Si M es compacta entonces simplemente $H^k_c(M) = H^k(M)$. Para variedades no compactas del tipo denominado *finito* se puede demostrar que la dimensión de $H^k_c(M)$ es finita. Esta dimensión $\dim(H^k_c(M)) = \beta_k$ se denomina *k-ésimo número de Betti.* Esta cohomología es un objeto de naturaleza topológica, lo que es un resultado profundo de de Rham. Por ejemplo, se cumple que la *característica de Euler de M* es $\chi(M) = \sum_k (-1)^k \beta_k$.

2. Integral en cohomología

Sea M una variedad diferenciable orientada, conexa y sin borde, de dimensión m. Para formas de grado $k = m$ tenemos la igualdad $Z^m_c(M) = \Gamma^m_c(M)$, ya que la diferencial exterior de cualquier forma de grado máximo es nula. Nos vamos a centrar en $H^m_c(M) = \Gamma^m_c(M)/B^m_c(M)$.

Teorema 2.1. *La aplicación*

$$\int_M : H^m_c(M) \longrightarrow \mathbb{R} : [\omega] \longmapsto \int_M \omega$$

es un isomorfismo lineal.

Demostración. La aplicación está bien definida. En efecto $[\omega] = [\omega']$ significa que $\omega - \omega' = \mathrm{d}\alpha$, donde α es una forma con soporte compacto. Aplicando el Teorema de Stokes tenemos $\int_M \mathrm{d}\alpha = \int_{\partial M} \alpha$. Como M es sin borde, $\partial M = \varnothing$ luego

$$\int_M \omega - \omega' = \int_M \mathrm{d}\alpha = \int_\varnothing \alpha = 0$$

y así $\int_M \omega = \int_M \omega'$.

Por las propiedades de la integral, esta aplicación es una forma lineal, y es no nula. En efecto, basta tomar unas coordenadas $x = (x_1, \dots, x_m)$ con un dominio D difeomorfo a $\mathbb{R}^m$ y una función diferenciable $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ con soporte compacto e integral $\int_{\mathbb{R}^m} f \neq 0$. Entonces la forma diferencial $\omega = (f \circ x)\mathrm{d}x$ se puede extender por cero a todo M y su integral es $\int_M \omega = \int_{\mathbb{R}^m} f \neq 0$.

Puesto que $\int_M : H^m_c \to \mathbb{R}$ es una forma lineal no nula, demostrar el teorema es equivalente a demostrar que la dimensión de H^m_c es 1. Para probar esto, elegimos como antes una forma $\omega \in \Gamma^m_c(M)$ con integral no nula cuyo soporte esté contenido en un abierto $D \subset M$ difeomorfo a $\mathbb{R}^m$. Queremos ver que la clase de cohomología $[\alpha]$ de cualquier $\alpha \in \Gamma^m_c(M)$ es proporcional a $[\omega]$.

Una primera reducción que podemos hacer es suponer que el soporte de α está contenido en un abierto difeomorfo a $\mathbb{R}^m$. En efecto, recubriendo M con abiertos de ese tipo, y tomando una partición diferenciable de la unidad escribimos $\alpha = \sum_{i=1}^r \theta_i \alpha$ de manera que el soporte de cada sumando está contenido en un abierto del recubrimiento elegido (la suma es finita por ser compacto el soporte de α). Luego para mostrar que $[\omega]$ y $[\alpha]$ son proporcionales basta probar que cada $[\theta_i \alpha]$ es proporcional a $[\omega]$.

Es más, podemos suponer que el soporte de α está contenido en D. En efecto, puesto que M es conexa, existe una cadena $U_0, U_1, \dots, U_r = D$ de abiertos difeomorfos a $\mathbb{R}^m$, con el soporte de α contenido en U_0 y $U_i \cap U_{i+1} \neq \varnothing$. Para cada $i = 1, \dots, r$, sea $\omega_i \in \Gamma^m_c(M)$ una forma diferencial con integral no nula y con soporte contenido en $U_{i-1} \cap U_i$. Si la proporcionalidad se cumple para formas con soportes en el mismo abierto difeomorfo a $\mathbb{R}^m$, resulta sucesivamente que $[\alpha]$ es proporcional a $[\omega_1]$, que lo es a $[\omega_2]$, …, que lo es a $[\omega_r]$, que lo es a $[\omega]$.

