UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Departamento de Geometría y Topología

TOPOLOGÍA GENERAL
Paracompacidad y metrización

Trabajo de fin de grado del Grado en Matemáticas

Junio 2016

REALIZADO POR:

Eduardo Fernández Fuertes

DIRIGIDO POR:

Jesús M. Ruiz

Resumen

Esta memoria tiene como objetivo el estudio de ciertos aspectos esenciales de la topología como son la metrizabilidad de un espacio topológico, la normalidad y la paracompacidad. El estudio de la topología de los espacios métricos es de gran relevancia matemática ya que aparece en diversas áreas como por ejemplo la topología diferencial, la geometría riemanniana o los espacios de Banach. Inherente al estudio del problema de metrización es el estudio detallado de las nociones de normalidad y paracompacidad. Una de sus más importantes utilidades es la construcción de funciones continuas especiales (funciones de Urysohn, particiones de la unidad) que permiten realizar un mejor tratamiento de las propiedades topológicas de los espacios.

Palabras Clave: metrización, normalidad, paracompacidad, teorema de Stone, teorema de metrización de Bing, teorema de metrización de Nagata-Smirnov, partición de la unidad.

Abstract

The aim of this report is to study some main aspects of Topology such as metrizability, normality and paracompactness. The topology of metric spaces is an important topic since it appears in different fields: differential topology, riemmanian geometry and Banach spaces, among others. The study of the metrization problem inherently entails an in-depth study of the concepts of normality and paracompactness. One of its most remarkable applications is the construction of continuous special functions (Urysohn functions, partitions of unity) which allows a better treatment of the topological properties of spaces.

Keywords: metrization, normality, paracompactness, Stone theorem, Bing metrization theorem, Nagata-Smirnov metrization theorem, partition of unity.

2010 Mathematics Subject Classification: 54D15, 54D20, 54E35, 54E30

Índice general

Introducción

A lo largo de esta memoria trataremos de estudiar ciertos aspectos esenciales de Topología que en el Grado de Matemáticas no se imparten. Esos aspectos corresponden a la asignatura que en planes de estudios anteriores se denominaba Topología General, y que, por desgracia, en los nuevos grados de cuatro años no tuvo acomodo. En concreto estudiaremos la metrizabilidad de un espacio topológico, que de forma natural nos lleva a realizar un estudio detallado de la normalidad y la paracompacidad. De forma más precisa, el objetivo central del texto es probar el *Teorema de metrización de Bing y Nagata-Smirnov*. Este resultado establece que *un espacio topológico es metrizable si y sólo si es* T_3 *y tiene una base* σ*-discreta* (Bing) *si y sólo si es* T_3 *y tiene una base* σ*-localmente finita* (Nagata-Smirnov).

El problema de metrización fue planteado desde que se definió el concepto abstracto de espacio topológico. La primera aproximación a la solución del problema se basó en el estudio de los axiomas de separación. Esta línea de investigación fue fomentada por Urysohn cuando estableció que *todo espacio con una base numerable es metrizable si y sólo si es* T_4. Como veremos la solución óptima del problema no se basa exclusivamente en un axioma de separación. El camino necesario para llegar, de forma asequible, a la solución del problema de metrización dada por Bing, Nagata y Smirnov pasa de forma inexorable por el estudio de la paracompacidad. La paracompacidad fue introducida por J. Dieudonné en 1944 como una generalización de los espacios compactos. Su relación con la metrizabilidad de un espacio queda establecida por Stone en 1948 cuando prueba que *todo espacio pseudométrico es paracompacto*.

Como hemos dicho al principio, realizaremos un estudio preciso de la normalidad en el que resultarán de gran importancia las caracterizaciones de los espacios normales en términos de la existencia de funciones separantes de Urysohn y de la existencia de contracciones de recubrimientos puntualmente finitos. Asimismo introduciremos la noción de espacio paracompacto, estudiaremos sus propiedades más relevantes y probaremos el *Teorema de Stone*.

Fuera del núcleo fundamental del texto nos gustaría destacar el capítulo dedicado a las *particiones de la unidad* donde mostramos dos aplicaciones a los espacios vectoriales topológicos de la teoría desarrollada hasta el momento. La primera es el *Teorema de Dugungji-Borsuk* que es una generalización del *Teorema de extensión de Tiezte*, la segunda aplicación se debe a W. Rudin y es un resultado relativo a la aproximación puntual por funciones continuas. Además, en el último capítulo, establecemos una bonita caracterización de la metrizabilidad de un espacio compacto K en términos de la separabilidad de su espacio $C(K)$ de funciones continuas, haciendo uso, también, de las particiones de la unidad.

El trabajo está escrito suponiendo los conocimientos de Topología que se imparten en el grado, y en general la formación que se recibe en sus cuatro cursos, y a partir de eso se desarrolla de una manera autocontenida. Nuestra referencia principal ha sido el texto [3] de Margalef-Outerelo-Padrón, pero también hemos consultado los dos tratados clásicos de Dugundji [1] y Engelking [2], y las excelentes notas de Vera [5]; para los resultados sobre espacios vectoriales topológicos hemos utilizado el libro [4] de Rudin.

Finalmente, en lo personal, me gustaría agradecer a todas las personas que me han apoyado desde el momento que entré en la facultad hasta el momento de presentar este trabajo para recibir el título de grado, en especial a mis padres. A su vez, me gustaría agradecer a esos profesores que sí se han interesado en mejorar la calidad docente de la universidad entre los que me gustaría destacar a J.M. Gamboa y, a mi tutor, Jesús M. Ruiz.

Madrid, Torrelodones
Junio de 2016
Eduardo Fernández Fuertes

Capítulo I

Preliminares

En este primer capítulo introduciremos los conceptos y nociones previas para poder abordar el estudio de la *paracompacidad* y la *metrizabilidad* de un espacio de una forma asequible. Las desarrollamos a partir de las nociones que han sido estudiadas a lo largo del grado de Matemáticas.

En la primera sección recordamos las nociones de *métrica* y *pseudométrica* así como sus propiedades más importantes. La segunda y la tercera sección se dedican a tipos especiales de familias de subconjuntos y *refinamientos* de un espacio topológico. Estos conceptos serán claves a la hora de estudiar la paracompacidad y el problema de metrización. Queremos destacar las nociones de *espacio desarrollable* y *espacio de Moore,* pues más adelante veremos que se puede caracterizar la metrizabilidad de un espacio en estos términos. La cuarta sección servirá para introducir la noción de *aplicación propia* entre espacios topológicos.

1. Métricas y pseudométricas

Definición 1.1. Sean X un conjunto y $d : X \times X \to \mathbb{R}$ una aplicación. Diremos que d es una *pseudométrica* en X si satisface las siguientes tres condiciones:

(i) $d(x,x) = 0$ para cada $x \in X$.
(ii) $d(x,y) = d(y,x)$ para cualesquiera $x, y \in X$.
(iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ para cualesquiera $x, y, z \in X$.

Al par (X,d) se denomina *espacio pseudométrico.*

Si la propiedad **(i)** se cambia por:

(i') $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$ para cualesquiera $x, y \in X$.

se dice que d es una *métrica* en X y el par (X,d) se llama *espacio métrico.*

Observaciones 1.2 **1.** Todo espacio métrico es un espacio pseudométrico.

2. Si d es una pseudométrica en X entonces para cualesquiera $x, y \in X$ se tiene que $d(x,y) \geq 0$.

Ciertamente, $0 = d(x,x) \leq d(x,y) + d(y,x) = d(x,y) + d(x,y) = 2d(x,y)$ luego $d(x,y) \geq 0$.

3. Sea (X,d) un espacio pseudométrico. Sea $x \in X$ y r un número positivo. Llamaremos bola abierta de centro x y radio r asociada a d a $B_r^d(x) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$. El conjunto $\mathcal{B}_d$ de todas las bolas abiertas de todos los centros y radios posibles forma una base para una topología en X conocida como la topología asociada a la pseudométrica d y denotada por $\mathcal{T}_d$. Es decir, $U \in \mathcal{T}_d$ si para cada $x \in U$ existe $r > 0$ con $B_r^d(x) \subseteq U$.

4. Si d es una pseudométrica en X entonces $e = \min\{1,d\}$ es una pseudométrica en X que sólo toma valores entre 0 y 1 y, además, $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_e$.

Ejemplos 1.3 **1.** En el espacio euclídeo la distancia euclídea usual es una métrica.

2. En un conjunto X con más de un elemento la aplicación trivial $d : X \times X \to \mathbb{R}$ dada por $d(x,y) = 0$ para todos $x, y \in X$ es una pseudométrica y no una métrica.

3. En $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$ la aplicación dada por $d(x,y) = |x_1 - y_1|$ para cualesquiera $x = (x_1,...,x_n), y = (y_1,...,y_n) \in \mathbb{R}^n$ es una pseudométrica y no una métrica en X.

Definición 1.4. Sea X un espacio topológico.

Diremos que X es *pseudometrizable* si existe una pseudométrica en X de forma que su topología inducida coincida con la topología de X.

De la misma forma, diremos que X es *metrizable* si existe una métrica en X de forma que su topología inducida coincida con la topología de X.

Evidentemente, las propiedades de ser *pseudometrizable* y *metrizable* son propiedades topológicas y hereditarias.

Definición 1.5. Un espacio topológico X se dice localmente pseudometrizable, respectivamente localmente metrizable , si para cada punto $x \in X$ existe un entorno V^x abierto suyo que es pseudometrizable, respectivamente metrizable.

Teorema 1.6. *Sea $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}_{i \in I}$ una familia numerable de espacios topológicos. Entonces, si para cada $i \in I$ $(X_i, \mathcal{T}_i)$ es pseudometrizable (metrizable) entonces $\prod_i X_i$ es pseudometrizable (metrizable).*

De forma explícita:

(i) *Si I es finito y, para cada $i \in I$, d_i es una pseudométrica (métrica) en X_i que describe su topología entonces la aplicación*

$$d(x,y) = \sum_{i \in I} d_i(x_i, y_i) \text{ para cada } x = (x_i), y = (y_i) \in \prod_{i \in I} X_i$$

es una pseudométrica (métrica) en $\prod_i X_i$ tal que $\mathcal{T}_d = \prod_i \mathcal{T}_i$.

(ii) *Si $I = \{i_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ la topología de X_{i_n} viene descrita por una pseudométrica (métrica) e_n que toma valores entre 0 y 1 entonces la aplicación*

$$e(x,y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{e_n(x_{i_n}, y_{i_n})}{2^n} \text{ para cada } x = (x_{i_n}), y = (y_{i_n}) \in \prod_{n \in \mathbb{N}} X_{i_n}$$

es una pseudométrica (métrica) en $\prod_n X_{i_n}$ tal que $\mathcal{T}_e = \prod_n \mathcal{T}_{i_n}$.

Demostración. La prueba es una comprobación rutinaria. Estudiemos el caso del producto numerable, el producto finito se comprueba de forma semejante. Sea pues $\{(X_n, \mathcal{T}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia numerable de espacios pseudométricos (respectivamente métricos) y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea e_n una pseudométrica (respectivamente métrica) con valores en $[0,1]$ que describa la topología de X_n. Es claro que la aplicación

$$e(x,y) = \sum_n \frac{e_n(x_n, y_n)}{2^n}$$

describe una pseudométrica (respectivamente métrica) en $\prod_n X_n$, téngase en cuenta que la serie que define la aplicación está mayorada por la serie $\sum_n \frac{1}{2^n} = 1$.

Sea $x \in \prod_n X_n$ y sea $\epsilon > 0$. Comprobemos que $B^e_\epsilon(x) \in \prod_n \mathcal{T}_n$. Sea $z \in B^e_\epsilon(x)$. Como $\sum_n \frac{1}{2^n} = 1$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n\geq k+1} \frac{1}{2^n} < \frac{\epsilon - e(x,z)}{2}$. Sea $\delta = 2^k \frac{\epsilon - e(x,z)}{2k(2^k-1)}$ y pongamos $U = \prod_{n=1}^k B^{e_n}_\delta(z_n) \times \prod_{n\geq k+1} X_n$. Se tiene que U es un entorno abierto de z en $\prod_n \mathcal{T}_n$ y $U \subseteq B^e_\epsilon(x)$. Así $T_e \subseteq \prod_n \mathcal{T}_n$.

Por otro lado el conjunto $\{B^{e_n}_{\epsilon_n}(x_n) \times \prod_{k\neq n} X_k : \epsilon_n > 0, x_n \in X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una subbase de $\prod_n \mathcal{T}_n$. Se tiene que si $y \in B^{e_n}_{\epsilon_n}(x_n) \times \prod_{k\neq n} X_k$ entonces $B^e_\epsilon(y) \subseteq B^{e_n}_{\epsilon_n}(x_n) \times \prod_{k\neq n} X_k$ donde $\epsilon = \frac{\epsilon_n - e_n(y_n, x_n)}{2^n}$. En conclusión $\prod_n \mathcal{T}_n \subseteq \mathcal{T}_e$. □

2. Familias de subconjuntos

Definición 2.1. Sea X un espacio topológico y sea $\mathcal{W}$ una familia de subconjuntos de X. Diremos que:

(i) $\mathcal{W}$ es *puntualmente finita* si todo punto de X pertenece a lo sumo a un número finito de elementos de $\mathcal{W}$.

(ii) $\mathcal{W}$ es *localmente finita* si todo punto de X tiene un entorno abierto que corta a un número finito de elementos de $\mathcal{W}$.

(iii) $\mathcal{W}$ es *discreta* si todo punto de X tiene un entorno abierto que corta a lo sumo a un elemento de $\mathcal{W}$.

(iv) $\mathcal{W}$ es *σ-localmente finita* si puede expresarse como unión numerable de familias localmente finitas.

(v) $\mathcal{W}$ es *σ-discreta* si puede expresarse como unión numerable de familias discretas.

Observaciones 2.2 **1.** Es claro que toda familia localmente finita es puntualmente finita, el recíproco es falso. Considérese en $\mathbb{R}$ la familia $\{(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ y el punto 0.

2. Si $\mathcal{W}$ es localmente finita entonces $\overline{\mathcal{W}} = \{\overline{W} : W \in \mathcal{W}\}$ es localmente finita.

3. Toda familia discreta es localmente finita y, por tanto, puntualmente finita. En cambio, no toda familia localmente finita es discreta. Ciertamente, en $[0,1]$ con la topología usual la familia $\{[0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 1]\}$ es localmente finita pero no es discreta.

Definición 2.3. Sea $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de un espacio topológico X. Diremos que $\mathcal{A}$ *conmuta unión con adherencia* si para toda subfamilia $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ se satisface:

$$\overline{\bigcup_{A\in\mathcal{A}'} A} = \bigcup_{A\in\mathcal{A}'} \overline{A}$$

Proposición 2.4. *Toda familia localmente finita de subconjuntos conmuta unión con adherencia.*

En particular, la unión arbitraria de cerrados de una familia localmente finita es cerrada.

Demostración. Sea $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ una familia localmente finita, basta comprobar $\overline{\bigcup_i A_i} \subseteq \bigcup_i \overline{A_i}$. Sea $x \in \overline{\bigcup_i A_i}$ como $\mathcal{A}$ es una familia localmente finita existe un entorno U^x de x y un conjunto finito de índices $F \subseteq I$ con $U^x \cap (\bigcup_{i \notin F} A_i) = \varnothing$ y, por tanto, $x \notin \overline{\bigcup_{i \notin F} A_i}$. Además, por la finitud de F, se tiene que $\overline{\bigcup_{i \in F} A_i} = \bigcup_{i \in F} \overline{A_i}$. Por consiguiente,

$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \overline{\bigcup_{i \in F} A_i} \cup \overline{\bigcup_{i \notin F} A_i} = \bigcup_{i \in F} \overline{A_i} \cup \overline{\bigcup_{i \notin F} A_i}$$

y $x \in \bigcup_{i \in F} \overline{A_i}$. En conclusión, $\overline{\bigcup_i A_i} \subseteq \bigcup_i \overline{A_i}$. La igualdad se tiene porque la adherencia respeta el contenido. □

Observación 2.5 Nótese que el recíproco de la proposición anterior no es cierto. No toda familia localmente finita conmuta la unión con la adherencia. En efecto, en $\mathbb{R}$ con la topología discreta la familia de subconjuntos que contiene al 0 conmuta la unión con la adherencia y no es localmente finita.

Proposición 2.6. *Sea X un espacio topológico y sea $\mathcal{D} = \{D_i\}_{i \in I}$ una familia de subconjuntos de X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *$\mathcal{D}$ es discreta.*

(ii) *$\mathcal{D}$ es localmente finita y para cualesquiera $i, j \in I$ distintos se tiene que $\overline{D_i} \cap \overline{D_j} = \varnothing$.*

Demostración. **(i)⇒(ii)** Por ser $\mathcal{D}$ una familia discreta se tiene que es localmente finita. Sean $i, j \in I$ distintos. Supongamos que existe $x \in X$ tal que $x \in \overline{D_i} \cap \overline{D_j}$ entonces cualquier entorno abierto V^x de x satisface que $V^x \cap D_i$ y $V^x \cap D_j$ son no vacíos pero esto es imposible por ser $\mathcal{D}$ discreta. Así, $\overline{D_i} \cap \overline{D_j} = \varnothing$ como queríamos.

(ii)⇒(i) En primer lugar, por ser $\mathcal{D}$ localmente finita se cumple que $\overline{\mathcal{D}} = \{\overline{D_i}\}_{i \in I}$ es localmente finita. Sea ahora $x \in X$ comprobemos que existe un entorno abierto V^x de x que corta a lo sumo a un elemento de $\mathcal{D}$ para concluir la prueba. Supongamos que $x \notin \bigcup_i \overline{D_i}$. Entonces basta considerar $V^x = X \setminus \bigcup_i \overline{D_i}$ que es abierto pues $\overline{\mathcal{D}}$ es localmente finita. Si es $x \in \bigcup_i \overline{D_i}$ se tiene que, por la hipótesis, existe un único $i_0 \in I$ tal que $x \in \overline{D_{i_0}}$. Basta tomar $V^x = X \setminus \bigcup_{i \neq i_0} \overline{D_i}$ que de nuevo es abierto por ser $\overline{\mathcal{D}}$ localmente finita. □

3. Refinamientos

Definición 3.1. Sea X un espacio topológico y sea $\mathcal{U}$ un recubrimiento de X. Se llama *refinamiento* de $\mathcal{U}$ a cualquier recubrimiento $\mathcal{V}$ de X tal que para cada $V \in \mathcal{V}$ existe $U \in \mathcal{U}$ con $V \subseteq U$.

Un refinamiento se dice abierto si está formado por conjuntos abiertos y cerrado si está formado por conjuntos cerrados.

Proposición 3.2. *Sea X un espacio topológico y sean $\{U_i\}_{i\in I}$, $\{V_j\}_{j\in J}$ dos recubrimientos de X. Entonces:*

(i) *$\{U_i \cap V_j : i \in I, j \in J\}$ es un refinamiento de $\{U_i\}_{i\in I}$ y de $\{V_j\}_{j\in J}$. Además, si $\{U_i\}_{i\in I}$ y $\{V_j\}_{j\in J}$ son localmente finitos entonces $\{U_i \cap V_j : i \in I, j \in J\}$ es localmente finito.*

(ii) *Cualquier refinamiento de $\{U_i\}_{i\in I}$ y de $\{V_j\}_{j\in J}$ es también un refinamiento de $\{U_i \cap V_j : i \in I, j \in J\}$*

Demostración. Es una comprobación rutinaria. □

Definición 3.3. Sean X un espacio topológico y $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento de X. Un refinamiento $\{V_j\}_{j\in J}$ de $\{U_i\}_{i\in I}$ se dice *preciso* si $J = I$ y $V_i \subseteq U_i$ para cada $i \in I$.

Teorema 3.4. *Sean X un espacio topológico y $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento de X. Supongamos que $\{V_j\}_{j\in J}$ es un refinamiento de $\{U_i\}_{i\in I}$. Entonces, existe un refinamiento preciso $\{W_i\}_{i\in I}$ de $\{U_i\}_{i\in I}$. Además se cumple que:*

(i) *Si $\{V_j\}_{j\in J}$ es abierto podemos tomar $\{W_i\}_{i\in I}$ abierto.*

(ii) *Si $\{V_j\}_{j\in J}$ es localmente finito podemos tomar $\{W_i\}_{i\in I}$ localmente finito. En este caso, si $\{V_j\}_{j\in J}$ es cerrado podemos tomar $\{W_i\}_{i\in I}$ cerrado.*

Demostración. Consideremos una aplicación $f : J \to I$ de forma que $V_j \subseteq U_{f(j)}$ para cada $j \in J$. Para cada $i \in I$ ponemos $W_i = \bigcup_{f(j)=i} V_j$, puede darse que algún $W_i = \varnothing$. Es claro que $W_i \subseteq U_i$ para cada $i \in I$ además si $j \in J$ entonces $V_j \subseteq W_{f(j)}$ luego $\{W_i\}_{i\in I}$ es un refinamiento preciso de $\{U_i\}_{i\in I}$. Además por construcción si $\{V_j\}_{j\in J}$ entonces $\{W_i\}_{i\in I}$ es abierto.