Con todo esto, supondremos que ω tiene soporte contenido en D. Además, puesto que cualquier dato con soporte compacto contenido en D, se puede extender por cero a todo M, podemos también suponer que $M = D$ y finalmente que $M = \mathbb{R}^m$. En esta situación, buscamos un escalar $c \in \mathbb{R}$ tal que la forma $\alpha - c\omega$ tenga una primitiva con soporte compacto. Pero

$$\alpha - c\omega = f \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_m,$$

donde f es una función diferenciable con soporte compacto e integral nula. Luego decir que $\alpha - c\omega$ es exacta es decir que f es la divergencia de de un campo X y su primitiva es $\det(X, \ldots)$. Entonces basta mostrar que como f tiene soporte compacto e integral nula, se puede encontrar el campo X también con soporte compacto.

Probaremos por inducción sobre $n (\leq m)$ lo siguiente:

Sea $f(x) = f(x_1, \ldots, x_m)$ una función diferenciable con soporte compacto. Denotamos $x = (y, z)$ con $y = (x_1, \ldots, x_n)$, $z = (x_{n+1}, \ldots, x_m)$, y suponemos que $\int_{\mathbb{R}^n} f(y, z) dy \equiv 0$. Entonces

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_i}(x)$$

para n funciones con soporte compacto $X_1(x), \ldots, X_n(x)$.

Para $n = 1$ basta tomar

$$X_1(x) = \int_{-\infty}^{x_1} f(t, z) dt,$$

que tiene soporte compacto: si x_1 es suficientemente pequeño el integrando es $\equiv 0$, y si x_1 es suficientemente grande,

$$X_1(x) = \int_{-\infty}^{x_1} f(t, z) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, z) dt = 0.$$

Supongamos ahora que $n \geq 2$. Denotamos $y' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, de manera que $x = (y', x_n, z)$. Sea $\varphi(y')$ una función diferenciable con soporte compacto e integral $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi(y') dy' \equiv 0$. La función g siguiente

$$g(x) = f(x) - h(x), \quad h(x) = \varphi(y') \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(u, x_n, z) du$$

tiene soporte compacto, por tenerlo f y φ, y por construcción $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g(y', x_n, z) dy' \equiv 0$. En consecuencia, por hipótesis de inducción, existen $n - 1$ funciones con soporte compacto $X_1(x), \ldots, X_{n-1}(x)$ tales que

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial X_i}{\partial x_i}(x).$$

Por otra parte, podemos escribir $h(x) = \dfrac{\partial X_n}{\partial x_n}(x)$ siendo

$$X_n(x) = X_n(y', x_n, z) = \varphi(y') \int_{-\infty}^{x_n} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(u, t, z) du \right) dt,$$

función que tiene soporte compacto. En efecto, de tenerlo f y φ deducimos:

1. Si $||y'||$ es suficientemente grande, $\varphi(y') = 0$;
2. si $||z||$ es suficientemente grande o x_n es suficientemente pequeño, se tiene $f(u,t,z) = 0$ en el integrando;
3. si x_n es suficientemente grande
$$\int_{-\infty}^{x_n} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(u,t,z)du \right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(u,t,z)du \right) dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(y,z)dy = 0.$$

De esta manera las funciones $X_1, \dots, X_n$ tienen soporte compacto, y $f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_i}(x)$. $\square$

El resultado que acabamos de demostrar se puede reenunciar diciendo que toda forma con integral nula es exacta. Esto se puede entender como el *teorema de Stokes recíproco* para variedades sin borde.

3. Fórmula del cambio de variable

Sea $f : M \longrightarrow N$ una aplicación diferenciable entre dos variedades sin borde, orientadas, conexas de dimensión m. Tenemos que f induce la aplicación:

$$\begin{aligned} f^* : \Gamma_c^m(N) &\longrightarrow \Gamma^m(M) \\ \omega &\longmapsto f^*\omega \end{aligned}$$

pero $f^*\omega$ no tiene por qué tener soporte compacto. Un ejemplo sería el siguiente:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto s = \tfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}; \quad \omega = \mu(s)\mathrm{d}s,$$

donde μ es una función meseta que es $\equiv 1$ para $|s| \leq 1$ y es $\equiv 0$ para $|s| \geq 2$. Es claro que ω tiene soporte compacto, pero como la imagen de f se concentra en $(-1,1)$ resulta que

$$f^*\omega = \tfrac{1}{(1+t^2)^{3/2}}\mathrm{d}t$$

que no se anula en ningún punto.

Esta dificultad se resuelve con la importante noción siguiente:

Definición 3.1. Una aplicación $f : M \to N$ se llama *propia* cuando la preimagen de todo conjunto compacto es también un conjunto compacto.

Supongamos ahora que f es propia. En ese caso, si $\omega \in \Gamma_c^m(N)$ tenemos que $\mathrm{sop}(\omega) = \{y \in N : \omega_y \neq 0\} \subset K$, con K compacto. Ahora, la propia definición

$$\omega_{f(x)}(f_*(u_1), \dots, f_*(u_m)) = (f^*\omega)_x(u_1, \dots, u_m), u_i \in T_xM,$$

implica que si $(f^*\omega)_x \neq 0$ entonces $\omega_{f(x)} \neq 0$. Es decir, $\mathrm{sop}(f^*\omega) = \{x \in M : (f^*\omega)_x \neq 0\} \subset f^{-1}(\mathrm{sop}(\omega)) \subset f^{-1}(K)$. Como f es propia, $f^{-1}(K)$ es compacto por lo que $f^*\omega \in \Gamma_c^m(M)$, y así f induce una aplicación bien definida

$$f^* : \Gamma_c^m(N) \longrightarrow \Gamma_c^m(M).$$

Consideremos f^* en las clases de cohomología. Si $[\omega] = [\omega']$, es decir, si $\omega - \omega' = \mathrm{d}\alpha$ para cierta forma α *con soporte compacto,* entonces

$$f^*\omega - f^*\omega' = f^*(\omega - \omega') = f^*\mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}f^*\alpha.$$

Aquí de nuevo, por ser f propia, la forma $f^*\alpha$ tiene soporte compacto, con lo que $[f^*\omega] = [f^*\omega']$ en $H_c^m(M)$. En consecuencia podemos definir la aplicación lineal

$$f^* : H_c^m(N) \to H_c^m(M) : [\omega] \mapsto [f^*\omega].$$

Esta aplicación, junto con las identificaciones $H_c^m(M) \cong_{\int_M} \mathbb{R}$ e $H_c^m(N) \cong_{\int_N} \mathbb{R}$ que nos proporciona el Teorema 2.1, da lugar al cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd}
H_c^m(M) \arrow[r, phantom, "\cong_{\int_M}"] & \mathbb{R} & {[f^*\omega]} \arrow[r, mapsto] & \int_M f^*\omega = \delta(f)\int_N \omega \\
H_c^m(N) \arrow[u, "f^*"] \arrow[r, phantom, "\cong_{\int_N}"] & \mathbb{R} \arrow[u, "\delta(f)"'] & {[\omega]} \arrow[u, mapsto] \arrow[r, mapsto] & \int_N \omega \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

donde la aplicación que cierra el diagrama a la derecha es una forma lineal de $\mathbb{R}$ y por tanto una homotecia de razón $\delta(f) \in \mathbb{R}$.

Proposición 3.2. *El número real $\delta(f)$ es un invariante de f que proporciona la* fórmula de cambio de variable

$$\int_M f^*\omega = \delta(f)\int_N \omega.$$

En la sección siguiente precisamos el valor de este invariante $\delta(f)$.

4. Grado de Brouwer

Dada una aplicación f diferenciable y propia entre dos variedades M y N con las mismas condiciones que en la sección precedente:

Definición 4.1. El número real $\delta(f)$ se le denomina *grado de Brouwer de f*.

Según 3.2, tenemos

$$\delta(f) = \int_M f^*\omega \Big/ \int_N \omega$$

para cualquier forma $\omega \in \Gamma_c^m(N)$. Por tanto, podemos calcular el grado eligiendo adecuadamente la forma ω.

El *teorema de Sard* nos asegura que f tiene *valores regulares,* esto es, existen puntos $a \in N$ tales que para todo $x \in f^{-1}(a)$ la derivada $d_x f$ es suprayectiva, luego en nuestro caso es un isomorfismo lineal. Por el *teorema de inversión local*, f es un difeomorfismo local en x y en particular será localmente inyectiva en x. Entonces x es un punto aislado en $f^{-1}(a)$, luego $f^{-1}(a)$ es discreto y compacto (por ser f propia), lo que implica que $f^{-1}(a)$ es finito, digamos $f^{-1}(a) = \{a_1, \dots, a_r\}$.

Sean $U_i, 1 \leq i \leq r$, dominios de coordenadas disjuntos tales que $a_i \in U_i$ y $f|_{U_i}$ es un difeomorfismo sobre un entorno abierto V_i de a. En cada U_i, f puede preservar o invertir la orientación, lo que distiguimos denotando $\varepsilon_i = +1$ o -1. Ahora tomamos una forma con integral no nula $\omega \in \Gamma_c^m(N)$ y soporte contenido en un dominio de coordenadas $V \subset \bigcap_i V_i$. Afirmamos que reduciendo V se tiene $f^{-1}(V) \subset \bigcup_i U_i$, con lo que $f^*\omega$ se anula fuera de los U_i, y