Supongamos ahora que $\{V_j\}_{j\in J}$ es localmente finito. Sea $x \in X$ entonces existe un entorno V^x que corta a lo sumo a una cantidad finita de elementos de $\{V_j\}_{j\in J}$ digamos $V_{j_1}, ..., V_{j_n}$. Por tanto, V^x únicamente corta a $W_{f(j_1)}, ..., W_{f(j_n)}$ en $\{W_i\}_{i\in I}$ que además podrían ser eventualmente iguales.

Para acabar en el caso de que $\{V_j\}_{j\in J}$ sea localmente finito y cerrado se sigue de que la unión arbitraria de cerrados de una familia localmente finita es cerrada el hecho de que podemos tomar $\{W_i\}_{i\in I}$ localmente finita y cerrada. □

Definición 3.5. Sea X un espacio topológico y sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de X. Diremos que $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i\in I}$ es una *contracción* de $\mathcal{U}$ si es un refinamiento abierto preciso suyo y $\overline{V_i} \subseteq U_i$ para cada $i \in I$.

Sea X un espacio topológico y sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto suyo. Para cada $A \subseteq X$ pondremos $\mathrm{Est}(A,\mathcal{U}) = \bigcup\{U_i : A \cap U_i \neq \varnothing\}$. Para cada $x \in X$ escribiremos $\mathrm{Est}(x,\mathcal{U}) = \mathrm{Est}(\{x\},\mathcal{U})$.

Definición 3.6. **(i)** Sean X un espacio topológico y $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de recubrimientos abiertos de X. Diremos que $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un *desarrollo* de X si para cada $x \in X$ se tiene que $\{\mathrm{Est}(x,\mathcal{U}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de entornos de x.

(ii) Un espacio topológico que admite un desarrollo se dice *desarrollable* . Si, además, el espacio es T_1 se dice que es un *espacio de Moore.*

Teorema 3.7. *Sea X un espacio topológico y sea $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de recubrimientos abiertos de X. Si para cada $x \in X$ y para cualquier sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $x_n \in \mathrm{Est}(x,\mathcal{U}_n)$ se tiene que x es un punto de acumulación de la sucesión entonces $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un desarrollo.*

Demostración. Supongamos que $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es un desarrollo. Esto es, existe $x \in X$ de forma que $\{\mathrm{Est}(x,\mathcal{U}_n)\}$ no es una base de entornos suyo. Así existe un entorno V^x de x de forma que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in \mathrm{Est}(x,\mathcal{U}_n)\backslash V^x$. Es decir, hemos construido una sucesión en las hipótesis del enunciado de la que x no es punto de acumulación y eso es imposible. □

4. Aplicaciones propias

Definición 4.1. Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una aplicación continua. Diremos que f es *propia de X en Y* si para cualquier espacio topológico Z se tiene que $f \times 1_Z : X \times Z \to Y \times Z$ es una aplicación cerrada.

Proposición 4.2. *Sean X e Y espacios topológicos. Sea $f : X \to Y$ una aplicación. Se tiene que:*

(i) *Si f es propia de X en Y y $A \subseteq Y$ con $f(X) \subseteq A$ entonces f es propia de X en A.*

(ii) *Si $A \subseteq Y$ es un cerrado con $f(X) \subseteq A$ y f es propia de X en A entonces f es propia de X en Y.*

Proposición 4.3. *Toda aplicación propia es cerrada.*

Demostración. Sea $f : X \to Y$ propia. Sea Z un espacio topológico unipuntual. Como f es propia se tiene que $f \times 1_Z : X \times Z \to Y \times Z$ es cerrada y como Z es unipuntual las proyecciones $p_X : X \times Z \to X$ y $p_Y : Y \times Z \to Y$ son homeomorfismos. Por tanto, $f = p_Y \circ (f \times 1_Z) \circ p_X^{-1}$ es cerrada. □

Ejemplo 4.4 No toda aplicación cerrada es propia. Por ejemplo, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la aplicación constantemente 1 es continua y cerrada. En cambio f no es propia. En efecto, $f \times 1_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ no es cerrada pues la imagen del cerrado $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ es el conjunto $\{(1, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$ que no es cerrado.

Teorema 4.5. *Sean X e Y espacios topológicos. Sea $f : X \to Y$ una aplicación inyectiva. Son equivalentes:*

(i) *f es propia.*

(ii) *f es cerrada y continua.*

(iii) *$f(X)$ es cerrado en Y y f es un homeomorfismo sobre su imagen.*

Demostración. **(i)⇒ (ii)** Se tiene por 4.3.

(ii)⇒(iii) Trivial.

(iii)⇒(i) Es claro que f es continua. Sea Z un espacio topológico cualquiera como f es un homeomorfismo sobre su imagen se tiene que $f \times 1_Z$ es un homeomorfismo de $X \times Z$ en $f(X) \times Z$ además $f(X) \times Z$ es cerrado en $Y \times Z$ pues $f(X)$ es cerrado en Y. En conclusión $f \times 1_Z$ es cerrada y f es propia de X en Y. □

Corolario 4.6. *Una aplicación es un homeomorfismo si y sólo si es biyectiva y propia.*

Corolario 4.7. *Sea X un espacio topológico y sea A un subconjunto suyo. Entonces, la inclusión $i : A \hookrightarrow X$ es propia si y sólo si A es cerrado.*

Proposición 4.8. *La composición de aplicaciones propias es propia.*

Demostración. Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ aplicaciones propias. Como f y g son continuas $g \circ f$ es continua. Sea W un espacio topológico cualquiera por ser f y g propias se tiene que $f \times 1_W$ y $g \times 1_W$ son cerradas por tanto $(g \circ f) \times 1_W = (g \times 1_w) \circ (f \times 1_W)$ es cerrada. Concluimos que $g \circ f$ es propia. □

Corolario 4.9. *La restricción de una aplicación propia a un cerrado es propia.*

Proposición 4.10. *Sean X, Y espacios topológicos, M un subconjunto de Y y $f : X \to Y$ una aplicación propia. Entonces $f_{|f^{-1}(M)}$ es una aplicación propia de $f^{-1}(M)$ en M.*

Demostración. Es claro que $f_{|f^{-1}(M)}$ es continua. Sea Z un espacio topológico cualquiera, comprobemos que $f_{|f^{-1}(M)} \times 1_Z$ es cerrada. Sea C cerrado en $f^{-1}(M) \times Z$, esto es $C = F \cap f^{-1}(M) \times Z$ para un cerrado F de X. Se tiene pues que

$$(f_{|f^{-1}(M)} \times 1_Z)(C) = (f \times 1_Z)(F) \cap (M \times Z)$$

es cerrado en $M \times Z$, pues f es propia, como queríamos. □

A continuación presentamos varios resultados que relacionan las aplicaciones propias con los espacios compactos, antes necesitamos el siguiente lema.

Lema 4.11. *Un espacio topológico X es compacto si y sólo si para cualquier espacio topológico Z se tiene que la proyección usual $p_Z : X \times Z \to Z$ es cerrada.*

Demostración. Sea X un espacio compacto y sea Z un espacio topológico cualquiera. Sea C cerrado en $X \times Z$, comprobemos que $Z \backslash p_Z(C)$ es abierto en Z.

Sea $z \in Z \backslash p_Z(C)$ entonces $X \times \{z\}$ está contenido en el abierto $X \times Z \backslash C$, por tanto, para cada $x \in X$ existe un entorno abierto suyo U^x y existe un entorno abierto V_x^z de z con $U^x \times V_x^z \subseteq X \times Z \backslash C$. La familia $\{U^x\}_{x \in X}$ es un recubrimiento abierto del compacto X luego existen $x_1, ..., x_n \in X$ con $X \subseteq \bigcup_{i=1}^n U^{x_i}$. Se tiene que $V^z = \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}^z$ es un entorno abierto de z con $X \times \{z\} \subseteq X \times V^z \subseteq X \times Z \backslash C$ luego $V^z \subseteq Z \backslash p_Z(C)$ y, ciertamente, $Z \backslash p_Z(C)$ es abierto.

Recíprocamente, sea $\{U_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de X. Sea $Z = X \cup \{\infty\}$ dotado de la topología $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X) \cup \{G \subset Z : \infty \in G$ y existen $j_1, ..., j_n$ con $Z \backslash G \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_{i_j}\}$. Basta probar que ∞ es abierto en Z para concluir que X es compacto.

Sea $D = \{(x, x) : x \in X\}$, por hipótesis, $p_Z(\overline{D})$ es cerrado en Z. Ahora bien si $x \in X$ existe $i \in I$ con $x \in U_i$, por tanto $U_i \times (X \backslash U_i)$ es un entorno abierto de (x, ∞) que no corta a D. Es decir, para cada $x \in X$ se tiene que $(x, \infty) \notin \overline{D}$ y $p_Z(\overline{D}) = X$ es cerrado en Z luego ∞ es abierto. □

Teorema 4.12. *Sea X un espacio topológico y sea Y un espacio unipuntual. Entonces, X es compacto si y sólo si $f : X \to Y$ es propia.*

Demostración. Sea Y un espacio unipuntual. La aplicación continua $f : X \to Y$ es propia si y sólo si $f \times 1_Z : X \times Z \to Y \times Z$ es cerrada. Ahora bien, consideremos el homeomorfismo $g : Z \to Y \times Z$ definido por $g(z) = (y, z)$ y denotemos por $p_Z : X \times Z \to Z$ a la proyección usual. Se tiene que $f \times 1_Z = g \circ p_Z$, ahora el resultado se sigue del lema anterior. $\square$

Corolario 4.13. *Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una aplicación propia. Entonces, para cada $K \subseteq Y$ se tiene que $f^{-1}(K)$ es compacto en X. En particular, $f^{-1}(\{y\})$ es compacto en X para cada $y \in Y$.*

Demostración. Sea $K \subseteq Y$ compacto. Sea Z un espacio unipuntual cualquiera, por el resultado anterior $g : K \to Z$ es propia. Además, $f_{|f^{-1}(K)}$ es propia de $f^{-1}(K)$ en K luego $g \circ (f_{|f^{-1}(K)})$ es propia. De nuevo, por el resultado anterior, concluimos que $f^{-1}(K)$ es compacto. $\square$

Corolario 4.14. *Sea X un espacio topológico. Entonces, X es compacto si y sólo si para cualquier espacio topológico Z la proyección $p_Z : X \times Z \to Z$ es propia.*

Demostración. Supongamos primero que X es compacto y sea Z un espacio topológico cualquiera. Por el último lema para cualquier espacio topológico Y se tiene que $p_Z \times 1_Y = p_{Z\times Y} : X \times Z \times Y \to Z \times Y$ es cerrada, por tanto, p_Z es propia.

Recíprocamente, sea Z un espacio topológico unipuntual. Por la hipótesis p_Z es propia. Ahora bien, como $X \cong X \times Z$, por 4.12, concluimos la prueba. $\square$

Capítulo II

Separación

En este capítulo estudiaremos los *axiomas de separación.* Éstos son los relativos a distinguir topológicamente distintos puntos o subconjuntos de un espacio topológico. El estudio de los axiomas de separación surge del problema de metrización con el objetivo de encontrar una condición de separación lo suficientemente fuerte como para implicar la metrizabilidad de un espacio. Esta línea de estudio fue impulsada por el resultado de Urysohn en 1924 que establecía que todo espacio T_3 y con una base de entornos numerable es metrizable. En el capítulo V se verá que la solución satisfactoria del problema de metrización no depende de un axioma de separación.

Muchos de los resultados de este capítulo han sido estudiados a lo largo del Grado de Matemáticas, por ello, omitiremos alguna prueba con el fin de no distraernos del objetivo fundamental del trabajo, que son los capítulos III y V.

Dividiremos el capítulo en cuatro secciones. La primera sección se dedicará al estudio de los distintos axiomas relativos a la separación de puntos. En la segunda sección estudiaremos los axiomas que aseguran la *separación de puntos y cerrados.* La tercera sección se deberá al estudio de la *separación de cerrados.* Por último, en la cuarta sección probaremos el *Lema de Inmersión* que da condiciones suficientes para sumergir un espacio en un producto topológico, este resultado de carácter técnico nos será de gran utilidad para resolver el problema de metrización.

1. Separación de puntos

Definición 1.1. Un espacio topológico X se llama T_0 si para cualesquiera puntos $x, y \in X$ distintos se tiene que existe un entorno V^x de x con $y \notin V^x$ o existe un entorno V^y de y con $x \notin V^y$.

Observación 1.2 Sea (X, d) un espacio pseudométrico. Entonces, d es una métrica si y sólo si X es T_0. En efecto, supongamos que d no es una métrica, es decir, que existen $x, y \in X$ distintos con $d(x, y) = 0$. Entonces, $x \in B_r(y)$ e $y \in B_r(x)$ para cualquier radio $r > 0$.

En lo que sigue veremos condiciones de separación sucesivamente más restrictivas, cada una de las cuales implicará evidentemente a la anterior.

Definición 1.3. Un espacio topológico X se llama T_1 si para cualesquiera puntos $x, y \in X$ distintos existen entornos V^x y V^y de x e y respectivamente tales que $y \notin V^x$ y $x \notin V^y$.

Teorema 1.4. *Un espacio topológico es T_1 si y sólo si los puntos son cerrados.*

Demostración. En primer lugar supongamos que X es un espacio T_1. Sea $x \in X$ un punto cualquiera. Comprobemos que $U = X \backslash \{x\}$ es abierto. Para ello tomemos un punto $y \in U$ cualquiera, como X es T_1 existe un entorno V^y de y tal que $x \notin V^y$, por tanto, $V^y \subseteq U$ y U es abierto.

Por otro lado, sea X un espacio topológico de forma que los puntos sean cerrados. Sean $x, y \in X$ puntos distintos. Como $\{x\}$ y $\{y\}$ son cerrados $U^y = X \backslash \{x\}$ y $U^x = X \backslash \{y\}$ son entornos abiertos de y y x, respectivamente, tales que $x \notin U^y$ e $y \notin U^x$. Así, X es T_1. □

Definición 1.5. Un espacio topológico X se dice T_2 o *Hausdorff* si para cualesquiera $x, y \in X$ distintos existen entornos suyos disjuntos.

Proposición 1.6. *Sea X un espacio topológico. Son equivalentes:*

(i) *X es Hausdorff.*

(ii) *El conjunto $\{(x, x) : x \in X\}$ es cerrado en $X \times X$.*

(iii) *Para cualquier espacio topológico Y y cualquier aplicación $f : Y \to X$ continua se tiene que la gráfica de f, $\mathrm{Graf}(f) = \{(y, f(y)) : y \in Y\}$, es cerrada en $Y \times X$.*

(iv) *Para cualquier espacio topológico Y y cualesquiera aplicaciones $f, g : Y \to X$ el conjunto $\{y \in Y : f(y) = g(y)\}$ es cerrado en Y.*

Demostración. **(i)⇒(ii)** Sea X Hausdorff. Pongamos $D = \{(x, x) : x \in X\}$. Comprobemos que $X \times X \backslash D$ es abierto. Sea $(x, y) \notin D$, como X es Hausdorff existen entornos U^x y V^y disjuntos de x e y, respectivamente. Entonces $U^x \times V^y$ es un entorno abierto de (x, y) en $X \times Y$ que no corta a D. Así, $X \times X \backslash D$ es abierto y,por tanto, D es cerrado.

(ii)⇒(i) Sea $D = \{(x, x) : x \in X\}$ que es cerrado en $X \times X$ por hipótesis. Entonces, $X \times X \backslash D$ es abierto. Sean $x, y \in X$ distintos, luego $(x, y) \notin D$ por tanto existe un entorno $U \times V$ de (x, y) en $X \times X$ que no corta a D, es decir, existe un entorno U de x y un entorno V de y que son disjuntos. Por tanto, X es Hausdorff.

(iii)⇒(ii) Basta tomar $Y = X$ y $f = 1_X$.

(ii)⇒(iii) Sea $f : Y \to X$ continua, entonces $f \times 1_X$ es continua. Como $D = \{(x, x) : x \in X\}$ es cerrado por hipótesis se tiene que $Graf(f) = (f \times 1_X)^{-1}(D)$ es cerrado, como queríamos.

(iv)⇒(ii) Basta considerar $Y = X \times X$ y tomar como aplicaciones continuas las dos proyecciones sobre X.

(ii)⇒(iv) Sean $f, g : Y \to X$ continuas, entonces $(f, g) : Y \times Y \to X \times X$ es continua. Por hipótesis $D = \{(x, x) : x \in X\}$ es cerrado, por tanto, $\{y \in Y : f(y) = g(y)\} = (f, g)^{-1}(D)$ es cerrado. □

Definición 1.7. Un espacio topológico X se dice T_{2a} si para cualesquiera puntos $x, y \in X$ distintos existen entornos suyos cuyas adherencias son disjuntas.

Teorema 1.8. *Un espacio topológico metrizable es T_{2a}.*

Demostración. Sea X un espacio metrizable y sea d una métrica que describa su topología. Sean $x, y \in X$ distintos. Como x, y son distintos $d(x, y) = r > 0$ entonces basta tomar $B_{\frac{r}{3}}(x)$ y $B_{\frac{r}{3}}(y)$. $\square$

Sean X un conjunto, $(Y, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $f : X \to Y$ una aplicación. Recordemos que la topología imagen inversa respecto a f en X, denotada por $f^{-1}(\mathcal{T})$, se define como $f^{-1}(\mathcal{T}) = \{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{T}\}$ y es la topología más fina en X que hace que f sea continua. La topología inducida en un subconjunto no es más que la topología imagen inversa respecto a la inclusión.

En estos términos, las propiedades de separación enunciadas hasta el momento se trasladan por la topología imagen inversa respecto a una aplicación inyectiva. Así, los axiomas de separación de puntos son *propiedades topológicas* y *hereditarias*.

En relación con los productos y las sumas topológicas se tiene que un producto (suma) de espacios topológicos es T_j si y sólo si cada espacio del producto (suma) es T_j, donde $j \in \{0, 1, 2, 2_a\}$.

2. Regularidad

Definición 2.1. Un espacio topológico X se dice *regular* si para cualquier cerrado $C \subseteq X$ y cualquier punto $x \notin C$ existe un entorno U^x de x y un abierto G con $C \subseteq G$ tales que $U^x \cap G = \varnothing$.

Observaciones 2.2 **1.** Cualquier espacio con más de dos puntos cuya topología sea la trivial es regular y no es T_0. Así, ser regular no implica ninguno de los axiomas de separación de puntos de la sección anterior.

2. Un espacio es regular si y sólo si cada punto tiene una base de entornos cerrados.

Ciertamente, supongamos que X es un espacio regular. Sea $x \in X$ y sea V^x un entorno abierto suyo. Como V^x es abierto, existe un abierto $A \subseteq V^x$ de forma que $x \in A$. Sea $C = X \backslash A$ cerrado en X. Se tiene que $x \notin C$, por tanto, como X es regular, existe un entorno U^x de x y un abierto G con $C \subseteq G$ de forma que $U^x \cap G = \varnothing$. Luego $U^x \subseteq X \backslash G$ y $\overline{U^x} \subseteq \overline{X \backslash G} = X \backslash G \subseteq A \subseteq V^x$.

Recíprocamente, supongamos que X es un espacio topológico en el que cada punto tiene una base de entornos cerrados. Sea C un cerrado y sea $x \notin C$. Por tanto $x \in X \backslash C$ que es abierto, por la hipótesis existe un entorno U^x de x con $\overline{U^x} \subseteq X \backslash C$. Así, $C \subseteq X \backslash \overline{U^x}$ que es abierto y $U^x \cap X \backslash \overline{U^x} = \varnothing$ luego X es regular.

3. Todo espacio pseudometrizable es regular. En efecto, sea X un espacio pseudometrizable y sea d una pseudométrica en X que describa su topología. Sea $x \in X$ y V^x un entorno abierto suyo cualquiera. Como V^x es abierto, existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subseteq V^x$, por tanto, $B_{\frac{r}{2}}(x)$ es un entorno abierto de x con $\overline{B_{\frac{r}{2}}} \subseteq V^x$. Luego X es regular.

Proposición 2.3. *Sea X un espacio regular y sea $K \subseteq X$ compacto. Entonces $\overline{K}$ es compacto.*

Demostración. Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de $\overline{K}$. Para cada $x \in K$, por regularidad, existen $i_x \in I$ y un entorno abierto suyo V^x tales que

$$x \in V^x \subseteq \overline{V^x} \subseteq U_{i_x}.$$

Por compacidad, existen $x_1, ..., x_n \in K$ tales que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V^{x_i}.$$

Por tanto,

$$\overline{K} \subseteq \overline{\bigcup_{i=1}^{n} V^{x_i}} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V^{x_i}} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{i_{x_i}}$$

y $\overline{K}$ es compacto. □

Definición 2.4. Un espacio topológico X se llama T_3 si es regular y T_0.

Observaciones 2.5 **1.** Todo espacio metrizable es T_3.