$$\int_M f^*\omega = \sum_i \int_{U_i} f^*\omega.$$

Probamos nuestra afirmación como sigue. Primero tomamos V contenido en un entorno compacto K de a. Como f es propia, $f^{-1}(K)$ será compacto, e intersecando con el conjunto cerrado $M \setminus \bigcup_i U_i$ obtenemos otro compacto $L = f^{-1}(K) \setminus \bigcup_i U_i$, que no contiene a ninguna de las preimágenes a_i. Resulta que la imagen $f(L)$ es un conjunto compacto que no contiene a, luego $N \setminus f(L)$ es un entorno de a, y podemos reducir V para que esté contenido en ese entorno. Ahora es ya una comprobación conjuntista inmediata que efectivamente $f^{-1}(V) \subset \bigcup_i U_i$.

Probado lo anterior, aplicamos el teorema de cambio de variable habitual (es decir, la definición misma de integral en una variedad) y tenemos:

$$\sum_i \int_{U_i} f^*\omega = \sum_i \varepsilon_i \int_V \omega = \left(\sum_i \varepsilon_i\right) \int_N \omega.$$

Con lo que el grado de una aplicación diferenciable es

$$\delta(f) = \sum_i \varepsilon_i.$$

Hemos demostrado así:

Proposición 4.2. *El grado de una aplicación diferenciable es igual al número de preimágenes de un valor regular cualquiera elegido, contadas con signo según la orientación. En particular, es un número entero.*

Por ejemplo, si $f : M \to N$ no es suprayectiva, siempre podemos tomar como valor regular un punto $a \in N \setminus f(M)$ y entonces $f^{-1}(a) = \varnothing$, con lo que $\delta(f) = 0$.

5. Aplicación de Gauss y elemento de volumen

Supongamos que $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ es una hipersuperficie orientada, compacta, sin borde y conexa de dimensión m. Al ser M una hipersuperficie, que sea orientable es equivalente a que exista un *campo normal (unitario) global*

$$\nu : M \longrightarrow \mathbb{S}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$$

conocido como *aplicación de Gauss*, y para cada $x \in M$ la derivada es un endomorfismo lineal

$$d_x\nu : T_xM \longrightarrow T_{\nu(x)}\mathbb{S}^m = \{\text{hiperplano perpendicular a } \nu(x)\} = T_xM$$

llamado *endomorfismo de Weingarten.* Se puede entender que este endomorfismo refleja cómo M se "curva" en el punto x, y su determinante $K(x) = \det(d_x\nu)$ es una medida de ello, que se llama *curvatura de Gauss.*

El campo normal ν se elige compatible con la orientación de la hipersuperficie, y consideramos la forma diferencial de grado máximo $\Omega_M = \det(\nu, \cdot) \in \Gamma^m(M)$ (como la variedad es compacta la cohomología ordinaria coincide con la de soporte compacto). Esta forma $\mathit{\Omega}_M$ una *nunca nula, positiva y mide volúmenes en* M.

Para explicar esto fijamos cualquier punto $x \in M$, en cuyo espacio tangente $T_xM \subset \mathbb{R}^{m+1}$ tenemos seleccionada una orientación, y en el que consideraremos el producto escalar euclídeo de $\mathbb{R}^{m+1}$. Entonces tomamos una base ortonormal positiva cualquiera $\{u_1, \ldots, u_m\}$ de ese espacio tangente y resulta que $\{\nu(x), u_1, \ldots, u_m\}$ es un base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^{m+1}$ (por la compatibilidad de ν con la orientación de M). En consecuencia:

$$\mathit{\Omega}_{M,x}(u_1, \ldots, u_m) = \det(\nu(x), u_1, \ldots, u_m) = +1 > 0.$$

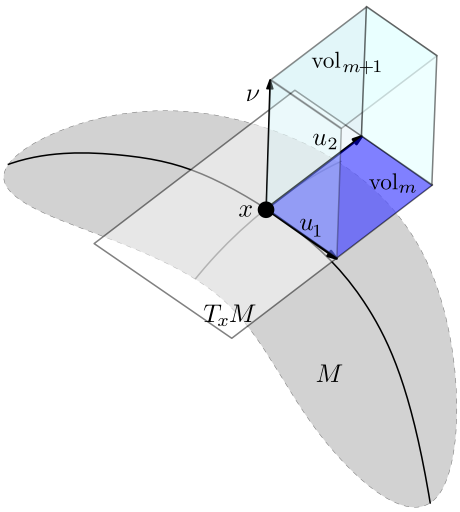
En términos de volúmenes, como $\nu(x)$ es perpendicular a T_xM, tenemos que

$$\det(\nu(x), u_1, \ldots, u_m) = \mathrm{vol}_{m+1}P(\nu(x), u_1, \ldots, u_m) = \|\nu\|\mathrm{vol}_m P(u_1, \ldots, u_m),$$

donde denotamos por $\mathrm{vol}_k P(v_1, \ldots, v_k)$ el volumen k-dimensional del paralelepípedo que forman k vectores v_k de $\mathbb{R}^{m+1}$. Puesto que ν es unitario, $||\nu(x)|| = 1$, y concluimos

$$\mathit{\Omega}_{M,x}(u_1, \ldots, u_m) = \mathrm{vol}_m P(u_1, \ldots, u_m).$$