2. Todo espacio T_3 es T_{2a}. En efecto, sea X un espacio T_3. Sean $x, y \in X$ distintos. Por ser X T_0 podemos suponer que existe un entorno U^x de x con $y \notin U^x$. Ahora, como X es regular existe un entorno V^x de x tal que $\overline{V^x} \subseteq U^x$. Consideremos el entorno abierto $V^y = X \backslash \overline{U^x}$ de y. Se tiene que $\overline{V^y} \cap \overline{V^x} = (X \backslash U^x) \cap \overline{V^x} \subseteq (X \backslash U^x) \cap U^x = \varnothing$. En conclusión, X es T_{2a}.

3. Todo espacio compacto y Hausdorff es regular.

4. Todo espacio localmente compacto y Hausdorff es regular.

Teorema 2.6. *Sean X e Y espacios topológicos y sea $f : X \to Y$ propia y sobreyectiva. Entonces, si X es regular Y también lo es. En particular, la propiedad T_3 se mantiene por imágenes de aplicaciones propias.*

Demostración. Sea $y \in Y$ y sea V^y un entorno abierto suyo. Entonces $f^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(V^y)$ y, por I.4.13 $f^{-1}(y)$, es compacto en X.

Para cada $x \in f^{-1}(y)$, por regularidad, existe un entorno abierto suyo U^x tal que

$$x \in U^x \subseteq \overline{U^x} \subseteq f^{-1}(V^y).$$

Por compacidad, existen $x_1, ..., x_n \in f^{-1}(y)$ tales que

$$f^{-1}(y) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U^{x_i} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U^{x_i}} \subseteq f^{-1}(V^y).$$

Entonces, $W = Y \backslash f(X \backslash \bigcup_{i=1}^{n} U^{x_i})$ es un entorno abierto de y tal que

$$W \subseteq f(\bigcup_{i=1}^{n} \overline{U^{x_i}}),$$

luego, como f es cerrada, se tiene que

$$y \in W \in \overline{W} \subseteq f(\bigcup_{i=1}^{n} \overline{U^{x_i}}) \subseteq V^y$$

e Y es regular. $\square$

Teorema 2.7. *Sea X un conjunto y sea $(Y, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Sea $f : X \to Y$ una aplicación. Si Y es regular entonces $(X, f^{-1}(\mathcal{T}))$ es regular. En particular, la propiedad T_3 se traslada por topologías imagen inversa respecto a aplicaciones inyectivas.*

Demostración. Sea $x \in X$ y sea V^x un entorno abierto suyo en $(X, f^{-1}(\mathcal{T}))$. Entonces, existe $G \subseteq Y$ abierto con $x \in \underline{f^{-1}(G) \subseteq} V^x$. Por tanto, $f(x) \in G$ y como Y es regular existe un entorno $U^{f(x)}$ de $f(x)$ con $\overline{U^{f(x)}} \subseteq G$.

Se tiene que $f^{-1}(\overline{U^{f(x)}}) \subseteq V^x$ y $x \in f^{-1}(U^{f(x)})$. Ahora como f es continua se cumple que $\overline{f^{-1}(U^{f(x)})} \subseteq f^{-1}(\overline{U^{f(x)}})$. En resumen, $W = f^{-1}(U^{f(x)})$ es un entorno abierto de x con $\overline{W} \subseteq V^x$ y, por tanto, X es regular. $\square$

Observaciones 2.8 **1.** Los axiomas regular y T_3 son propiedades topológicas y hereditarias.

2. Un producto (suma) de espacios es regular (T_3) si y sólo si cada espacio es regular (T_3).

3. Normalidad

Definición 3.1. Un espacio topológico X se dice *normal* si para cualesquiera cerrados disjuntos C_1 y C_2 existen dos abiertos disjuntos G_1 y G_2 tales que $C_1 \subseteq G_1$ y $C_2 \subseteq G_2$.

Teorema 3.2. *Sea X un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *X es normal.*

(ii) *Para todo cerrado C y todo abierto G con $C \subseteq G$ existe un abierto A con $C \subseteq A \subseteq \overline{A} \subseteq G$.*

(iii) *Para cualesquiera cerrados C, F disjuntos existe un abierto G tal que $C \subseteq G$ y $\overline{G} \cap F = \varnothing$.*

(iv) *Para cualesquiera cerrados C_1, C_2 disjuntos existen abiertos G_1, G_2 con $C_1 \subseteq G_1$, $C_2 \subseteq G_2$ y $\overline{G_1} \cap \overline{G_2} = \varnothing$.*

Demostración. **(i)⇒(ii)** Sea C cerrado y sea G un abierto que contiene a C. Entonces $X \backslash G$ es un cerrado disjunto de C. Por normalidad existen dos abiertos U y A disjuntos con $C \subseteq A$ y $X \backslash G \subseteq U$. Como $A \cap U = \varnothing$ se tiene que $A \subseteq X \backslash U$ y $X \backslash U \subseteq G$ pues $X \backslash G \subseteq U$. Así $C \subseteq A \subseteq \overline{A} \subseteq X \backslash U \subseteq G$ pues $X \backslash U$ es cerrado.

(ii)⇒(iii) Sean C y F cerrados disjuntos. C está contenido en el abierto $X \backslash F$ luego, por hipótesis, existe un abierto G con $C \subseteq G \subseteq \overline{G} \subseteq X \backslash F$. G resuelve el problema.

(iii)⇒(iv) Sean C_1 y C_2 cerrados disjuntos. Por hipótesis existe un abierto G_1 que contiene a C_1 tal que $\overline{G_1} \cap C_2 = \varnothing$. Es decir, $\overline{G_1}$ y C_2 son cerrados disjuntos luego, de nuevo por la hipótesis, existe un abierto G_2 que contiene a C_2 tal que $\overline{G_1} \cap \overline{G_2} = \varnothing$. Los abiertos G_1 y G_2 dan solución al problema.

(iv)⇒(i) Obvio. □

Ejemplo 3.3 Sea $X = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ con la topología $T = \{\varnothing, X\} \cup \{[x, \infty), (x, \infty) : x \in X\}$. Se tiene que todos los cerrados de X contienen al 0 luego X es normal, además, es fácil ver que X es T_0. En cambio, X no es T_1 y, por tanto, tampoco es regular, T_{2a} o Hausdorff.

El ejemplo anterior motiva la siguiente definición.

Definición 3.4. Un espacio topológico se dice T_4 si es normal y T_1.

Como en un espacio T_1 los puntos son cerrados se cumple el siguiente resultado.

Proposición 3.5. *Todo espacio T_4 es T_3.*

Proposición 3.6. *Todo espacio regular y Lindelöf es normal.*

Demostración. Sea X un espacio regular y Lindelöf. Sean C_1 y C_2 dos cerrados disjuntos. Por ser X regular, para cada $x \in C_1$ existe un entorno U^x suyo tal que $\overline{U^x} \cap C_1 = \varnothing$. Tenemos así un recubrimiento abierto $\{U^x\}_{x \in C_1}$ de C_1. De forma análoga construimos un recubrimiento abierto $\{V^x\}_{x \in C_2}$ de C_2 tal que para cada $x \in C_2$ se tiene que $\overline{V^x} \cap C_1 = \varnothing$.

Como ser Lindelöf es hereditario sobre los cerrados se tiene que C_1 y C_2 son Lindelöf. Por tanto, podemos extraer subrecubrimientos abiertos $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $\{U^x\}_{x \in C_1}$ y $\{V^x\}_{x \in C_2}$, respectivamente. Para cada $n \in \mathbb{N}$ ponemos

$$U_n' = U_n \backslash \bigcup_{k=1}^{n} \overline{V_k} = U_n \cap (X \backslash \bigcup_{k=1}^{n} \overline{V_k}) \text{ y } V_n' = V_n \backslash \bigcup_{k=1}^{n} \overline{U_k} = V_n \cap (X \backslash \bigcup_{k=1}^{n} \overline{U_k})$$

que son sendos abiertos de X.

Definamos los abiertos $G_1 = \bigcup_n U_n'$ y $G_2 = \bigcup_n V_n'$. Se tiene que $C_1 \subseteq G_1$ pues $\overline{V_k} \cap C_1 = \varnothing$ para cada $k \in \mathbb{N}$. De la misma forma, $C_2 \subseteq G_2$. Basta ver que $G_1 \cap G_2 = \bigcup_{n,m} V_m' \cap U_n' = \varnothing$ para concluir la prueba. Es decir, debemos comprobar que para cualesquiera naturales m y n se tiene que $V_m' \cap U_n' = \varnothing$.

Supongamos sin perdida de generalidad que $m > n$ entonces

$$V_m' \cap U_n' = (V_m \backslash \bigcup_{k=1}^{m} \overline{U_k}) \cap (U_n \backslash \bigcup_{k=1}^{n} \overline{V_k}) \subseteq (V_m \backslash \overline{U_n}) \cap U_n = \varnothing$$

Así, $V_m' \cap U_n' = \varnothing$. Dando por concluida la prueba. □

La proposición anterior tiene las siguientes consecuencias inmediatas:

Corolario 3.7. *Todo espacio regular y II.A.N (respectivamente compacto) es normal. En particular, todo espacio compacto y Hausdorff es T_4.*

Ahora vamos a establecer la caracterización más importante, y famosa, de los espacios normales debida a Urysohn. Este resultado será clave cuando tratemos el problema de metrización.

Teorema 3.8 (Lema de Urysohn)**.** *Sea X un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *X es normal.*

(ii) *Para cualesquiera cerrados C_1 y C_2 disjuntos existe una aplicación $f : X \to [0,1]$ continua tal que $f(C_1) \subseteq 0$ y $f(C_1) \subseteq 1$.*

Demostración. **(ii)⇒(i)** Sean C_1 y C_2 cerrados disjuntos entonces, por hipótesis, existe una aplicación continua f de X en $[0,1]$ tal que $f(C_1) \subseteq 0$ y $f(C_2) \subseteq 1$. Se tiene que $f^{-1}([0,\frac{1}{2}))$ y $f^{-1}((\frac{1}{2},1])$ son entornos abiertos disjuntos de C_1 y C_2, respectivamente, luego X es normal.

(i)⇒(ii) Supongamos que X es normal y sean C_1 y C_2 cerrados disjuntos.

Para cada $n \geq 0$ pongamos $D_n = \{\frac{k}{n} : k \in \{0,1,...,2^n\}\}$. Nótese que para cada n se tiene que $D_n \subseteq D_{n+1}$.

Sea $D = \bigcup_n D_n$. El conjunto D es denso en $[0,1]$. En efecto, sea $x \in [0,1]$ y sea $\epsilon > 0$, comprobemos que existe $r \in D$ con $r \in (x-\epsilon, x+\epsilon)$. Como la sucesión $\{\frac{1}{2^n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 existe un natural n tal que $0 < \frac{1}{2^n} < \epsilon$, fijemos n. La familia $\{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}] : k \in \{0,1,...,2^n-1\}$ es un recubrimiento de $[0,1]$ luego debe existir k_0 con $x \in [\frac{k_0}{2^n}, \frac{k_0+1}{2^n}]$, por tanto, $\frac{k_0}{2^n} \in (x-\epsilon, x+\epsilon)$ pues $|x - \frac{k_0}{2^n}| < \frac{k_0+1}{2^n} - \frac{k_0}{2^n} = \frac{1}{2^n} < \epsilon$.

Ahora vamos a construir inductivamente una familia $\{M_r\}_{r\in D}$ de subconjuntos de X de forma que:

1. $M_0 = C_1$ y $M_1 = X \backslash C_2$.

2. Para cualesquiera $r, s \in D$ con $r < s$ se tiene que $\overline{M_r} \subseteq \mathring{M_s}$

Realizamos la construcción inductivamente sobre los conjuntos D_n. El caso $n = 0$ se corresponde al conjunto $D_0 = \{0,1\}$ y los conjuntos $M_0 = C_1$ y $M_1 = X\backslash C_2$ resuelven el problema.

Supongamos que hemos construido los conjuntos M_r para cada $r \in D_{n-1}$ y realicemos la construcción para $r \in D_n$.

Si $r \in D_n$ será de la forma $r = \frac{k}{2^n}$ con $k \in \{0,1,...,2^n\}$. Si k es par, es decir, que $r \in D_{n-1}$ entonces M_r está definido en la etapa anterior. Supongamos pues que k es impar. Entonces $s = r - \frac{1}{2^n} = \frac{k-1}{2^n} \in D_{n-1}$ y $t = r + \frac{1}{2^n} = \frac{k+1}{2^n} \in D_{n-1}$. Tomemos los conjuntos M_s y M_t asociados, como $s < t$ se tiene que $\overline{M_s} \subseteq \mathring{M_t}$. Por normalidad existe un abierto G tal que $\overline{M_s} \subseteq G = \mathring{G} \subseteq \overline{G} \subseteq \mathring{M_t} \subseteq M_t$. Ponemos $M_r = G$. Hemos terminado así la construcción de los conjuntos $\{M_r\}_{r\in D}$.

Definamos ya la aplicación $f : X \to [0,1]$ por medio de la expresión

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r \in D : x \in \overline{M_r}\} & \text{si } x \notin C_2 \\ 0 & \text{si } x \in C_2 \end{cases}$$

f está bien definida pues decir que $x \notin C_2$ es equivalente a decir que $x \in M_1$ y, por tanto, $\{r \in D : x \in \overline{M_r}\}$ es un conjunto no vacío y acotado luego tiene ínfimo. Además, por la definición de f, se tiene que $f(C_1) \subseteq 0$ y $f(C_2) \subseteq 1$.

Comprobemos que f es continua para dar por concluida la prueba. Sea $x \in X$, distingamos tres casos:

(a) Supongamos que $0 < f(x) < 1$. Sea $\epsilon > 0$, por la densidad de D, existen $t, s \in D$ tales que

$$f(x) - \epsilon < t < f(x) < s < f(x) + \epsilon$$

Como $t < f(x)$ se tiene que $x \notin \overline{M_t}$. Por otro lado al ser $f(x) < s$ se cumple que $x \in \overline{M_r}$ para algún $r \in D$ con $r < s$ luego $x \in \mathring{M}_s$ pues por construcción $\overline{M_r} \subseteq \mathring{M}_s$. Por tanto $U^x = (X \backslash \overline{M_t}) \cap \mathring{M}_s$ es un entorno abierto de x. Además, si $y \in U^x$ se tiene que $y \notin \overline{M_t}$ luego $t \leq f(y)$ e $y \in \mathring{M}_s$ luego $f(y) \leq s$. Así, $f(U^x) \subseteq [t, s] \subseteq (f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon)$ luego f es continua en x.

(b) Supongamos ahora que $f(x) = 1$. Sea $\epsilon > 0$ entonces existe $t \in D$ con $1 - \epsilon < t < 1$, en particular, $x \notin \overline{M_t}$. Tomemos el entorno abierto $U^x = X \backslash \overline{M_t}$ de x. Si $y \in U^x$ entonces $y \notin \overline{M_t}$ luego, por construcción, $y \notin \overline{M_r}$ si $r \in D$ con $r < t$ y $f(y) \geq t$. Concluyendo que $f(U^x) \subseteq (1 - \epsilon, 1]$ y, por ello, f es continua en x.

(c) Para terminar supongamos que $f(x) = 0$. Sea $\epsilon > 0$ y sea $s \in D$ con $0 < s < \epsilon$. Se tiene que $U^x = \mathring{M}_s$ es un entorno abierto de x tal que $f(\mathring{M}_s) \subseteq [0, \epsilon)$ luego f es continua en x. $\square$

Teorema 3.9. *Todo espacio pseudometrizable es normal. Por tanto, todo espacio metrizable es T_4.*

Demostración. Sea X un espacio pseudometrizable y sea d una pseudométrica que describa su topología. Sean C_1 y C_2 cerrados disjuntos de X. Consideremos la aplicación continua f de X en $\mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = d(x, C_1) - d(x, C_2)$$

Se tiene que $G_1 = f^{-1}((-\infty, 0))$ y $G_2 = f^{-1}((0, \infty))$ son dos abiertos disjuntos que contienen a C_1 y C_2, respectivamente. $\square$

Observaciones 3.10 **1.** Los axiomas normal y T_4 se heredan a subconjuntos cerrados. En cambio, hay ejemplos que muestran que ser *normal* y, por tanto, T_4 no son propiedades hereditarias.

2. La imagen continua por una aplicación cerrada de un espacio normal es normal. En particular la imagen continua por una aplicación cerrada de un espacio T_4 es T_4.

3. Respecto a los productos topológicos se tiene que si un espacio producto es normal (T_4) entonces cada espacio del producto es normal (T_4). El comportamiento con las sumas topológicas es mejor, un espacio suma es normal (T_4) si y sólo si cada espacio de la suma es normal (T_4).

A continuación damos una caracterización de la normalidad por existencia de contracciones.

Teorema 3.11. *Sea X un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *X es normal.*

(ii) *Todo recubrimiento abierto puntualmente finito de X admite una contracción.*

Demostración. **(ii)⇒(i)** Sean C_1 y C_2 cerrados disjuntos de X. Se tiene pues que $\{X\backslash C_1, X\backslash C_2\}$ es un recubrimiento abierto puntualmente finito de X luego, por la hipótesis, existe una retracción $\{V_1, V_2\}$ de $\{X\backslash C_1, X\backslash C_2\}$. Entonces, $G_1 = X\backslash\overline{V_1}$ y $G_2 = X\backslash\overline{V_2}$ son dos abiertos disjuntos que contienen a C_1 y C_2, respectivamente. Concluimos que X es normal.

(i)⇒(ii) Sea T la topología de X y sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto puntualmente finito de X. Sea $\mathcal{F}$ la familia de aplicaciones $f : I \to T$ que satisfacen las siguientes dos condiciones:

$$f(i) = U_i \text{ o } \overline{f(i)} \subseteq U_i \text{ para cada } i \in I. \tag{II.1}$$

$$\bigcup_i f(i) = X \tag{II.2}$$

Claramente $\mathcal{F}$ es no vacío pues la aplicación f dada por $f(i) = U_i$ para cada $i \in I$ cumple las condiciones. Definimos en $\mathcal{F}$ el siguiente orden parcial: Dados $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ diremos que $f_1 \leq f_2$ si para cada $i \in I$ con $f_1(i) \neq U_i$ se tiene que $f_1(i) = f_2(i)$.

Tomemos una cadena $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ cualquiera y comprobemos que la aplicación definida $f_0(i) = \bigcap_{f\in\mathcal{C}} f(i)$ es un elemento de $\mathcal{F}$. Obsérvese que al ser $\mathcal{C}$ una cadena y por la definición del orden de $\mathcal{F}$ se tiene que para cada $i \in I$ si existe $f \in \mathcal{C}$ con $f(i) \neq U_i$ entonces $f_0(i) = f(i)$ y en caso contrario $f(i) = U_i$. Por tanto, f_0 cumple la condición (II.1) y en caso de pertenecer a $\mathcal{F}$ será una cota superior de la cadena.

Estudiemos la condición (II.2). Sea $x \in X$, como $\{U_i\}_{i\in I}$ es puntualmente finita existen $i_1, ..., i_k \in I$ tales que $x \in U_{i_s}$ para cada $s \in \{1, 2, ..., k\}$ y $x \notin U_i$ para cada $i \notin \{i_1, ..., i_k\}$.

En primer lugar supongamos que $f_0(i_s) = U_{i_s}$ para algún $s \in \{1, 2, ..., k\}$. Entonces $x \in f_0(i_s) \subseteq \bigcup_i f_0(i)$.

Supongamos ahora que $f_0(i_s) \neq U_{i_s}$ para cada $s \in \{1, 2, ..., k\}$. Entonces para cada $s \in \{1, 2, ..., k\}$ existe $f_s \in \mathcal{C}$ tal que $f_0(i_s) = f_s(i_s) \subsetneq U_{i_s}$. Como $\mathcal{C}$ es una cadena debe existir $\overline{s} \in \{1, 2, ..., k\}$ tal que $f_s \leq f_{\overline{s}}$, luego $f_{\overline{s}}(i_s) = f_s(i_s) = f_0(i_s)$ para cada $s \in \{1, 2, ..., k\}$. Además $f_{\overline{s}}$ cumple la condición (II.2) luego existe $j \in \{i_1, ..., i_k\}$ tal que $x \in f_{\overline{s}}(j) = f_0(j)$. Por tanto, $x \in \bigcup_i f_0(i)$, f_0 satisface (II.2) y define un elemento de $\mathcal{F}$ que es cota superior de la cadena $\mathcal{C}$.

En resumen, cualquier cadena de $\mathcal{F}$ admite una cota superior. Por tanto, aplicando el *Lema de Zorn* existe $g \in \mathcal{F}$ maximal. Para terminar comprobemos que g resuelve el problema, es decir, que $\overline{g(i)} \subseteq U_i$ para cada $i \in I$. Supongamos que no, entonces existe $j \in I$ tal que $g(j) = U_j$. Consideremos el cerrado $C = X\backslash \bigcup_{i\neq j} \subseteq g(j)$. Como X es normal, existe un abierto U tal que $C \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq g(j)$. Definiendo $g_0(i) = g(i)$ si $i \neq j$ y $g_0(j) = U$ obtenemos un elemento de $\mathcal{F}$ tal que $g \leq g_0$ contradiciendo la maximalidad. □

Observación 3.12 También existen caracterizaciones de la normalidad relativas a familias discretas de cerrados. Se puede probar que un espacio topológico es normal si y sólo si cualquier familia numerable y discreta de cerrados puede verse como un refinamiento cerrado preciso de una familia de abiertos disjuntos dos a dos. Existen ejemplos que muestran que la numerabilidad es esencial en esta caracterización lo que motiva la siguiente definición.

Definición 3.13. Un espacio topológico X se dice *colectivamente normal* si para cualquier familia discreta de cerrados $\{C_i\}_{i\in I}$ existe una familia de abiertos $\{G_i\}_{i\in I}$ disjuntos dos a dos tal que $C_i \subseteq G_i$.

Observación 3.14 Todo espacio colectivamente normal es normal.

Definición 3.15. Un espacio topológico se dice T_4^* si es colectivamente normal y T_1.

Observación 3.16 Todo espacio T_4^* es T_4.

El siguiente resultado nos será de utilidad en el capítulo V:

Teorema 3.17. *Sea X un espacio topológico. Supongamos que X es colectivamente normal, entonces para cualquier familia discreta de cerrados $\{C_i\}_{i\in I}$ existe una familia discreta de abiertos $\{U_i\}_{i\in I}$ con $C_i \subseteq U_i$ para cada $i \in I$.*

Demostración. Sea $\{C_i\}_{i\in I}$ una familia discreta de cerrados. Como X es colectivamente normal existe una familia $\{G_i\}_{i\in I}$ de abiertos disjuntos dos a dos con $C_i \subseteq G_i$ para cada $i \in I$. Ahora, como $\{C_i\}_{i\in I}$ es localmente finita por ser discreta, se tiene que $C = \bigcup_{i\in I} C_i$ es cerrado. Además, $C \subseteq \bigcup_{i\in I} G_i$ y como X es normal, pues es colectivamente normal, existe un abierto G con

$$C \subseteq A \subseteq \overline{A} \subseteq \bigcup_{i\in I} G_i$$

Tomando $U_i = G_i \cap A$ para cada $i \in I$ se resuelve el problema. $\square$

Observación 3.18 Se puede probar que el resultado anterior en realidad caracteriza a los espacios colectivamente normales.

Teorema 3.19. *Sean X e Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una aplicación continua, cerrada y sobreyectiva. Si X es colectivamente normal (T_4^*) entonces Y es colectivamente normal (T_4^*).*

Demostración. La propiedad T_1 se mantiene por aplicaciones cerradas luego basta comprobar que Y es colectivamente normal si X también lo es.

Supongamos pues que X es colectivamente normal. Sea $\{C_i\}_{i\in I}$ una familia discreta de cerrados de Y. Entonces $\{f^{-1}(C_i)\}_{i\in I}$ es una familia discreta de cerrados de X y, por la hipótesis, existe una familia de abiertos $\{U_i\}$ disjuntos dos a dos con $f^{-1}(C_i) \subseteq U_i$ para cada $i \in I$. Consideremos la familia de abiertos $\{W_i = Y \backslash f(X \backslash U_i)\}_{i\in I}$. Es un ejercicio fácil comprobar que éstos son disjuntos dos a dos y $C_i \subseteq W_i$ para cada $i \in I$. En conclusión Y es colectivamente normal. $\square$

4. Lema de inmersión

Definición 4.1. Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos y $\mathcal{F} = \{f_i : X \to X_i\}_{i\in I}$ una familia de aplicaciones. Diremos que:

(i) $\mathcal{F}$ *distingue puntos* si para cualesquiera puntos distintos $x, y \in X$ existe $i \in I$ con $f_i(x) \neq f_i(y)$.

(ii) $\mathcal{F}$ *distingue puntos de cerrados* de $(X, \mathcal{T})$ en $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}_{i\in I}$ si para cualquier cerrado C en X y cualquier punto $x \in X \backslash C$ existe $i \in I$ con $g_i(x) \notin \overline{g_i(C)}$. Si no hay ambigüedad diremos que $\mathcal{F}$ distingue puntos y cerrados.

En estos términos se establece el *Lema de Inmersión* que da condiciones para sumergir un espacio topológico en un producto topológico.

Teorema 4.2. (Lema de Inmersión) *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, sea $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos y sea $\mathcal{F} = \{f_i : X \to X_i\}_{i\in I}$ una familia de aplicaciones continuas tales que:*

(i) *$\mathcal{F}$ distingue puntos.*

(ii) *$\mathcal{F}$ distingue puntos y cerrados.*

Entonces, X se puede sumergir topológicamente en $\prod_i X_i$ vía

$$e = (f_i)_{i\in I} : X \to \prod_i X_i$$

Demostración. En primer lugar comprobemos que $\mathcal{B}_{\mathcal{F}} = \{f_i^{-1}(U_i) : U_i \in \mathcal{T}_i\}_{i\in I}$ es base de $\mathcal{T}$. Como cada f_i es continua se tiene que $\mathcal{B}_{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{T}$. Sea $U \in \mathcal{T}$ distinto de X, sea $x \in U$ como $\mathcal{F}$ distingue puntos de cerrados existe una aplicación f_i tal que $f_i(x) \notin \overline{f_i(X\backslash U)}$ por tanto existe $U_i \in \mathcal{T}_i$ tal que $f_i(x) \in U_i$ y $U_i \cap f_i(X\backslash U) = \varnothing$ luego $x \in f_i^{-1}(U_i) \subseteq U$. Así, $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ es base de $\mathcal{T}$.

Para terminar comprobemos que $e = (f_i)_i$ es un homeomorfismo sobre su imagen. Es claro que e es continua por serlo cada f_i, además es biyectiva sobre su imagen pues $\mathcal{F}$ distingue puntos. Además e es abierta, y por tanto homeomorfismo sobre su imagen, en efecto como $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ es base de $\mathcal{T}$ basta ver que $e(f_i^{-1}(U_i))$ es abierto en $e(X)$ para todo $i \in I$ y para cada U_i en $\mathcal{T}_i$. Denotemos por j la inclusión de $e(X)$ en $\prod_i X_i$ y por p_i a la proyección i-ésima del producto, el siguiente diagrama es conmutativo para cada $i \in I$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e"] \arrow[dr, "f_i"'] & e(X) \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d] & \prod_i X_i \arrow[dl, "p_i"] \\ & X_i & \end{tikzcd}$$

por ello, si $U_i \in \mathcal{T}_i$ se tiene que $e(f_i^{-1}(U_i)) = (p_i \circ j)^{-1}(U_i)$ es abierto como queríamos. $\square$

Capítulo III

Paracompacidad

En este capítulo tratamos la noción de *espacio paracompacto* introducida por Dieudonné, en 1944, como una generalización natural de los espacios compactos. La paracompacidad juega un rol prominente en todas las áreas de las matemáticas. Permite caracterizar la existencia de particiones de la unidad en espacios topológicos, así como tratar el famoso problema de la metrización por medio del Teorema de Stone, abierto hasta hace algo más de medio siglo. Intentaremos dar una introducción rigurosa de la paracompacidad, caracterizarla y estudiar sus principales propiedades.

En la primera sección daremos *caracterizaciones de la paracompacidad en espacios regulares,* debidas a E. Michael. La segunda y la tercera sección estudian la relación de la paracompacidad con otras propiedades topológicas. Dedicamos la cuarta sección a las principales propiedades de la paracompacidad: sobre qué subconjuntos es hereditaria, su invariancia por homeomorfismos o su relación con la suma y el producto topológico. La quinta sección presenta el resultado clave del capítulo, debido a Stone, que viene a decir que todo espacio pseudométrico es paracompacto. Este *teorema de Stone* tendrá un papel fundamental en el capítulo V.

1. Espacios paracompactos

Definición 1.1. Un espacio topológico X se dice *paracompacto* si todo recubrimiento abierto suyo admite un refinamiento abierto localmente finito.

Observaciones 1.2 **1.** La paracompacidad es equivalente a decir que todo recubrimiento abierto admite un refinamiento abierto preciso localmente finito, véase I.3.4.

2.Todo espacio compacto es paracompacto. El recíproco es falso, basta considerar un espacio discreto infinito.

Si el espacio es regular la paracompacidad se puede caracterizar por refinamientos especiales.

Teorema 1.3 (E. Michael)**.** *Sea X un espacio topológico regular. Son equivalentes:*

(i) *X es paracompacto.*
(ii) *Todo recubrimiento abierto de X admite un refinamiento abierto σ-localmente finito.*
(iii) *Todo recubrimiento abierto de X admite un refinamiento localmente finito.*
(iv) *Todo recubrimiento abierto de X admite un refinamiento cerrado localmente finito.*
(v) *Todo recubrimiento abierto de X admite un refinamiento cerrado preciso localmente finito.*

Demostración. **(i)⇒(ii)** Trivial.

(ii)⇒(iii) Sea $\mathcal{U}$ un recubrimiento abierto de X y sea $\mathcal{V}$ un refinamiento abierto suyo con $\mathcal{V} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_n$ donde cada $\mathcal{V}_n$ es localmente finito. Para $n \in \mathbb{N}$ y $V \in \mathcal{V}_n$ definimos $V^* = V \setminus \bigcup_{W\in\mathcal{V}_k}^{k<n} W$. Consideremos la familia $\mathcal{A} = \{V^* : V \in \mathcal{V}_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Se satisface que:

(1) $\mathcal{A}$ es recubrimiento de X: Sea $x \in X$ y sea $n(x)$ el primer natural tal que $x \in V \in \mathcal{V}_{n(x)}$. Entonces $x \in V^*$.

(2) $\mathcal{A}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$: $\mathcal{A}$ es un refinamiento de $\mathcal{V}$ y éste lo es de $\mathcal{U}$.

(3) $\mathcal{A}$ es localmente finito: Sea $x \in X$ y sea $n(x)$ el primer natural con $x \in V \in \mathcal{V}_{n(x)}$, entonces V no corta a ningún elemento de $\mathcal{A}$ construido con elementos de $\mathcal{V}_k$ con $k > n(x)$. Por otro lado la unión finita de familias localmente finitas es localmente finita, por ello existe V^x que corta a un número finito de elementos de $\bigcup_{i=1}^{n(x)} \mathcal{V}_i$. En definitiva, $W = V \cap V^x$ es un entorno de x que corta a un número finito de elementos de $\mathcal{A}$.

(iii)⇒(iv) Sea $\mathcal{U}$ un recubrimiento abierto de X. Cada $x \in X$, tiene un entorno $U^x \in \mathcal{U}$ y, por la regularidad de X, se tiene un V^x entorno abierto de x con $\overline{V^x} \subseteq U^x$. Así $\{V^x\}_{x\in X}$ es un refinamiento abierto de $\mathcal{U}$. Por hipótesis existe un refinamiento localmente finito $\mathcal{A}$ de $\{V^x\}_{x\in X}$, y, por tanto de $\mathcal{U}$. Resulta que $\overline{\mathcal{A}} = \{\overline{A}/A \in \mathcal{A}\}$ es un refinamiento cerrado localmente finito de $\mathcal{U}$.

(iv)⇒(i) Sea $\mathcal{U}$ un recubrimiento abierto de X, por hipótesis $\mathcal{U}$ tiene un existe refinamiento cerrado localmente finito $\mathcal{C}$. Para cada $x \in X$, tomemos un entorno V^x de x que corte a un número finito de elementos de $\mathcal{C}$ y consideremos un refinamiento cerrado localmente finito $\mathcal{F}$ de $\{V^x\}_{x\in X}$.

Sea $C \in \mathcal{C}$ y sea $U(C) \in \mathcal{U}$ tal que $C \subseteq U(C)$. Por la finitud local de $\mathcal{F}$ se tiene que $F(C) = \bigcup\{T : T \in \mathcal{F}, T \cap C = \varnothing\}$ es cerrado, por tanto, $V(C) = X \setminus F(C)$ es un abierto que contiene a C.

Pongamos $\mathcal{V} = \{U(C) \cap V(C) : C \in \mathcal{C}\}$ y comprobemos que $\mathcal{V}$ es un refinamiento abierto localmente finito de $\mathcal{U}$ para terminar.

Claramente $\mathcal{V}$ es un refinamiento abierto de $\mathcal{U}$ pues $\mathcal{C}$ recubre X y para cada $C \in \mathcal{C}$ se tiene que $U(C) \cap V(C) \subseteq U(C) \in \mathcal{U}$. Ahora, sea $x \in X$, de nuevo, por la finitud local de $\mathcal{F}$, se tiene que $W^x = X \setminus \bigcup\{T : T \in \mathcal{F}, x \notin T\}$ es un entorno abierto de x y, además, $W^x \subseteq \bigcup\{T : T \in \mathcal{F}/x \in T\} = T_1 \cup ... \cup T_n$. Obsérvese que por la construcción de $\mathcal{F}$ cada F_i corta a un número finito de elementos de $\mathcal{C}$ y, por tanto, de $\mathcal{V}$. Así W^x es un entorno abierto de x que corta a un número finito de elementos de $\mathcal{V}$.

(iv)⇔(v) Se sigue de I.3.4. □

Corolario 1.4. *Todo espacio topológico regular y Lindelöf es paracompacto.*

Teorema 1.5 (E. Michael)**.** *Sea X un espacio topológico regular. Son equivalentes:*

(i) X *es paracompacto.*

(ii) *Todo recubrimiento abierto de X tiene un refinamiento abierto que conmuta unión con adherencia.*

(iii) *Todo recubrimiento abierto de X tiene un refinamiento abierto que es unión numerable de familias que conmutan unión con adherencia.*

(iv) *Todo recubrimiento abierto de X tiene un refinamiento que conmuta unión con adherencia.*

(v) *Todo recubrimiento abierto de X tiene un refinamiento cerrado que conmuta unión con adherencia.*

Demostración. **(i)⇒ (ii)** Se sigue de que toda familia localmente finita conmuta la unión con la adherencia.

(ii)⇒ (iii) Trivial.

(iii)⇒ (iv) Sea $\mathcal{U}$ un recubrimiento por abiertos de X. Por regularidad, para cada $x \in X$ existe V^x con $\overline{V^x}$ contenido en algún elemento de $\mathcal{U}$. Por hipótesis existe un refinamiento abierto $\mathcal{V}$ de $\{V^x\}_{x \in X}$, y por tanto también de $\mathcal{U}$, con $\mathcal{V} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n$ donde $\mathcal{V}_n$ conmuta unión con adherencia. Pongamos $V_n = \bigcup_{V \in \mathcal{V}_n} V$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y sea $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la familia de cerrados dada por $C_1 = X$ y $C_n = X \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} V_j$ para cada $n > 1$. La familia $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es localmente finita pues si $x \in X$ entonces existe un primer natural $n(x)$ con $x \in W^x \in \mathcal{V}_{n(x)}$ y $W^x \cap C_n = \varnothing$ para $n > n(x)$.

Definamos $\mathcal{A} = \{\overline{V} \cap C_n : V \in \mathcal{V}_n, n \in \mathbb{N}\}$ y veamos que cumple lo requerido.

1. $\mathcal{A}$ recubre X: Sea $x \in X$ entonces existe un primer natural $n(x)$ con $x \in V \subseteq V_{n(x)}$, por tanto, $x \in \overline{V} \cap C_{n(x)} \in \mathcal{A}$.

2. $\mathcal{A}$ refina $\mathcal{U}$: Sea $\overline{V} \cap C_n \in \mathcal{A}$: Por construcción para cada $V \in \mathcal{V}$ existe $U \in \mathcal{U}$ con $\overline{V} \subseteq U$, por tanto, $\overline{V} \cap C_n \subseteq U$.

3. $\mathcal{A}$ conmuta unión con adherencia: Podemos escribir $\mathcal{A} = \bigcup_n \mathcal{A}_n$ con $\mathcal{A}_n = \{\overline{V} \cap C_n : V \in \mathcal{V}_n\}$. Ahora bien, como $\mathcal{V}_n$ conmuta la unión con la adherencia y C_n es cerrado se tiene

$$\bigcup_{V \in \mathcal{V}_n} \overline{V} \cap C_n = (\bigcup_{V \in \mathcal{V}_n} \overline{V}) \cap C_n = \overline{\bigcup_{V \in \mathcal{V}_n} V} \cap C_n \text{ y } \overline{V} \cap C_n$$

son cerrados. Por tanto,

$$\overline{\bigcup_{V \in \mathcal{V}_n} \overline{V} \cap C_n} = \bigcup_{V \in \mathcal{V}_n} \overline{V} \cap C_n = \bigcup_{V \in \mathcal{V}_n} \overline{\overline{V} \cap C_n}$$

y $\mathcal{A}_n$ conmuta unión con adherencia.

Ahora, sea $x \in \overline{\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A}$. Como $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es localmente finita existe un entorno abierto V^x de x que únicamente corta a un número finito de elementos de $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que podemos suponer que son C_1, C_2, ..., C_k. Luego $x \notin \overline{\bigcup_{n=k+1}^{\infty} \bigcup_{A \in \mathcal{A}_n} A}$. Por otro lado,

$$\begin{aligned}\overline{\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A} = \overline{\bigcup_n \bigcup_{A \in \mathcal{A}_n} A} &= \overline{(\bigcup_{n=1}^{k} \bigcup_{A \in \mathcal{A}_n} A) \cup (\bigcup_{n=k+1}^{\infty} \bigcup_{A \in \mathcal{A}_n} A)} \\ &= (\overline{\bigcup_{n=1}^{k} \bigcup_{A \in \mathcal{A}_n} A}) \cup (\overline{\bigcup_{n=k+1}^{\infty} \bigcup_{A \in \mathcal{A}_n} A})\end{aligned}$$

Así,

$$x \in \overline{\bigcup_{n=1}^{k} \bigcup_{A\in\mathcal{A}_n} A} = \bigcup_{n=1}^{k} \overline{\bigcup_{A\in\mathcal{A}_n} A} = \bigcup_{n=1}^{k} \bigcup_{A\in\mathcal{A}_n} \overline{A} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{A\in\mathcal{A}_n} \overline{A} = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} \overline{A}.$$

Es decir, $\overline{\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A} \subseteq \bigcup_{A\in\mathcal{A}} \overline{A}$ y $\mathcal{A}$ conmuta la unión con la adherencia.

(iv)⇒(v) Sea $\mathcal{U}$ un recubrimiento abierto de X. Por regularidad, cada $x \in X$ tiene un entorno abierto V^x cuya adherencia está contenida en algún elemento de $\mathcal{U}$. Consideremos ahora $\mathcal{W}$ un refinamiento de $\{V^x\}_{x\in X}$ que conmute la unión con la adherencia, entonces $\overline{\mathcal{W}} = \{\overline{W} : W \in \mathcal{W}\}$ es un refinamiento por cerrados de $\mathcal{U}$ que conmuta la unión con la adherencia, como queríamos.

(v)⇒ (i) La prueba constará de varias partes:

1. *Para todo recubrimiento abierto $\{U_i\}_{i\in I}$ de X existe un refinamiento cerrado preciso $\{C_i\}_{i\in I}$ que conmuta la unión con la adherencia.*

Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento por abiertos de X. Por hipótesis existe un refinamiento cerrado $\{F_j\}_{j\in J}$ que conmuta la unión con la adherencia. Definiendo $C_i = \bigcup_{F_j\subseteq U_i} F_j$, que es cerrado pues $\{F_j\}_{j\in J}$ conmuta la unión con la adherencia, obtenemos lo buscado.

2. *X es normal.*

Sean C_1, C_2 cerrados disjuntos, entonces $\{X\backslash C_1, X\backslash C_2\}$ es un recubrimiento abierto de X. Por **1** existe un refinamiento cerrado $\{C_1', C_2'\}$, consideremos pues los abiertos disjuntos $G_1 = X\backslash C_1', G_2 = X\backslash C_2'$. Se tiene que $C_1 \subseteq G_1$ y $C_2 \subseteq G_2$ luego X es normal.

3. *Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto y sea $\leqslant$ un buen orden de I. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un refinamiento cerrado $\{C_i^n\}_{i\in I}$ que conmuta unión con adherencia y cumple:*

(a) *$C_i^n \subseteq U_i$, para $i \in I$, $n \in \mathbb{N}$.*
(b) *$C_i^{n+1} \cap C_j^n = \varnothing$ para $i, j \in I$ con $i > j$, $n \in \mathbb{N}$.*

Por **1** existe la familia $\{C_i^1\}_{i\in I}$ que cumple **(a)**. Supongamos construidas las familias $\{C_i^s\}$ que cumplen **(a)** y **(b)** para $s = 1, 2, ..., n$ y construyamos la familia $\{C_i^{n+1}\}_{i\in I}$.

Para cada $i \in I$ ponemos $U_i^{n+1} = U_i\backslash \bigcup_{j<i} C_j^n$ abierto, ya que la familia $\{C_i^n\}_{i\in I}$ conmuta la unión con la adherencia.