Esto hemos expresado antes con la afirmación de que $\mathit{\Omega}_M$ mide volúmenes. La figura ilustra el argumento.



De manera natural pues, definimos:

Definición 5.1. El *volumen* de la variedad M es $\mathrm{vol}(M) = \displaystyle\int_M \Omega_M$.

Por ejemplo, el volumen de la esfera $\mathbb{S}^m$ se calcula con la forma

$$\Omega_{\mathbb{S}^m,a} = \sum_i (-1)^{i-1} a_i \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i-1} \wedge \mathrm{d}x_{i+1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{m+1}.$$

Se comprueba inmediatamente que con esta definición que los volúmenes de la circunferencia y de la esfera (es decir, su longitud y su área) son por supuesto 2π y 4π respectivamente.

6. Teorema de Gauss-Bonnet

Vamos a explorar un poco más la forma Ω que acabamos de introducir. Aplicando la fórmula 3.2 del cambio de variable a la aplicación de Gauss $\nu : M \to \mathbb{S}^m$ obtenemos

$$\int_M \nu^* \Omega_{\mathbb{S}^m} = \delta(\nu) \int_{\mathbb{S}^m} \Omega_{\mathbb{S}^m} = \delta(\nu) \mathrm{vol}(\mathbb{S}^m).$$

Vamos a ver qué forma es $\nu^* \Omega_{\mathbb{S}_m}$. Sea $x \in M$. Como $\nu_* : T_x M \longrightarrow T_{\nu(x)} \mathbb{S}^m = T_x M$, fijamos una base $\{u_1, \dots, u_m\}$ de $T_x M$, de modo que la matriz $(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq m}$ de ν_* respecto de esa base está dada por

$$\nu_*(u_j) = \sum_j a_{ij} u_i.$$

En particular, la curvatura de Gauss es $K(x) = \det(a_{ij})$. Ahora

$$\begin{aligned}
(\nu^* \Omega_{\mathbb{S}^m})_x(u_1, \dots, u_m) &= \Omega_{\mathbb{S}^m, \nu(x)}(\nu_* u_1, \dots, \nu_* u_m) = \det(\nu(x), \nu_* u_1, \dots, \nu_* u_m) \\
&= \det(\nu(x), \Sigma_i a_{i1} u_i, \dots, \Sigma_i a_{im} u_i) = \det(a_{ij}) \det(\nu(x), u_1, \dots, u_m) \\
&= K(x) \Omega_{M,x}(u_1, \dots, u_m).
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la fórmula del cambio de variable previa obtenemos la igualdad

$$\int_M K \Omega_M = \delta(\nu) \mathrm{vol}(\mathbb{S}^m).$$

Esta integral es la denominada *curvatura íntegra* de la hipersuperficie M, que denotaremos κ. Vemos que su definición involucra de modo esencial el campo normal ν, luego involucra la manera en que M está sumergida en $\mathbb{R}^{m+1}$. Sin embargo, y de manera sorprendente se tiene el siguiente hecho fundamental:

Teorema 6.1 (Teorema de Gauss-Bonnet)**.** *Si m es par*

$$\kappa = \tfrac{1}{2} \mathrm{vol}(\mathbb{S}^m) \chi,$$

donde χ es la característica de Euler de M.

Puesto que por la fórmula anterior $\kappa = \delta(\nu) \mathrm{vol}(\mathbb{S}^m)$, el resultado anterior se puede reformular como

$$\delta(\nu) = \tfrac{1}{2} \chi(M),$$

y lo que el teorema de Gauss-Bonnet dice es:

El grado de la aplicación de Gauss de una hipersuperficie compacta de dimensión par es la mitad de su característica de Euler.

Referencias

[1] J. Manuel Gamboa, Jesús M. Ruiz. *Iniciación al estudio de las Variedades Diferenciables.* Sanz y Torres, 2016.

[2] Enrique Outerelo, Jesús M. Ruiz. *Mapping Degree Theory.* American Mathematical Society, 2009.