Comprobemos que $\{U_i^{n+1}\}_{i\in I}$ recubre X. Sea $x \in X$ y sea $i(x) \in I$ el primer índice con $x \in U_{i(x)}$ y como $\{C_i^n\}_{i\in I}$ satisface **(a)** se tiene que $x \in U_{i(x)}^{n+1} = U_{i(x)}\backslash \bigcup_{j<i(x)} C_j^n$.

Ahora por **1** existe $\{C_i^{n+1}\}_{i\in I}$ refinamiento cerrado de $\{U_i^{n+1}\}_{i\in I}$ que conmuta la unión con la adherencia y con $C_i^{n+1} \subseteq U_i^{n+1} \subseteq U_i$, para $i \in I$. Luego $\{C_i^{n+1}\}_{i\in I}$ satisface **(a)** y la propiedad **(b)** se sigue de que $C_i^{n+1} \subseteq U_i^{n+1} = U_i\backslash \bigcup_{j<i} C_j^n$. Dando por terminada la prueba de **3**.

4. *Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento por abiertos de X y sea $\leqslant$ un buen orden de I. Entonces existe un refinamiento abierto de $\{U_i\}_{i\in I}$, digamos, $\{V_i^n : i \in I, n \in \mathbb{N}\}$ tal que:*

(a) *$V_i^n \subseteq U_i$, para $i \in I, n \in \mathbb{N}$.*
(b) *$V_i^n \cap V_j^n = \varnothing$, para $i, j \in I$ con $i \neq j$, $n \in \mathbb{N}$.*

Tomemos las familias de cerrados $\{C_i^n\}_{i\in I}$ construidas en **3** y definamos $V_i^n = X\backslash \bigcup_{j\neq i} C_j^n$ que es abierto pues $\{C_i^n\}_{i\in I}$ conmuta unión con adherencia.

En primer lugar comprobemos que $\{V_i^n : i \in I, n \in \mathbb{N}\}$ recubre X. En efecto, sea $x \in X$ para cada n denotemos i_n al menor índice en I con $x \in C_{i_n}^n$ y sea $i_k = \min\{i_n / n \in \mathbb{N}\}$. Entonces, $x \in V_{i_k}^{k+1} = X \backslash \bigcup_{j \neq i_k} C_j^{k+1}$ pues si $j < i_k$ la elección de i_k hace que $x \notin C_j^{k+1}$ y si $j > i_k$ por **3** se tiene que $C_j^{k+1} \cap C_{i_k}^k = \varnothing$.

Finalmente

(a) $V_i^n = X \backslash \bigcup_{j \neq i} C_j^n \subseteq C_i^n$ y, por **3**, además $C_i^n \subseteq U_i$.

(b) Sean $i, j \in I$ con $i \neq j$. Tenemos $V_i^n \subseteq C_i^n$ y $V_j^n \subseteq C_j^n$. Luego $V_i^n \cap V_j^n \subseteq V_i^n \cap C_j^n = \varnothing$ por construcción.

5. *X es paracompacto*

Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento por abiertos de X. Consideremos el refinamiento abierto $\{V_i^n / i \in I, n \in \mathbb{N}\}$ construido según **4**. Por **1** existe un refinamiento cerrado $\{F_i^n / i \in I, n \in \mathbb{N}\}$ de $\{V_i^n / i \in I, n \in \mathbb{N}\}$ que conmuta la unión con la adherencia y con $F_i^n \subseteq V_i^n$ para $i \in I, n \in \mathbb{N}$. Además por **(b)** de **4** para cada $n \in \mathbb{N}$ los $\{V_i^n\}_{i \in I}$ son disjuntos dos a dos.

Construyamos para cada $n \in \mathbb{N}$ una familia localmente finita de abiertos $\mathcal{G}_n = \{G_i^n / i \in I\}$ con $F_i^n \subseteq G_i^n \subseteq V_i^n$, para cada $i \in I$. Sea W^n el abierto formado por los puntos de X que tienen un entorno abierto cortando a un número finito de V_i^n. Por ser los abiertos $\{V_i^n\}_{i \in I}$ disjuntos dos a dos se tiene que $\bigcup_i V_i^n \subseteq W^n$ luego $\bigcup_i F_i^n \subseteq W^n$ y es cerrado. Por normalidad existe un abierto G^n con $\bigcup_i F_i^n \subseteq G^n \subseteq \overline{G^n} \subseteq W^n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Finalmente sea $G_i^n = G^n \cap V_i^n$, $i \in I$. Se tiene que $\mathcal{G} = \bigcup_n \mathcal{G}_n$ es un recurbrimiento por abiertos de X pues $\{F_i^n : i \in I, n \in \mathbb{N}\}$ recubre X. Por tanto $\mathcal{G}$ es un refinamiento abierto σ-localmente finito de $\{U_i\}_{i \in I}$ pues lo es de $\{V_i^n : i \in I, n \in \mathbb{N}\}$. Por 1.3(ii) X es paracompacto. □

2. Paracompacidad y separación

Proposición 2.1. *Todo espacio paracompacto y regular es normal.*

Demostración. Sea X un espacio paracompacto y regular. Sean C_1 y C_2 cerrados disjuntos de X. Entonces $\{X \backslash C_1, X \backslash C_2\}$ es un recubrimiento abierto de X. Por la hipótesis existe un refinamiento cerrado $\{F_1, F_2\}$ de $\{X \backslash C_1, X \backslash C_2\}$ con $F_1 \subseteq X \backslash C_1$ y $F_2 \subseteq X \backslash C_2$. Por tanto, $X \backslash F_1$ y $X \backslash F_2$ son abiertos disjuntos que contienen a C_1 y C_2, respectivamente. Así, X es normal. □

Proposición 2.2. *Todo espacio paracompacto y Hausdorff es regular y, por tanto, T_4.*

Demostración. Sea X un espacio paracompacto y Hausdorff. Sea $C \subseteq X$ cerrado en X y sea $x \notin C$. Por ser X Hausdorff para todo $y \in C$ existe V^y entorno abierto de y con $x \notin \overline{V^y}$. Tenemos así el recubrimiento abierto de X dado por $\{V^y\}_{y \in C} \cup \{X \backslash C\}$, que tiene por la paracompacidad un refinamiento abierto localmente finito $\{W_i\}_{i \in I}$. Pongamos $J = \{i \in I : W_i \cap C \neq \varnothing\}$ y tomemos el abierto $G = \bigcup_{i \in J} W_i$. Claramente $C \subseteq G$ y, además, $x \notin \overline{G}$. En efecto, por ser $\{W_i\}_{i \in I}$ una familia localmente finita conmuta la unión con la adherencia y, por ello, $\overline{G} = \bigcup_{i \in J} \overline{W_i}$. Ahora como $x \notin \overline{V^y}$ para cada $y \in C$ se tiene que $x \notin \overline{W_i}$ para $i \in J$. Luego $x \notin \overline{G}$, es decir, $x \in X \backslash \overline{G}$ y como $C \subseteq G$ concluimos que X es regular. □

Proposición 2.3. *Todo espacio paracompacto y regular es colectivamente normal.*

Demostración. Sea X un espacio paracompacto y regular. Sea $\{F_i\}_{i \in I}$ una familia discreta de cerrados de X, buscamos una familia de abiertos $\{U_i\}_{i \in I}$, disjuntos dos a dos, con $F_i \subseteq U_i$. Como X es regular y $\{F_i\}_{i \in I}$ es discreta, para cada $x \in X$ existe un entorno suyo V^x tal que $\overline{V^x}$ corta a lo sumo a un elemento de $\{F_i\}_{i \in I}$. Ahora, por paracompacidad existe un refinamiento abierto y localmente finito $\{V_j\}_{j \in j}$ de $\{V^x\}_{x \in X}$.

Pongamos, para cada $i \in I, U_i = X \backslash \bigcup_{\overline{V_j} \cap F_i = \varnothing} \overline{V_j}$ que es abierto, por la finitud local de $\{V_j\}_{j \in j}$, y que contiene a F_i. Además $U_{i_1} \cap U_{i_2} = \varnothing$, para cada $i_1, i_2 \in I$ distintos. En efecto, para cada $j \in J$ se tiene que $\overline{V_j}$ corta a lo sumo a un único F_i y como $\{\overline{V_j}\}_{j \in J}$ recubre X se tiene que si $x \in U_{i_1}$ entonces $x \in \overline{V_j}$ para cierto $j \in J$ con $\overline{V_j} \cap F_{i_1} \neq \varnothing$ luego $\overline{V_j} \cap F_{i_2} = \varnothing$ y $x \notin U_{i_2}$. □

3. Paracompacidad y axiomas de numerabilidad.

Proposición 3.1. *Sea X un espacio topológico paracompacto y Hausdorff. Supongamos que existe un subespacio $D \subseteq X$ denso y Lindelöf. Entonces X es Lindelöf.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ un recubrimiento abierto de X. Como X es paracompacto y Hausdorff es regular. Por tanto, para cada $x \in X$ existe un entorno V^x con $\overline{V^x} \subseteq U$ para algún $U \in \mathcal{U}$. Por la paracompacidad de X existe un refinamiento abierto $\mathcal{V}$ localmente finito de $\{V^x\}_{x \in X}$. A su vez, como D es Lindelöf, existe una subfamilia $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{V}$ que recubre a D.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $U_n \in \mathcal{U}$ con $\overline{V_n} \subseteq U_n$. Se tiene que $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una subfamilia numerable de $\mathcal{U}$ que recubre X. En efecto, teniendo en cuenta que toda familia localmente finita conmuta la unión con la adherencia,

$$X = \overline{D} \subseteq \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{V_n} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n.$$

□

Corolario 3.2. *Sea X un espacio topológico paracompacto y Hausdorff. Si X es separable entonces es Lindelöf.*

4. Propiedades de la paracompacidad.

4.1. La paracompacidad como propiedad (no) hereditaria.

En general la paracompacidad no es una propiedad hereditaria.

Proposición 4.1. *Sea X un espacio paracompacto. Entonces:*

(i) *Si C es cerrado en X entonces es paracompacto.*

(ii) *Si X es regular y F es un F_σ, es decir unión numerable de cerrados, entonces F es paracompacto.*

(iii) *Si los abiertos de X son paracompactos entonces todo subconjunto de X es paracompacto.*

Demostración. **(i)** Sea C cerrado en X y sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_i$ un recubrimiento abierto de C. Para cada $i \in I$ podemos escribir $U_i = V_i \cap C$ con V_i abierto de X.Consideremos el recubrimiento abierto de X, $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i\in I} \cup \{X\backslash C\}$. Por ser X paracompacto existe un refinamiento abierto localmente finito de $\mathcal{V}$, digamos $\mathcal{V}'$. Entonces $\mathcal{U}' = \{C \cap V : V \in \mathcal{V}'\}$ es un refinamiento abierto localmente finito de $\mathcal{U}$ y C es paracompacto.

(ii) Sea F un F_σ, luego $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ con F_n cerrado. Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento por abiertos de F. Como cada F_n es paracompacto, por **(i)**, existe un refinamiento abierto $\mathcal{V}_n$ localmente finito de $\mathcal{U}$, visto como recubrimiento por abiertos de F_n. Entonces, $\mathcal{V} = \bigcup_n \mathcal{V}_n$ es un refinamiento abierto σ-localmente finito de $\mathcal{U}$ y como F es regular por serlo X concluimos que F es paracompacto.

(iii) Sea $M \subseteq X$ y sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de M. Pongamos $U_i = M \cap A_i$ con A_i abierto en X para cada $i \in I$. Consideremos el abierto $A = \bigcup_i A_i$ que es paracompacto por hipótesis luego existe un refinamiento abierto $\mathcal{V}$ localmente finito de $\{A_i\}_{i\in I}$. Se tiene que $\{V \cap M : V \in \mathcal{V}\}$ es un refinamiento abierto localmente finito de $\mathcal{U}$. □

En el siguiente ejemplo mostramos que la paracompacidad no es hereditaria.

Ejemplo 4.2 Sea $(\mathcal{C}, \leq)$ un conjunto no numerable dotado de un buen orden. Denotemos por 0 al primer elemento de $\mathcal{C}$ y por S al último. Consideremos el conjunto $M = \{x \in \mathcal{C} : [0, x) \text{ es no numerable}\}$ que es no vacío pues $S \in M$. Así, por ser un subconjunto no vacío de un conjunto bien ordenado, existe un primer elemento $\Omega \in M$ respecto al orden $\leq$. Dotemos al conjunto $[0, \Omega]$ con la topología del orden. Es decir, la definida por la base

$$\mathcal{B} = \{[0, x) : x \in (0, \Omega]\} \cup \{(x, y) : x < y, x, y \in [0, \Omega]\} \cup \{(x, \Omega] : x \in [0, \Omega)\}$$

En primer lugar comprobemos que $[0, \Omega]$ es un espacio compacto y, por tanto, paracompacto.

Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de $[0, \Omega]$. Sea A el conjunto de puntos $x \in [0, \Omega]$ para los cuales existe $F_x \subseteq I$ finito con $[0, x] \subseteq \bigcup_{i\in F_x} U_i$. Es evidente que $0 \in A$ y, además, A es un intervalo. Por ser A acotado existe $c = \sup(A) \in [0, \Omega]$, evidentemente $c > 0$. Para concluir que el espacio es compacto basta ver que $c = \Omega$ y que $c \in A$.

Supongamos que $c < \Omega$. Como $\mathcal{U}$ es un recubrimiento del espacio debe existir $U_{i_c} \in \mathcal{U}$ con $c \in U_{i_c}$. Como $c < \Omega$ y U_{i_c} es abierto existen $x, y \in [0, \Omega]$ con $x < c < y$ y $(x, y) \in U_{i_c}$. Entonces, como $x < c$ se tiene que $x \in A$ además existe $U_{i_y} \in \mathcal{U}$ con $y \in U_{i_y}$. Por tanto, $[0, y] \subseteq (\bigcup_{i\in F_x} U_i) \cup U_{i_c} \cup U_{i_y}$ luego $y \in A$ y esto es una contradicción. Así, $c = \Omega$.

Comprobemos ahora que $\Omega \in A$. Sea $U_{i_\Omega} \in \mathcal{U}$ con $\Omega \in U_{i_\Omega}$. Por ser abierto existe $x < \Omega$, y por tanto $x \in A$, con $x \in U_{i_\Omega}$ luego $[0, \Omega] \subseteq (\bigcup_{i\in F_x} U_i) \cup U_{i_\Omega}$. Es decir, $\Omega \in A$ y $[0, \Omega]$ es compacto.

No es difícil ver que además $[0, \Omega]$ es Hausdorff y, por tanto, T_4. Para terminar el ejemplo comprobemos que el abierto $G = [0, \Omega)$ no es paracompacto.

Tomemos el recubrimiento abierto $\mathcal{U} = \{[0, x) : x < \Omega\}$ de $[0, \Omega)$ y sea $\mathcal{V}$ un refinamiento cualquiera suyo. Obsérvese que para cada $x \in (0, \Omega)$ se tiene que $\mathcal{B}(x) = \{(y, x+1) : y < x\}$ forma una base de entornos de x. Por ello, podemos definir una aplicación $f : G \to G$ de forma que:

1. $f(0) = 0$.

2. $f(x) < x$ y $(f(x), x]$ está contenido en algún elemento de $\mathcal{V}$ para cada $x \in (0, \Omega)$.

Se cumple el siguiente aserto:

Sea $\varphi : G \to G$ es una aplicación tal que existe $x_0 \in (0, \Omega)$ con $\varphi(x) < x$ para cada $x \le x_0$. Entonces existe $y_0 \in G$ tal que para cada $y \in G$ existe $z \in G$ con $z \ge y$ y $\varphi(z) \le y_0$.

Supongamos que no fuese cierto. Entonces para cada $y_0 \in G$ existe $y \in G$ tal que si $z \ge y$ entonces $\varphi(z) > y_0$. Definamos la aplicación $\alpha : G \to G$ que asigna a cada y_0 el mínimo $y \in G$ tal que para cada $z \ge y$ se tiene $\varphi(z) \ge y_0$. Por otro lado consideremos el conjunto numerable $\mathcal{N} = \{x \in G : [0, x) \text{ es finito}\}$ y sea $\omega = \sup(\mathcal{N})$. Por inducción sobre $\mathcal{N}$ definimos la aplicación $\beta : [0, \omega) \to G$ con $\beta(0) = x_0$ y $\beta(x + 1) = \alpha(\beta(x))$. Sea $\overline{x} = \sup(\{\beta(x) : x \in [0, \omega)\})$. Por un lado $\overline{x} \ge \beta(0) = x_0$ luego por la hipótesis $\varphi(\overline{x}) < \overline{x}$. Por otro lado $\overline{x} \ge \beta(x + 1) = \alpha(\beta(x))$ para cada $x \in [0, \omega)$ luego, por la definición de α, se tiene que $\varphi(\overline{x}) > \beta(x)$ para cada $x \in [0, \omega)$. Es decir, $\varphi(\overline{x})$ es una cota superior del conjunto $\{\beta(x) : x \in [0, \omega)\}$ menor que su supremo lo cual es imposible.

Retomemos la prueba de que G no es paracompacto. La aplicación f que hemos definido antes verifica las hipótesis del aserto pues cualquier $x \in (0, \Omega)$ satisface que $f(x) < x$. Luego existe $y_0 \in G$ tal que para todo $y \in G$ existe $z \ge y$ con $f(z) \le y_0$. Consideremos el elemento $y_0 + 1$, para cada $y \ge y_0 + 1$ existe $z_y \ge y \ge y_0 + 1$ tal que $f(z_y) \le y_0 < y_0 + 1$ y, además, por la definición de f, existe $V_{z_y} \in \mathcal{V}$ con $y_0 + 1 \in (f(z_y), z_y] \subseteq V_{z_y}$.

Comprobemos que $y_0 + 1$ está en infinitos elementos de $\mathcal{V}$ y, por tanto, $\mathcal{V}$ no es localmente finito y G no es paracompacto.

Ciertamente, si y_0+1 sólo perteneciese a una cantidad finita de elementos de $\mathcal{V}$ digamos $V_1, ..., V_n$ se tendría, por la forma de $\mathcal{U}$, que existiría $y \in G$ con $V_1, ..., V_n \subseteq [0, y)$, nótese que forzosamente $y > y_0+1$. Para $y+1 \in G$ existe $z \ge y+1 > y$ con $y_0+1 \in (f(z), z] \subseteq V_z$. Ahora bien, como $z > y$ se tiene que $V_1, ..., V_n \subseteq [0, y) \subsetneq [0, z) \subseteq V_z$ luego $V_z \ne V_i$ para cualquier $i = 1, ..., n$ pero esto es imposible. $\square$

Proposición 4.3. *Sea X un espacio topológico regular. Supongamos que existe un recubrimiento $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i \in I}$ cerrado y localmente finito de X, con C_i paracompacto para todo $i \in I$. Entonces, X es paracompacto.*

Demostración. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ un recubrimiento abierto de X. Para cada $i \in I$ sea $\mathcal{U}_i = \{U_\alpha \cap C_i\}_{\alpha \in \Lambda}$ es un recubrimiento abierto de C_i, que es paracompacto y regular, luego existe un refinamiento $\mathcal{F}_i$ cerrado y localmente finito en C_i de $\mathcal{U}_i$.

Entonces, por ser $\{C_i\}_{i \in I}$ localmente finita, $\mathcal{F} = \bigcup_i \mathcal{F}_i$ es un refinamiento cerrado y localmente finito de $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$. Así, como X es regular, X es paracompacto. $\square$

4.2. La paracompacidad como propiedad topológica.

Proposición 4.4. *Sea X un espacio paracompacto y Hausdorff y $f : X \to Y$ continua, cerrada y sobreyectiva. Entonces, Y es paracompacto y Hausdorff.*

Demostración. X es paracompacto y Hausdorff luego es T_4. Ahora, como f es continua, cerrada y sobreyectiva, se tiene que $f(X) = Y$ es T_4, en particular Y es regular y Hausdorff. Sea $\mathcal{W}$ un recubrimiento abierto de Y, entonces $f^{-1}(\mathcal{W}) = \{f^{-1}(W) : W \in \mathcal{W}\}$ es un recubrimiento abierto de X. Como X es paracompacto y regular existe un refinamiento $\mathcal{C}$, que conmuta la unión con la adherencia, de $f^{-1}(\mathcal{W})$. Entonces $\mathcal{F} = \{f(C) : C \in \mathcal{C}\}$ es un refinamiento cerrado de $\mathcal{W}$.

Comprobemos que $\mathcal{F}$ conmuta la unión con la adherencia y, como Y es regular, daremos por concluida la prueba. Nótese que al ser f continua y cerrada, para todo $A \subseteq X$ se tiene $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$. Sea $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$, como $\mathcal{C}$ conmuta la unión con la adherencia, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\bigcup\{\overline{f(C)} : f(C) \in \mathcal{F}'\} &= \bigcup\{f(\overline{C}) : f(C) \in \mathcal{F}'\} = f(\bigcup\{\overline{C} : C \in \mathcal{C} \text{ con } f(C) \in \mathcal{F}'\}) \\
&= f(\overline{\bigcup\{C : C \in \mathcal{C} \text{ con } f(C) \in \mathcal{F}'\}}) \\
&= \overline{f(\bigcup\{C : C \in \mathcal{C} \text{ con } f(C) \in \mathcal{F}'\})} = \overline{\bigcup\{f(C) : f(C) \in \mathcal{F}'\}}
\end{aligned}$$

luego $\mathcal{F}$ conmuta la unión con la adherencia. □

Veamos que la condición de ser cerrada es esencial:

Ejemplo 4.5 Consideremos el cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ donde $\mathbb{Q}$ se identifica a un punto. $\mathbb{R}$ es paracompacto y $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ no lo es pues todos sus abiertos contienen a la clase de $\mathbb{Q}$. Por ello, la proyección no es cerrada.

Proposición 4.6. *Sean Y un espacio paracompacto y $f : X \to Y$ propia. Entonces, X es paracompacto.*

Demostración. Al ser f una aplicación propia es cerrada. Por ello, $f(X)$ es cerrado en Y luego es paracompacto por serlo Y. Por I.4.10 $f : X \to f(X)$ es una aplicación propia, luego podemos suponer simplemente que f es una aplicación sobreyectiva.

Sea $\mathcal{U}$ un recubrimiento abierto de X. En primer lugar como f es propia para cada $y \in I$ se tiene que $f^{-1}(\{y\})$ es compacto en X (I.4.13). Por tanto, existe una subfamilia $\mathcal{U}_y$ finita de $\mathcal{U}$ que recubre a $f^{-1}(\{y\})$. Para cada $y \in Y$ consideremos el entorno abierto suyo $V^y = Y \backslash f(X \backslash \bigcup_{U \in \mathcal{U}_y} U)$. Por paracompacidad existe un refinamiento $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ abierto y localmente finito de $\{V^y\}_{y \in Y}$.

Tomemos para cada $i \in I$ un elemento $y_i \in Y$ tal que $V_i \subseteq V^{y_i}$ y sea $\mathcal{W} = \bigcup_i \{f^{-1}(V_i) \cap U : U \in \mathcal{U}_{y_i}\}$. Vamos a probar que $\mathcal{W}$ es un refinamiento abierto localmente finito de $\mathcal{U}$ y, por tanto, X es paracompacto.

En efecto, es claro que $\mathcal{W}$ es una familia de abiertos y que para cada $W \in \mathcal{W}$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $W \subseteq U$. Por otro lado, si $x \in X$ entonces existe $i \in I$ de forma que $f(x) \in V_i \subseteq V^{y_i}$, por tanto, $x \in \bigcup_{U \in \mathcal{U}_{y_i}} U$. Así, $x \in f^{-1}(V_i) \cap U$ para algún $U \in \mathcal{U}_{y_i}$, luego $\mathcal{W}$ es un refinamiento abierto de $\mathcal{U}$. Para terminar obsérvese que $\{f^{-1}(V_i)\}_{i \in I}$ es localmente finita por serlo $\{V_i\}_{i\in I}$ y como, además, para cada $i \in I$ se tiene que $\mathcal{U}_{y_i}$ es finita se concluye que $\mathcal{W}$ es localmente finita. $\square$

4.3. Productos y sumas de espacios paracompactos.

En la categoría de los espacios compactos es conocido el resultado de *Tychonoff* que afirma que el producto arbitrario de espacios es compacto si y sólo si cada espacio es compacto. Para espacios paracompactos el resultado análogo a éste no es cierto en general. En cambio, la paracompacidad se comporta bien bajo la suma topológica. Se tienen los siguientes resultados:

Proposición 4.7. *Sean X un espacio compacto e Y un espacio paracompacto. Entonces, $X \times Y$ es paracompacto.*

Demostración. Como X es compacto, en virtud de I.4.14 la proyección $p_Y : X \times Y \to Y$ es propia y como Y es paracompacto por 4.6 concluimos el resultado. $\square$

El siguiente ejemplo muestra que ciertamente el resultado anterior no se puede optimizar.

Ejemplo 4.8 Consideremos el espacio $(\mathbb{R}, T_{[)})$ donde la topología está generada por la base dada por los intervalos de la forma $[a, b)$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

Se puede ver que este espacio es Lindelöf y, además, es regular pues los elementos $[a, b)$ de la base también son cerrados. Por ello, $(\mathbb{R}, T_{[)})$ es paracompacto. Además, $(\mathbb{R}, T_{[)})$ es T_0 luego es T_3. Por otro lado $C = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ es un cerrado con la topología discreta luego no es Lindelöf pues no es numerable. Como la propiedad de ser Lindelöf se hereda a cerrados tenemos que $(\mathbb{R}, T_{[)}) \times (\mathbb{R}, T_{[)})$ no es Lindelöf. En cambio, $(\mathbb{R}, T_{[)}) \times (\mathbb{R}, T_{[)})$ es separable, pues $D = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ es denso, y es Hausdorff por serlo $(\mathbb{R}, T_{[)})$. Por III.3.2 se tiene que $(\mathbb{R}, T_{[)}) \times (\mathbb{R}, T_{[)})$ no es paracompacto.

Observación 4.9 Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos. Supongamos que $\prod_i X_i$ es paracompacto y que para cada $i \in I$ existe a_i cerrado en X_i. Entonces, cada espacio X_i es paracompacto. En efecto, para cada $i \in I$ se tiene que $X_i \cong \prod_{j\neq i} a_j \times X_i$ que es cerrado en el producto, luego paracompacto.

Proposición 4.10. *Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos. Se tiene que $\sum_i X_i$ es paracompacto si y sólo si X_i es paracompacto para cada $i \in I$.*

Demostración. En primer lugar supongamos que $\sum_i X_i$ es paracompacto. Como para cada $i \in X_i$ es cerrado en $\sum_i X_i$ y la paracompacidad se hereda a los cerrados se tiene que X_i es paracompacto.

Supongamos ahora que X_i es paracompacto para cada $i \in I$. Sea $\mathcal{U}$ un recubrimiento abierto de $\sum_i X_i$. Para cada $i \in I$ se tiene que $\mathcal{U}_i = \{U \cap (X_i \times \{i\}) : U \in \mathcal{U}\}$ es un recubrimiento abierto de X_i, que es paracompacto, luego existe un refinamiento abierto $\mathcal{V}_i$ localmente finito suyo. Se tiene que $\mathcal{V} = \bigcup_i \mathcal{V}_i$ es un refinamiento abierto localmente finito de $\mathcal{U}$. Es decir, $\sum_i X_i$ es paracompacto. $\square$

El resultado anterior nos permite probar la siguiente caracterización de los espacios paracompactos que tiene interés por sí mismo.

Teorema 4.11. *Sea X un espacio localmente compacto y regular. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *X es paracompacto.*

(ii) *X es suma de espacios σ-compactos, es decir, espacios que son unión numerable de compactos.*

(iii) *X es suma de espacios Lindelöf.*

Demostración. **(ii)⇒(iii)** Se sigue de que todo espacio σ-compacto es Lindelöf.

(iii)⇒(i) Por la hipótesis X es regular, como la propiedad de ser regular es hereditaria cada espacio suma es regular. Ahora, como todo espacio regular y Lindelöf es paracompacto, el resultado se sigue de la proposición anterior.

(ii)⇒(i) Por la hipótesis X es regular y localmente compacto, por tanto, para cada $x \in X$ existe un entorno cerrado suyo W^x compacto y existe otro entorno abierto suyo $U^x \subseteq W^x$. Por paracompacidad, existe un refinamiento $\{V_i\}_{i\in I}$ abierto y localmente finito de $\{U^x\}_{x\in X}$, nótese que por la construcción cada $\overline{V_i}$ es compacto.

Consideremos en X la relación de equivalencia R definida de forma que xRy si y sólo si existen $i_1, ..., i_n \in I$ con $x \in V_{i_1}$, $y \in V_{i_n}$ y $V_{i_j} \cap V_{i_{j+1}} \neq \varnothing$ para cada $j = 1, ..., n-1$. Por la definición de R cada clase de equivalencia es abierta y, por tanto, cerrada en X luego X es la suma topológica de las clases de equivalencia.

Para terminar basta comprobar que cada clase de equivalencia es σ-compacta. Sea $x \in X$ y sea C_x su clase de equivalencia. Construyamos inductivamente una familia numerable de abiertos $\{G_n\}$ y una familia numerable de compactos cerrados $\{K_n\}$ de forma que

$$G_n \subseteq C_x, G_n \subseteq K_n \text{ y } G_{n+1} = \bigcup\{V_i : V_i \cap G_n \neq \varnothing\}.$$

Para $n = 1$ ponemos $G_1 = \bigcup_{x\in V_i} V_i$ y $K_1 = \bigcup_{x\in V_i} \overline{V_i} = \overline{G_1}$, es claro que $G_1 \subseteq C_x$, $G_1 \subseteq K_1$. La compacidad de K_1 se sigue de que cada $\overline{V_i}$ es compacto y de la finitud local de la familia $\{V_i\}$. Para $n = 2$ definimos $G_2 = \bigcup\{V_i : V_i \cap G_1 \neq \varnothing\}$ claramente $G_2 \subseteq C_x$ además, como cada V_i que corte a G_1 corta al compacto K_1 y la familia $\{V_i\}$ es localmente finita, el conjunto $\{V_i : V_i \cap G_1 \neq \varnothing\}$ es finito, por tanto $K_2 = \bigcup\{\overline{V_i} : V_i \cap G_1 \neq \varnothing\} = \overline{G_2}$ es compacto y cumple lo requerido. En fin, construidos ya $G_1, ..., G_n$ y $K_1, ..., K_n$ ponemos $G_{n+1} = \{V_i : V_i \cap G_n \neq \varnothing\}$ y $K_{n+1} = \{\overline{V_i} : V_i \cap G_1 \neq \varnothing\}$. Damos por concluida la construcción de las familias $\{G_n\}$ y $\{K_n\}$.

Se cumple que $\bigcup_n G_n \subseteq C_x$. Por otro lado, si $y \in C_x$ entonces existen $i_1, ..., i_n \in I$ con $x \in V_{i_1}$, $y \in V_{i_n}$ y $V_{i_j} \cap V_{i_{j+1}} \neq \varnothing$ para cada $j = 1, ..., n-1$ por tanto $y \in G_n$. En resumen, $C_x = \bigcup_n G_n$ y como cada $G_n \subseteq K_n$ concluimos que $C_x = \bigcup_n (K_n \cap C_x)$ es σ-compacto pues cada $K_n \cap C_x$ es cerrado en K_n y por ello compacto. $\square$

Corolario 4.12. *Un espacio conexo, localmente compacto y regular es paracompacto si y sólo si es Lindelöf (o σ-compacto).*

5. El teorema de Stone.

El *Teorema de Stone*, publicado en 1948, fue un resultado clave en el estudio del problema de metrización.

Teorema 5.1 (Stone)**.** *Todo espacio pseudométrico, en particular métrico, es paracompacto.*

El *Teorema de Stone* es una consecuencia directa del siguiente lema, vía la caracterización de E. Michael de los espacios paracompactos, teniendo en cuenta que toda familia σ-localmente discreta es σ-localmente finita y todo espacio pseudométrico, o métrico, es regular.

Lema 5.2. (Stone). *Sea X un espacio topológico pseudometrizable. Entonces, todo recubrimiento abierto de X tiene un refinamiento abierto σ-discreto.*

Demostración. Sea d una pseudométrica que describa la topología de X y sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de X. Para cada $i \in I$ y $n \in \mathbb{N}$ sea $F_n^i = \{x \in X : d(x, X\backslash U_i) \geq 2^{-n}\}$. Se satisface:

(a) $F_n^i \subseteq F_{n+1}^i$; para todo $i \in I$, $n \in \mathbb{N}$.

(b) $\bigcup_n F_n^i = U_i$, para todo $i \in I$. Obsérvese que $X\backslash U_i$ es cerrado por tanto $d(x, X\backslash U_i) = \epsilon(x) > 0$, para cada $x \in U_i$.

Sea $\leq$ un buen orden en I pongamos $G_n^i = \{x \in F_n^i : x \notin F_{n+1}^j \text{ si } j < i\}$ y sea $V_n^i = \{x \in X : d(x, G_n^i) < 2^{-(n+3)}\} = d(\cdot, G_n^i)^{-1}([0, 2^{-(n+3)}))$ abierto en X por ser la imagen inversa de un abierto por una aplicación continua. Comprobemos que $\{V_n^i : i \in I, n \in \mathbb{N}\}$ resuelve el problema.

1.$\{V_n^i : i \in I, n \in \mathbb{N}\}$ es un refinamiento abierto de $\{U_i\}_{i\in I}$.

Si $x \in X$ existe $i_0 \in I$ mínimo con $x \in U_{i_0}$ y, por **(b)**, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ con $x \in F_{n_0}^{i_0}$. Así, $x \in G_{n_0}^{i_0}$, $d(x, G_{n_0}^{i_0}) = 0$ y, por tanto, $x \in V_{n_0}^{i_0}$. En resumen, $\{V_n^i : i \in I, n \in \mathbb{N}\}$ es un recubrimiento abierto de X.

Por otro lado, si $x \in V_n^i$ entonces $d(x, G_n^i) < 2^{-(n+3)}$ luego existe $y \in G_n^i$ con $d(x, y) < 2^{-(n+3)}$. Además como $G_n^i \subseteq F_n^i$ se tiene que $d(y, X\backslash U_i) \geq 2^{-n}$, es decir, $d(y, z) \geq 2^{-n}$ para cada $z \in X\backslash U_i$. Se tiene pues

$$d(x, z) \geq d(y, z) - d(x, y) \geq d(y, z) - 2^{-(n+3)} \geq 2^{-n} - 2^{-(n+3)}$$

para cada $z \in X\backslash U_i$. Luego, $d(x, X\backslash U_i) \geq 2^{-n} - 2^{-(n+3)} > 0$ así $x \notin X\backslash U_i$, equivalentemente, $x \in U_i$. En conclusión $V_n^i \subseteq U_i$ para cada $i \in I$, $n \in \mathbb{N}$.

2.$\{V_n^i : i \in I, n \in \mathbb{N}\}$ es σ-discreto.

Pongamos $\{V_n^i : i \in I, n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_n \mathcal{V}_n$ con $\mathcal{V}_n = \{V_n^i\}_{i\in I}$. Sean V_n^i y V_n^j con $i \neq j$ vamos a probar que $d(V_n^i, V_n^j) \geq 2^{-(n+2)}$. Visto esto, para cada $x \in X$ se tendrá que $B_{2^{-(n+3)}}(x)$ cortará a lo más a un elemento de $\mathcal{V}_n$ luego $\mathcal{V}_n$ será discreto.

Sin pérdida de generalidad supongamos que $j < i$. En primer lugar comprobemos que $d(G_n^i, G_n^j) \geq 2^{-(n+1)}$. En efecto, si $x \in G_n^i$ entonces $x \notin F_{n+1}^j$ luego $d(x, X\backslash U_j) < 2^{-(n+1)}$

y si $y \in G_n^j$ entonces $y \in F_n^j$, por tanto, $d(y, X \backslash U_j) \geq 2^{-n}$. Así para cada $x \in G_n^i$, $y \in G_n^j$ y $z \in X \backslash U_j$ se tiene que

$$d(x,y) \geq d(y,z) - d(z,x) \geq 2^{-n} - 2^{-(n+1)} = 2^{-(n+1)},$$

es decir, $d(G_n^i, G_n^j) \geq 2^{-(n+1)}$, como queríamos.

Ahora, si $x \in V_n^i$ existe $z(x) \in G_n^i$ con $d(x, z(x)) < 2^{-(n+3)}$ y si $y \in V_n^j$ existe $z(y) \in G_n^j$ con $d(y, z(y)) < 2^{-(n+3)}$. Aplicando la desigualdad anterior se tiene que

$$\begin{aligned} d(x,y) &\geq d(x, z(y)) - d(y, z(y)) \geq d(x, z(y)) - 2^{-(n+3)} \\ &\geq d(z(x), z(y)) - d(z(x), x) - 2^{-(n+3)} \geq 2^{-(n+1)} - 2^{-(n+3)} - 2^{-(n+3)} \\ &= 2^{-(n+2)}, \end{aligned}$$

concluyendo que $d(V_n^i, V_n^j) \geq 2^{-(n+2)}$. $\square$

Capítulo IV

Particiones continuas de la unidad

En este capítulo introducimos la noción de *partición continua de la unidad* o, simplemente *partición de la unidad*, y sus relaciones con distintas propiedades topológicas, como la normalidad o la paracompacidad. En la primera sección daremos la definición de partición de la unidad y caracterizaremos la normalidad por la existencia de éstas. En la segunda sección demostraremos una caracterización de la paracompacidad en espacios regulares también en términos de la existencia de particiones de la unidad. En las dos últimas secciones introducimos el concepto de *espacio vectorial topológico localmente convexo* y mostramos dos resultados como aplicación de la paracompacidad en forma de existencia de particiones de la unidad. Primero trataremos el problema de extensión de aplicaciones definidas en subconjuntos de espacios métricos con valores en espacios vectoriales topológicos reales localmente convexos vía el *Teorema de Dugundji-Borsuk*. Finalizaremos el capítulo con un teorema de aproximación puntual por funciones continuas debido a Rudin.

1. Particiones continuas de la unidad

Definición 1.1. Sea X un espacio topológico y sea $f : X \to \mathbb{R}$ una aplicación llamaremos:

(i) *Soporte abierto* de f, denotado por $\mathrm{Sop}^\circ(f)$, al conjunto $\mathrm{Sop}^\circ(f) = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$.

(ii) *Soporte* de f, denotado por $\mathrm{Sop}(f)$, a la adherencia de $\mathrm{Sop}^\circ(f)$.

Lema 1.2. *Sea X un espacio topológico y sea $\{f_i\}_{i\in I}$ una familia de aplicaciones de X en $\mathbb{R}$. Supongamos que $\{\mathrm{Sop}(f_i)\}_{i\in I}$ es una familia localmente finita entonces podemos definir la aplicación $\sum_i f_i : X \to \mathbb{R}$ por medio de la expresión $(\sum_i f_i)(x) = \sum_i f_i(x)$. Si, además, cada f_i es continua se tiene que $\sum_i f_i$ es continua.*

Demostración. La finitud local de $\{\mathrm{Sop}(f_i)\}_{i\in I}$ implica que la suma $(\sum_i) f_i(x)$ es finita y, por tanto, está bien definida para cada $x \in X$. Además, por el mismo motivo, $\sum_i f_i$ será continua en un entorno de cada $x \in X$ si lo es cada f_i. □

Definición 1.3. Sea X un espacio topológico y sea $\{f_i\}_{i\in I}$ una familia de aplicaciones continua de X en $\mathbb{R}$. Diremos que $\{f_i\}_{i\in I}$ es una *partición (continua) de la unidad* si satisface las siguientes condiciones:

(i) f_i es no negativa para cada $i \in I$.

(ii) $\{\mathrm{Sop}(f_i)\}_{i\in I}$ es una familia localmente finita en X.

(iii) $\displaystyle\sum_{i\in I} f_i \equiv 1$.

Diremos que $\{f_i\}_{i\in I}$ está subordinada a una familia $\{M_i\}$ de subconjuntos de X si $Sop(f_i) \subseteq M_i$ para cada $i \in I$.

Observación 1.4 Si $\{f_i\}$ es una partición de la unidad en X entonces, por la condición **(iii)** de la definición, tanto $\{\mathrm{Sop}(f_i)\}_{i\in I}$ como $\{\mathrm{Sop}^\circ(f_i)\}_{i\in I}$ son dos recubrimientos de X localmente finitos.

Teorema 1.5. *Sea X un espacio topológico. Son equivalentes:*

(i) *X es normal.*

(ii) *Para todo recubrimiento abierto y localmente finito de X existe una partición de la unidad subordinada a él.*

Demostración. **(i)⇒(ii)** Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto localmente finito de X. Por normalidad, existe una contracción $\{V_i\}_{i\in I}$ de $\{U_i\}_{i\in I}$.

De nuevo por normalidad para cada $i \in I$ existe un abierto G_i tal que:

$$V_i \subseteq \overline{V_i} \subseteq G_i \subseteq \overline{G_i} \subseteq U_i$$

Tenemos pues, para cada $i \in I$, dos cerrados disjuntos $\overline{V_i}$ y $X\backslash G_i$. Luego, por el *Lema de Uryshon* existe una aplicación continua $g_i : X \to [0,1]$ que toma el valor 1 en $\overline{V_i}$ y se anula en $X\backslash G_i$. Se cumple que $\mathrm{Sop}(g_i) \subseteq \overline{G_i} \subseteq U_i$ para todo $i \in I$. Luego $h = \sum_i g_i$ está bien definida, es continua en X y $h \geq 1$.

Definimos $f_i = \frac{g_i}{h}$ para cada $i \in I$. Como $h \geq 1$ y $g_i \geq 0$ se tiene que f_i es continua y no negagtiva en X. Además, $\mathrm{Sop}(f_i) = \mathrm{Sop}(g_i) \subseteq U_i$ luego $\sum_i f_i$ está bien definida y

$$\sum_i f_i = \sum_i \frac{g_i}{h} = \frac{1}{h}\sum_i g_i = \frac{h}{h} = 1$$

en X. Así, $\{f_i\}_{i\in I}$ es una partición de la unidad subordinada a $\{U_i\}_{i\in I}$.

(ii)⇒(i) Sean C_1 y C_2 cerrados disjuntos en X. Consideremos el recubrimiento abierto finito $\{X\backslash C_1, X\backslash C_2\}$ de X. Por hipótesis existe una partición de la unidad $\{f_1, f_2\}$ subordinada a él. Entonces, $X\backslash\mathrm{Sop}(f_1)$ y $X\backslash\mathrm{Sop}(f_2)$ son abiertos disjuntos que contienen a C_1 y C_2, respectivamente. Es decir, X es normal. □

2. Paracompacidad y particiones de la unidad.

La paracompacidad se puede caracterizar según la existencia de particiones continuas de la unidad:

Teorema 2.1. *Sea X un espacio topológico regular. Entonces, son equivalentes:*

(i) *X es paracompacto.*

(ii) *Todo recubrimiento abierto de X admite una partición continua de la unidad subordinada a él.*

Demostración. **(ii)⇒ (i)** Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de X cualquiera, por hipótesis existe una partición de la unidad $\{f_i\}_{i\in I}$ subordinada a $\{U_i\}_{i\in I}$. Entonces $\{\mathrm{Sop}^\circ(f_i)\}_{i\in I}$ es un refinamiento abierto localmente finito de $\{U_i\}_{i\in I}$. Luego X es paracompacto.

(i)⇒(ii) Como X es paracompacto y regular es normal. Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de X, por paracompacidad existe $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i\in I}$ un refinamiento abierto preciso localmente finito de $\mathcal{U}$. Ahora, por normalidad, existe $\{f_i\}_{i\in I}$ una partición continua de la unidad subordinada a $\mathcal{V}$ luego también a $\mathcal{U}$. □

3. Teorema de Dugundji-Borsuk

Definición 3.1. Un *espacio vectorial topológico real (respectivamente complejo)* , abreviadamente EVTR (respectivamente EVTC), es un espacio vectorial real (respectivamente complejo) dotado de una topología que hace continuas las operaciones de suma de vectores y producto por escalares.

Sin especificar el cuerpo diremos simplemente espacio vectorial topológico o de forma abreviada EVT.

Observación 3.2 En un EVT una base de entornos de cualquier punto es la traslación de una base de entornos del 0. En consecuencia una propiedad local en 0 vale en cualquier otro punto.

Por ejemplo, si 0 tiene una base numerable de entornos entonces el EVT es IAN, o si 0 tiene una base de entornos convexos entonces el EVT es localmente convexo.

Ejemplos 3.3 **1.** Los espacios vectoriales finito dimensionales son EVTs.

2. El espacio vectorial real $l^2(\mathbb{N}) = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_n |x_n|^2 < \infty\}$ con la suma de vectores y el producto por escalares naturales es un EVTR, con la topología de la norma $||x||_2 = (\sum_n |x_n|^2)^{\frac{1}{2}}$, para cada $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$. Este espacio se conoce como el *espacio de sucesiones de cuadrado sumable* y fue introducido por D. Hilbert.

3. Sea K un espacio topológico compacto. El espacio $C(K) = \{f : K \to \mathbb{R} : f \text{ es continua }\}$ con la suma de funciones y el producto por escalares usual es un EVTR, con la topología descrita por la norma supremo $||\cdot||_\infty$.

Teorema 3.4 (Dugundji-Borsuk)**.** *Sean (X,d) un espacio métrico, $A \subseteq X$ cerrado e Y un EVTR localmente convexo. Entonces toda aplicación continua $f_0 : A \to Y$ admite una extensión continua f a X con $f(X) \subseteq \mathrm{conv}(f_0(A))$.*

El teorema es una consecuencia directa de los dos siguientes lemas, ya que, por el *Teorema de Stone*, todo espacio métrico es paracompacto, además de regular, luego admite particiones continuas de la unidad subordinadas a cualquier recubrimiento abierto del mismo.

Lema 3.5. *Sean (X,d) un espacio métrico y $A \subseteq X$ cerrado. Entonces, existe una familia $\{(U_i, a_i)\}_{i\in I}$ tal que:*

(i) $U_i \subseteq X \backslash A$ *y* $a_i \in A$.

(ii) $\{U_i\}_{i\in I}$ *es un recubrimiento abierto localmente finito de* $X \backslash A$.

(iii) $d(x, a_i) \leq 2d(x, A)$ *para cada* $x \in U_i$.

Demostración. Sea $x \in X \backslash A$, pongamos $\epsilon(x) = \frac{1}{4}d(x, A)$ y consideremos el recubrimiento abierto $\mathcal{V} = \{B_{\epsilon(x)}(x) : x \in X \backslash A\}$ de $X \backslash A$. Ahora, como X es métrico, $X \backslash A$ es métrico luego paracompacto, por el *Teorema de Stone*. Así $\mathcal{V}$ tiene un refinamiento abierto $\{U_i\}_{i\in I}$ localmente finito en $X \backslash A$.

Por ser refinamiento, para cada $i \in I$ existe $y_i \in X \backslash A$ tal que $U_i \subseteq B_{\epsilon(y_i)}(y_i) \subseteq X \backslash A$. Además elegimos $a_i \in A$ tal que $d(y_i, A) \leq d(y_i, a_i) \leq \frac{5}{4}d(y_i, A)$. Hemos construido así la familia $\{(U_i, a_i)\}_{i\in I}$ que claramente satisface **(i)** y **(ii)**.

Comprobemos **(iii)**: Sea $x \in U_i \subseteq B_{\epsilon(y_i)}(y_i)$. Entonces

$$d(x, a_i) \leq d(x, y_i) + d(y_i, a_i) \leq \frac{1}{4}d(y_i, A) + \frac{5}{4}d(y_i, A) = \frac{3}{2}d(y_i, A).$$

Por otro lado, $d(y_i, A) \leq d(x, A) + d(y_i, x) \leq d(x, A) + \frac{1}{4}d(y_i, A)$. Obteniendo que $\frac{3}{4}d(y_i, A) \leq d(x, A)$. Sustituyendo en la relación anterior se tiene que

$$d(x, a_i) \leq \frac{3}{2}d(y_i, A) \leq \frac{3}{2}\frac{4}{3}d(x, A) = 2d(x, A).$$

$\square$

Lema 3.6. *Sean (X,d) espacio métrico, $A \subseteq X$ cerrado, Y un EVTR localmente convexo y $f_0 : A \to Y$ una aplicación continua. Supongamos que $\{(U_i, a_i)\}_{i\in I}$ es una familia como en el lema anterior y que $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ es una partición continua de la unidad subordinada a $\{U_i\}_{i\in I}$ en $X \backslash A$. Entonces:*

$$f(x) = \begin{cases} f_0(x) & si\ x \in A, \\ \sum_i \varphi_i(x) f_0(a_i) & si\ x \in X \setminus A, \end{cases}$$

define una extensión continua de f_0 y $f(X) \subseteq \operatorname{conv}(f_0(A))$.

Demostración. Es claro que f es continua en el abierto $X \backslash A$ y que $f(X) \subseteq \operatorname{conv}(f_0(A))$.

Estudiemos la continuidad en A. Sea $a \in A$ y $V^{f(a)} \subseteq Y$ un entorno abierto de $f(a) = f_0(a)$ en Y. Como Y es localmente convexo 0 tiene un entorno convexo, digamos W, con $f(a) + W \subseteq V$. Además por ser f_0 continua en a, existe $\delta > 0$ tal que si $d(a, x) < \delta$, $x \in A$, entonces $f_0(x) \in f(a) + W$, equivalentemente, $f_0(x) - f(a) \in W$.

Consideremos $B = B_{\frac{\delta}{3}}(a)$ y sea $x \in B$.

Si $x \in A$, $f(x) - f(a) = f_0(x) - f(a) \in W$ luego $f(x) \in W + f(a) \subseteq V$. Por otro lado si $x \notin A$ se tendrá que $x \in U_i$ para cierto $i \in I$, luego

$$d(a_i, a) \leq d(a_i, x) + d(x, a) \leq 2d(x, A) + d(x, a) \leq 3d(x, a) < \delta.$$

Así, $f_0(a_i) - f(a) \in W$ y por las propiedades de la partición $\{\varphi_i\}$ y por ser W convexo obtenemos

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \sum_{i \in I} \varphi_i(x) f_0(a_i) - f(a) = \sum_{i \in I, x \in U_i} \varphi_i(x) f_0(a_i) - f(a) \\ &= \sum_{i \in I, x \in U_i} \varphi_i(x)(f_0(a_i) - f(a)) \in W \end{aligned}$$

luego, $f(x) \in W + f(a) \subseteq V$. En conclusión, $f(B) \subseteq V$ y f es continua en $a \in A$, como queríamos. $\square$

4. Teorema de Rudin

Sea $f : X \times Y \to E$ una aplicación cualquiera. Para cada $x \in X$ denotaremos $f_x : Y \to E$ a la aplicación parcial $f_x(y) = f(x, y)$. Análogamente, para cada $y \in Y$ denotaremos por $f^y : X \to E$ a la aplicación parcial $f^y(x) = f(x, y)$.

Teorema 4.1 (Teorema de Rudin)**.** *Sean (X, d) un espacio métrico, Y un espacio topológico y E un EVT localmente convexo. Sea $f : X \times Y \to E$ una aplicación. Supongamos que:*

(i) *Para cada $y \in Y$ la aplicación f^y es continua.*

(ii) *Existe un conjunto $D \subseteq X$ denso de forma que para cada $x \in D$ la aplicación f_x es continua.*

Entonces, existe una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $X \times Y$ en E continuas que convergen puntualmente a f en cada punto $(x, y) \in X \times Y$.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ denotemos por $\mathcal{U}^n$ al recubrimiento abierto de X formado por los abiertos de diámetro menor que $\frac{1}{n}$. Por el *Teorema de Stone* X es paracompacto luego existe una partición de la unidad $\{\varphi_\alpha^n\}_{\alpha \in \Lambda(n)}$ subordinada a $\mathcal{U}^n$.

Como cada φ_α^n es continua y D es denso en X existe un punto $x_\alpha^n \in D$ tal que $\varphi_\alpha^n(x_\alpha^n) > 0$.

Definimos $f_n : X \times Y \to E$ por la expresión:

$$f_n(x, y) = \sum_{\alpha \in \Lambda(n)} \varphi_\alpha^n(x) f(x_\alpha^n, y) \text{ para cada } (x, y) \in X \times Y$$

Cada f_n es una suma localmente finita de aplicaciones continuas por **(i)** luego es continua.

Probemos para concluir que la sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente a f. Sea $(x, y) \in X \times Y$, como E es localmente convexo basta ver que para cualquier entorno convexo W de 0 se tiene que $f_n(x, y) \in f(x, y) + W$ para todo n suficientemente grande. Por hipótesis f^y es continua luego existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que $f(z, y) - f(x, y) \in W$ si $d(z, x) < \frac{1}{n_0}$. Sea $n > n_0$ cualquiera y sea $\alpha \in \Lambda(n)$ tal que $\varphi_\alpha^n(x) > 0$. Se tiene que $d(x, x_\alpha^n) < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0}$ pues el diámetro de $\mathrm{Sop}(\varphi_\alpha^n)$ es menor que $\frac{1}{n}$. Por tanto, $f(x_\alpha^n, y) - f(x, y) \in W$, es decir, $f(x_\alpha^n, y) \in W + f(x, y)$. Ahora bien, $f_n(x, y)$ es una combinación convexa de los puntos $f(x_\alpha^n, y)$ con $\varphi_\alpha^n(x) > 0$, luego $f_n(x, y) \in W + f(x, y)$ para cada $n > n_0$. $\square$

Capítulo V

Metrización

En este capítulo establecemos los teoremas que resuelven el problema de metrización que fue planteado desde que se definió el concepto abstracto de espacio topológico. Fue resuelto en 1950 de forma independiente por Nagata, Smirnov y Bing.

La primera caracterización de un espacio metrizable se debe a Alexandroff y Urysohn con un resultado de 1923 que afirma que un espacio T_0 es metrizable si y sólo si admite un desarrollo regular.

Dos años más tarde Urysohn establece que todo espacio IIAN es metrizable si y sólo si es T_4. Un año más tarde, en 1926, Tychonoff prueba que en el teorema de Urysohn la condición de T_4 puede rebajarse a T_3.

Años más tarde, en 1944, Dieudonné introduce la noción de espacio paracompacto. Posteriormente en 1948 A. H. Stone prueba que todo espacio metrizable es paracompacto.

Todos estos avances culminaron cuando Nagata, Smirnov y Bing resolvieron el problema de metrización en 1950 con los resultados siguientes: *Un espacio topológico es metrizable si y sólo si es T_3 y tiene una base σ-localmente finita* (Nagata-Smirnov) *si y sólo si es T_3 y tiene una base σ-discreta* (Bing).

El objetivo central del capítulo es probar estas caracterizaciones de Nagata, Smirnov y Bing, junto con algún complemento adicional.

1. Teoremas de metrización de Bing y Nagata-Smirnov

Proposición 1.1. *Sea X un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *X es pseudometrizable.*
(ii) *X es regular y tiene una base σ-discreta (Bing).*
(iii) *X es regular y tiene una base σ-localmente finita (Nagata-Smirnov).*

Demostración. **(i)⇒(ii)** Sea d una pseudométrica en X que describa su topología. X es regular pues todo espacio pseudométrico es regular.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos el recubrimiento abierto $\mathcal{U}_n = \{B_{\frac{1}{n}}(x)\}_{x \in X}$. Por III.5.2 para cada $\mathcal{U}_n$ existe un refinamiento $\mathcal{V}_n$ abierto y σ-discreto de $\mathcal{U}_n$. Por tanto, $\mathcal{V} = \bigcup_n \mathcal{V}_n$ es una familia σ-discreta de abiertos.

Comprobemos para terminar que $\mathcal{V}$ es base. Sea $G \subseteq X$ abierto y sea $x \in G$. Entonces existe un natural n_0 con $B_{\frac{1}{n_0}}(x) \subseteq G$. Consideremos $\mathcal{V}_{2n_0}$. Por construcción existe $V \in \mathcal{V}_{2n_0}$ y existe $y \in X$ con $x \in V$ y $V \subseteq B_{\frac{1}{2n_0}}(y)$. Se tiene que V es un entorno abierto de x con $V \subseteq B_{\frac{1}{n_0}} \subseteq G$. En efecto, para cada $z \in V$ se cumple que $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \leq \frac{1}{n_0}$.

(ii)⇒(iii) Se sigue de que toda familia discreta es localmente finita.

(iii)⇒(i) Sea $\mathcal{B} = \bigcup_n \mathcal{B}_n$ una base σ-localmente finita de X.

En primer lugar comprobemos que X es normal. Para ello, al ser X regular, basta comprobar que X es paracompacto. Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de X. Entonces, $\mathcal{B}' = \{B \in \mathcal{B} : B \subseteq U_i \text{ para algún } i \in I\}$ es un refinamiento abierto σ-localmente finito de $\{U_i\}_{i\in I}$. Como X es regular es paracompacto y, por tanto, normal (III.1.3).

Sean $m, n \in \mathbb{N}$ y $U \in \mathcal{B}_m$ los conjuntos

$$F(m,n;U) = \bigcup\{\overline{V} : V \in \mathcal{B}_n, \overline{V} \subseteq U\} \subseteq U$$

son cerrado pues $\mathcal{B}_n$ es localmente finita.

Ahora, como X es normal, por el *Lema de Urysohn* existe una aplicación $f_U : X \to [0,1]$ continua con $f_U(F(m,n;U)) \subseteq \{1\}$ y $f_U(X\backslash U) \subseteq \{0\}$.

Definimos $d_{(m,n)} : X \times X \to \mathbb{R}$ mediante la expresión:

$$d_{(m,n)}(x,y) = \sum_{U\in\mathcal{B}_m} |f_U(x) - f_U(y)|.$$

La finitud local de $\mathcal{B}_m$ implica que $d_{(m,n)}$ está bien definida y es continua. Además, es fácil ver que $d_{(m,n)}$ es una pseudométrica en X.

Para terminar basta probar que X es un subespacio topológico del producto numerable $\prod(X, \mathcal{T}_{d_{(m,n)}})$. Para ello consideremos la familia de aplicaciones $\mathcal{F} = \{1_X^{(m,n)}\}_{m,n\in\mathbb{N}}$ donde $1_X^{(m,n)}$ denota a la identidad de X a $(X, \mathcal{T}_{d_{(m,n)}})$. Como cada $d_{(m,n)}$ es continua se tiene que $\mathcal{F}$ es una familia de aplicaciones continuas. Por el *Lema de Inmersión* (II.4.2) basta ver que:

1. $\mathcal{F}$ distingue puntos.

2. $\mathcal{F}$ distingue puntos y cerrados.

Veamos **2**. Sea $x \in X$ y C un cerrado con $x \notin C$. Por un lado, como $\mathcal{B}$ es base existe $m \in \mathbb{N}$ y existe $B \in \mathcal{B}_m$ tales que $x \in B \subseteq X\backslash C$. Por otro lado, la regularidad de X implica que existen $n \in \mathbb{N}$ y $V \in \mathcal{B}_n$ con $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq B$. Es decir, $x \in F(m,n;B)$ y, por ello, para cada $y \in C \subseteq X\backslash B$ se tiene que

$$d_{(m,n)}(x,y) = \sum_{U\in\mathcal{B}_m} |f_U(x) - f_U(y)| \geq |f_B(x) - f_B(y)| = 1$$

Es decir, $d_{(m,n)}(x,C) \geq 1$ y, por tanto, $1_X^{(m,n)}(x) \notin \overline{1_X^{(m,n)}(C)}$. □

Como consecuencia inmediata de la última proposición se obtienen los teoremas de metrización de Bing, Nagata y Smirnov ya que un espacio topológico es metrizable si y sólo si es pseudometrizable y T_0.

Teorema 1.2. *Sea X un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
(i) *X es metrizable.*
(ii) *X es T_3 y tiene una base σ-discreta (Bing).*
(iii) *X es T_3 y tiene una base σ-localmente finita (Nagata-Smirnov).*

Otra consecuencia inmediata es el teorema de metrización de Urysohn pues todo espacio con una base numerable tiene una base σ-localmente finita.

Teorema 1.3 (Urysohn)**.** *Sea X un espacio topológico con una base numerable. Entonces:*
(i) *X es pseudometrizable si y sólo si X es regular.*
(ii) *X es metrizable si y sólo si X es T_3.*

2. Metrizabilidad local y metrizabilidad

A continuación vamos a caracterizar la metrizabilidad en los espacios localmente metrizables.

Proposición 2.1 (Smirnov)**.** *Sea X un espacio topológico regular y localmente pseudometrizable. Entonces, X es pseudometrizable si y sólo si X es paracompacto.*

Demostración. Si X es pseudometrizable se sigue del *teorema de Stone* que X es paracompacto.

Recíprocamente, supongamos que X es paracompacto como, por hipótesis, X es regular se tiene que X es normal. Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de X de forma que U_i sea pseudometrizable para cada $i \in I$, este recubrimiento existe por ser X localmente pseudometrizable. Por paracompacidad existe un refinamiento abierto $\{V_j\}_{j\in J}$ localmente finito de $\{U_i\}_{i\in I}$. Nótese que V_j es pseudometrizable para cada $j \in J$ por ser subespacio de un espacio pseudometrizable. Ahora como X es normal, por III.3.11, existe una contracción $\{W_j\}_{j\in J}$ de $\{V_j\}_{j\in J}$.

Tras estos preparativos vamos a contruir una base de X que sea σ-localmente finita para, en virtud de la caracterización de Nagata-Smirnov, concluir que X es pseudometrizable.

Cada V_j es pseudometrizable luego tiene una base σ-localmente finita $\mathcal{B}_j = \bigcup_n \mathcal{B}_j^n$. Además, como V_j y W_j son abiertos para cada $j \in J$ y recubren X se tiene que $\mathcal{B} = \bigcup_j (\mathcal{B}_j \cap W_j)$ es base de X, donde $\mathcal{B}_j \cap W_j = \{B \cap W_j : B \in \mathcal{B}_j\}$ para cada $j \in J$.

Comprobemos que $\mathcal{B}$ es σ-localmente finita. Pongamos $\mathcal{B}_n = \bigcup_j (\mathcal{B}_j^n \cap W_j)$, obviamente $\mathcal{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$. Probemos que cada $\mathcal{B}_n$ es localmente finita para terminar.

Sea $x \in X$, por finitud local, existe $F \subset J$ finito con $x \in \overline{W_j}$ si y sólo si $j \in F$. Por tanto, $V^x = X \setminus \bigcup_{j\notin F} \overline{W_j}$ es un entorno abierto de x de nuevo por la finitud local.

Se tiene que V^x no corta a $\mathcal{B}_j^n$ si $j \notin F$. Por otro lado, para cada $j \in F$ se tiene que $x \in \overline{W_j} \subseteq V_j$ y como B_j^n es localmente finito en V_j existe un entorno $V_j^x \subseteq V_j$ de x abierto en V_j, por tanto también en X, que corta a un número finito de elementos de $\mathcal{B}_j^n$. En conclusión, $A^x = V^x \cap (\bigcap_{j\in F} V_j^x)$ es un entorno abierto de x que corta a una cantidad finita de elementos de $\mathcal{B}_n$. Así $\mathcal{B}_n$ es localmente finita dando por concluida la prueba. $\square$

Como consecuencia de esta proposición se obtiene que:

Teorema 2.2 (Smirnov)**.** *Sea X un espacio topológico Hausdorff y localmente metrizable. Se tiene que X es metrizable si y sólo si X es paracompacto.*

Demostración. Es consecuencia inmediata del resultado anterior pues todo espacio paracompacto y Hausdorff es regular y todo espacio pseudometrizable y T_0 es metrizable. $\square$

Un caso particular muy importante de los espacios métricos son las *variedades diferenciables abstractas,* es decir, los espacios Hausdorff localmente homeomorfos a un espacio afín. Su metrizabilidad se caracteriza ahora fácilmente.

Teorema 2.3. *Sea M una variedad diferenciable abstracta conexa. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *M es metrizable.*
(ii) *M cumple el* IIAN.
(iii) *M es Lindelöf.*
(iv) *M es paracompacta.*

Demostración. Se sigue del *Teorema de Smirnov* que M es metrizable si y sólo si es paracompacta. Además, por III.4.12, la paracompacidad de M equivale a que M sea Lindelöf. Luego si M es Lindelöf es metrizable y, por tanto, cumple el IIAN. Por último, el axioma IIAN siempre implica la propiedad de ser Lindelöf. $\square$

Observación 2.4 Teniendo en cuenta III.4.11 y el resultado anterior se puede caracterizar la metrizabilidad de variedades no conexas. De forma más precisa, sea M una variedad diferenciable, son equivalentes:

1. M es metrizable.
2. Cada componente conexa de M tiene una base numerable.
3. Cada componente conexa de M es Lindelöf.
4. M es paracompacta.

3. Metrizabilidad de espacios de Moore

Proposición 3.1 (Bing)**.** *Sea X un espacio topológico. Son equivalentes:*

(i) *X es pseudometrizable.*
(ii) *X es colectivamente normal, regular y desarrollable.*

Demostración. **(i)⇒(ii)** Supongamos que X es pseudometrizable. Se tiene que X es regular, pues todo espacio pseudometrizable es regular, y además, por el *teorema de Stone*, X es paracompacto. En conclusión X es colectivamente normal, pues es regular y paracompacto.

Para finalizar consideremos el recubrimiento abierto $\mathcal{U}_n = \{B_{\frac{1}{n}}(x)\}_{x\in X}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y probemos que $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un desarrollo de X. Sea $x \in X$ y V^x un entorno abierto suyo cualquiera. Sea $n \in \mathbb{N}$ con $B_{\frac{1}{n}}(x) \subseteq V^x$, en virtud de la desigualdad triangular, se tiene que $\text{Est}(x;\mathcal{U}_{2n}) \subseteq B_{\frac{1}{n}}(x) \subseteq V^x$. Luego $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un desarrollo como queríamos.

(ii)⇒(i) Sea $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un desarrollo de X. En primer lugar comprobemos que X es paracompacto. Sea $\{V_j\}_{j\in J}$ un recubrimiento abierto de X y sea $\leq$ un buen orden en J. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $j \in J$ definimos el cerrado

$$F_j^n = X\backslash[\text{Est}(X\backslash V_j;\mathcal{U}_n) \cup (\bigcup_{i<j} V_i)] \subseteq V_j.$$

Se tiene que $\mathcal{F} = \{F_j^n : j \in J, n \in \mathbb{N}\}$ es un recubrimiento cerrado de X. En efecto, dado $x \in X$ sea j el primer elemento de J con $x \in V_j$ y sea $n \in \mathbb{N}$ con $\text{Est}(x,\mathcal{U}_n) \subseteq V_j$ dicho natural existe por ser $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un desarrollo, entonces $x \in F_j^n$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $\mathcal{F}_n = \{F_j^n\}_{j\in J}$ se tiene que $\mathcal{F} = \bigcup_n \mathcal{F}_n$ y, además, cada $\mathcal{F}_n$ es una familia discreta de cerrados. Ciertamente, sea $x \in X$ y consideremos el primer índice $j \in J$ tal que $x \in V_j$ entonces $V_j \cap \text{Est}(x;\mathcal{U}_n)$ es un entorno abierto de x que corta a lo sumo a un elemento de $\mathcal{F}_n$ pues si $i > j$ se tiene que $V_j \cap F_i^n = \varnothing$ y si $i < j$ se tiene que $\text{Est}(x;\mathcal{U}_n) \subseteq \text{Est}(X\backslash V_i;\mathcal{U})$ luego $\text{Est}(x;\mathcal{U}_n) \cap F_i^n = \varnothing$.

Como X es colectivamente normal, por II.3.17, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una familia discreta de abiertos $\mathcal{G}_n = \{G_j^n\}_{j\in J}$ con $F_j^n \subseteq G_j^n$ para cada $j \in J$ y como para cada $j \in J$ se tiene que $F_j^n \subseteq V_j$ podemos suponer que $G_j^n \subseteq V_j$. Por tanto, $\mathcal{G} = \bigcup_n \mathcal{G}_n$ es un refinamiento abierto de $\{V_j\}_{j\in J}$, pues $\mathcal{F}$ recubre X, que es σ-discreto y como X es regular concluimos que X es paracompacto.

Para finalizar, como X es paracompacto, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un refinamiento $\mathcal{B}_n$ abierto y localmente finito de $\mathcal{U}_n$. Además, $\bigcup_n \mathcal{U}_n$ es base de X por ser $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un desarrollo luego $\mathcal{B} = \bigcup_n \mathcal{B}_n$ es una base σ-localmente finita de X. Por la caracterización de Nagata-Smirnov X es pseudometrizable. □

Como consecuencia inmediata del último resultado se tiene la siguiente caracterización de los espacios metrizables:

Teorema 3.2 (Bing). *Sea X un espacio topológico. Se tiene que X es metrizable si y sólo si X es un espacio de Moore, es decir desarrollable y T_1, colectivamente normal.*

4. Teorema de metrización de Hanai-Morita-Stone

Proposición 4.1 (Hanai-Morita-Stone). *Sean X e Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una aplicación continua, cerrada y sobreyectiva. Supongamos que X es pseudometrizable. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *Y es pseudometrizable.*
(ii) *Y es* IAN.
(iii) *Para cada $y \in Y$ se tiene que* $\text{Fr}(f^{-1}(\overline{\{y\}}))$ *es compacto.*

Demostración. **(i)⇒(ii)** Evidente.

(ii)⇒(iii) Sea d una pseudométrica en X que describa su topología. Sea $y \in Y$ pongamos $K = \text{Fr}(f^{-1}(\overline{\{y\}})) \subseteq f^{-1}(\overline{\{y\}})$. Si K no fuese compacto entonces, como X es pseudometrizable, existiría una sucesión de puntos $\{x_n\} \subseteq K$ sin acumulación en X pues K es cerrado.

Por la hipótesis Y es IAN luego existe una base numerable de entornos abiertos $\{V_n^y\}$ de y con $V_n^y \subseteq V_{n+1}^y$ para cada n. Así, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $f^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(V_n^y)$ y como X es regular si $x \in f^{-1}(y)$ entonces $\overline{\{x\}} \subseteq f^{-1}(V_n^y)$ e $y \in f(\overline{\{x\}}) \subseteq V_n^y$ por tanto $\overline{\{y\}} \subseteq \overline{f(\overline{\{x\}})} = f(\overline{\{x\}}) \subseteq V_n^y$ pues f es cerrada. En conclusión

$$K = f^{-1}(\overline{\{y\}}) \cap \overline{X \backslash f^{-1}(\overline{\{y\}})} \subseteq f^{-1}(V_n^y)$$

y existe $z_n \in f^{-1}(V_n^y) \backslash f^{-1}(\overline{\{y\}})$ tal que

$$d(x_n, z_n) \leq \frac{1}{n}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ahora, $\{x_n\}$ no tiene acumulación en X luego $\{z_n\}$ tampoco y es localmente finita, por tanto $F \bigcup_n \overline{\{z_n\}}$ es cerrado en X.

Por un lado, $z_n \in X \backslash f^{-1}(\overline{\{y\}})$ luego $\overline{\{z_n\}} \subseteq X \backslash f^{-1}(\overline{\{y\}})$ y $f(\overline{\{z_n\}}) \cap \overline{\{y\}} = \varnothing$ para cada $n \in \mathbb{N}$, es decir, $f(F) \cap \overline{\{y\}} = \varnothing$. Por otro lado, $f(z_n) \in V_n^y$ para cada $n \in \mathbb{N}$ por tanto $\{f(z_n)\}_n$ es una sucesión convergente a y pero esto es imposible pues $f(z_n) \notin Y \backslash f(F)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e $Y \backslash f(F)$ es un entorno abierto de y. En conclusión K es compacto.

(iii)$\Rightarrow$(i) Para cada $y \in Y$ y $n \in \mathbb{N}$ consideremos los abiertos, en X e Y respectivamente,

$$W_n^y = B_{\frac{1}{2^n}}(\mathrm{Fr}(f^{-1}(\overline{\{y\}}))) \cup f^{-1}(\overline{\{y\}}) \text{ y } U_n(y) = Y \backslash f(X \backslash W_n^y).$$

Se cumple que $U_{n+1}(y) \subseteq U_n(y)$, $\overline{W_{n+1}^y} \subseteq W_n^y$ y $\overline{\{y\}} \subseteq U_n(y)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Comprobemos que $\{U_n(y)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de entornos de y. Sea $V \subsetneq Y$ un entorno abierto de y. Si $x \in f^{-1}(y)$ por regularidad $\overline{\{x\}} \subseteq f^{-1}(V)$ e $y \in f(\overline{\{x\}}) \subseteq V$ luego

$$\overline{\{y\}} \subseteq f^{-1}(V) \text{ y } \mathrm{Fr}(f^{-1}(\overline{\{y\}})) \subseteq f^{-1}(\overline{\{y\}}) \subseteq f^{-1}(V)$$

pues f es continua y cerrada. Si $\mathrm{Fr}(f^{-1}(\overline{\{y\}})) = \varnothing$ entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $U_n(y) = \overline{\{y\}} \subseteq V$. Por otro lado, si $\mathrm{Fr}(f^{-1}(\overline{\{y\}})) \neq \varnothing$, por compacidad, existe $\epsilon > 0$ tal que $d(\mathrm{Fr}(f^{-1}(\overline{\{y\}})), X \backslash f^{-1}(V)) = \epsilon$, por tanto, para cada n con $\frac{1}{2^n} < \epsilon$ se tiene que $W_n^y \subseteq f^{-1}(V)$ y $U_n(y) \subseteq V$. Luego, ciertamente, $\{U_n(y)\}_n$ es una base de entornos abiertos de y.

Por el *Teorema de Stone* X es paracompacto, además de regular, luego por III.2.3, X es colectivamente normal. Por tanto, como f es continua, cerrada y sobreyectiva, se tiene que Y es colectivamente normal (II.3.19). Además, para cada $y \in Y$ y cada entorno abierto suyo V se tiene que $\overline{\{y\}} \subseteq V$ y, como Y es normal, existe un abierto G con

$$\overline{\{y\}} \subseteq G \subseteq \overline{G} \subseteq V$$

luego Y es regular. En virtud del *Teorema de Bing* basta comprobar que Y es desarrollable para concluir la prueba. Veamos que si $\mathcal{U}_n = \{U_n(y) : y \in Y\}$ entonces $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un desarrollo de Y. Es claro que cada $\mathcal{U}_n$ es un recubrimiento abierto de Y.

(a) Sea $y \in Y$ y $m \in \mathbb{N}$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $z \in Y$ con $f^{-1}(\overline{\{y\}}) \subseteq W_n^z$ se tiene que $W_n^z \subseteq W_m^y$.

Supongamos que no fuese cierto el aserto. Entonces existe una sucesión $\{y_n\}_{n \geq m}$ de puntos en Y tal que $f^{-1}(\overline{\{y\}}) \subseteq W_n^{y_n}$ y $W_n^{y_n} \nsubseteq W_m^y$. Por tanto, $\overline{\{y_n\}} \cap \overline{\{y\}} = \varnothing$ pues en caso contrario $\overline{\{y_n\}} = \overline{\{y\}}$ y $f^{-1}(\overline{\{y_n\}}) = f^{-1}(\overline{\{y\}})$ luego $W_n^{y_n} = W_n^y \subseteq W_m^y$ lo cual es absurdo.

Así, para cada $n \geq m$ se tiene que $f^{-1}(\overline{\{y_n\}}) \cap f^{-1}(\overline{\{y\}}) = \varnothing$. Como estamos suponiendo que $f^{-1}(\overline{\{y\}}) \subseteq W_n^{y_n}$ se tiene que

$$\mathrm{Fr}(f^{-1}(\overline{\{y_n\}})) \neq \varnothing \text{ y } f^{-1}(\overline{\{y\}}) \subseteq B_{\frac{1}{2^n}}(\mathrm{Fr}(f^{-1}(\overline{\{y_n\}}))),$$

para cada $n \geq m$. En consecuencia, si $x \in f^{-1}(\overline{\{y\}})$ entonces existe una sucesión $\{x_n\}_{n \geq m}$ con $x_n \in \mathrm{Fr}(f^{-1}(\overline{\{y_n\}}))$ y $d(x, x_n) < \frac{1}{2^n}$. Es claro que dicha sucesión converge a x y, por continuidad, $\{f(x_n)\}_{n \geq m}$ converge a $f(x)$. Como $f(x_n) \in \overline{\{y_n\}}$ y $f(x) \in \overline{\{y\}}$ se satisface que para cualquier entorno abierto V de y existe $n_0 > m$ tal que $f(x_n) \in V$ e $\overline{\{y_n\}} \subseteq V$ para cada $n \geq n_0$.

Supongamos que existe $n > m$ tal que $f^{-1}(\overline{\{y_n\}}) \subseteq W_{m+1}^y$ entonces si $z \in \mathrm{Fr}(f^{-1}(\overline{\{y_n\}}))$ se tiene que $d(z, \mathrm{Fr}(f^{-1}(\overline{\{y\}}))) < \frac{1}{2^{m+1}}$ y

$$W_n^{y_n} \subseteq W_{m+1}^y \cup B_{\frac{1}{2^{m+1}}+\frac{1}{2^n}}(\mathrm{Fr}(f^{-1}(\overline{\{y\}}))) \subseteq W_{m+1}^y \cup W_m^y = W_m^y,$$

pero esto es imposible por la hipótesis. Luego existe una sucesión de puntos $t_n \in f^{-1}(\overline{\{y_n\}})$ con $t_n \notin W_{m+1}^y$ para cada $n > m$. Nótese que $\overline{\{t_n\}} \cap W_{m+1}^y = \varnothing$.

Supongamos primero que la sucesión $\{t_n\}$ no tiene acumulación. Entonces el conjunto $F = \bigcup_{n>m} \overline{\{t_n\}}$ es cerrado en X y $f(F) \subseteq \bigcup_{n>m} \overline{\{y_n\}}$. Por tanto, $Y \backslash f(F)$ es un entorno abierto de y que no contiene a $\overline{\{y_n\}}$ si $n > m$ pero esto hemos visto que es imposible.

En consecuencia, la sucesión $\{t_n\}$ tiene un punto de acumulación $t \notin W_{m+1}^y$ en X. Por ser X IAN existe una subsucesión $\{t_{n_k}\}_k$ de $\{t_n\}$ que converge a t. Pongamos

$$F = \overline{\{t\}} \cup \bigcup_k \overline{\{t_{n_k}\}}.$$

Comprobemos que F es cerrado en X, sea $z \notin F$ como $z \notin \overline{\{t\}}$, por regularidad, existen dos entornos abiertos disjuntos V^z y V^t de z y t, respectivamente, entonces $V^z \cap \overline{\{t_{n_k}\}} = \varnothing$ salvo quizás una cantidad finita de índices $k_1, ..., k_s$. Entonces,

$$V^z \backslash \bigcup_{i=1}^{s} \overline{\{t_{n_{k_i}}\}}$$

es un entorno abierto de z que no corta a F y F es cerrado. Por tanto, como $t \notin W_{m+1}^y$ se tiene que $\overline{\{y\}} \cap f(F) = \varnothing$, luego $Y \backslash f(F)$ es un entorno abierto de y que no cotiene a $\overline{\{y_{n_k}\}}$ para todo k y esto es imposible. Concluimos que el aserto **(a)** es cierto.

(b) Para cada $y \in Y$ se tiene que $\{\mathrm{Est}(y; \mathcal{U}_n)\}_n$ es una base de entornos de y luego $\{\mathcal{U}_n\}_n$ es un desarrollo de Y e Y es pseudometrizable. En efecto, sea $y \in Y$ y V^y un entorno abierto suyo. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $U_m(y) \subseteq V^y$, por **(a)** existe un natural n de forma que para cada $z \in Y$ con $f^{-1}(\overline{\{y\}}) \subseteq W_n^z$ se tiene que $W_n^z \subseteq W_m^y$.

Comprobemos que $\mathrm{Est}(y;\mathcal{U}_n) \subseteq U_m(y) \subseteq V^y$ para finalizar. Sea $z \in \mathrm{Est}(y;\mathcal{U}_n)$ entonces existe $t \in Y$ de forma que $z, y \in U_n(t)$. Como $\overline{\{y\}} \subseteq U_n(t)$ se tiene que $f^{-1}(\overline{\{y\}}) \subseteq W_n^t$ así $W_n^t \subseteq W_m^y$ luego $z \in U_n(t) \subseteq U_m(y) \subseteq V$ como queríamos.

□

Como el axioma de separación T_1 se mantiene por aplicaciones cerradas y sobreyectivas se tiene que:

Teorema 4.2 (Hanai-Morita-Stone). *Sean X e Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una aplicación continua, cerrada y sobreyectiva. Supongamos que X es metrizable. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *Y es metrizable.*
(ii) *Y es* IAN.
(iii) *Para cada $y \in Y$ se tiene que* $\mathrm{Fr}(f^{-1}(y))$ *es compacto.*

Corolario 4.3. *Sean X e Y espacios topológicos y sea $f : X \to Y$ propia y sobreyectiva. Si X es pseudometrizable (metrizable) entonces Y es pseudometrizable (metrizable).*

Demostración. Como f es propia se tiene que para cada $y \in Y$ el conjunto $f^{-1}(y)$ es compacto en X, luego si X es metrizable Y también lo es.

Supongamos pues que X es pseudometrizable. Como X es regular y f es propia se tiene que Y es regular (II.2.6) luego para cada $y \in Y$ se tiene que $\overline{\{y\}}$ es compacto (II.2.3). Así, por I.4.13, $f^{-1}(\overline{\{y\}})$ es compacto en X y como $\mathrm{Fr}(f^{-1}(\overline{\{y\}}))$ es cerrado, por V.4.1, se concluye el resultado. □

EL axioma de numerabilidad IAN se mantiene por imagen continua, abierta y sobreyectiva de donde se deduce el siguiente resultado.

Corolario 4.4. *Sean X e Y espacios topológicos y sea $f : X \to Y$ continua, cerrada, abierta y sobreyectiva. Si X es pseudometrizable (metrizable) entonces Y es pseudometrizable (metrizable).*

5. Metrizabilidad y espacios de funciones continuas

Lema 5.1. *Sea K un espacio compacto. Sea d una métrica continua en K entonces d metriza la topología de K.*

Demostración. Como d es continua en K se tiene que las bolas métricas generadas por d son abiertas en K. Por tanto, si denotamos por $\mathcal{T}$ a la topología de K, la aplicación identidad

$$Id : (K, \mathcal{T}) \to (K, d)$$

es continua y biyectiva de un espacio compacto en un espacio Hausdorff luego es cerrada y, por ello, homeomorfismo. □

Observación 5.2 Si K es un espacio compacto y Hausdorff se sigue de II.3.7 que K es T_4.

El siguiente teorema de metrización es bien conocido y de uso frecuente en el Análisis Funcional.

Teorema 5.3. *Sea K un espacio compacto y Hausdorff. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *K es metrizable.*
(ii) *K cumple el* IIAN.
(iii) *$(C(K), ||\cdot||_\infty)$ es separable.*

Demostración. **(i)⇒(ii)** Sea d un métrica que describa la topología de K. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos el recubrimiento abierto $\{B_{\frac{1}{n}}(x)\}_{x\in K}$ de K. Por compacidad, existe un subconjunto finito $K_n \subseteq K$ de forma que $\{B_{\frac{1}{n}}(x)\}_{x\in K_n}$ cubre K.

Resulta que el conjunto $D = \bigcup_n K_n$ es denso en K. En efecto, sea $x \in K$ y sea $\epsilon > 0$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \epsilon$ existe $y \in K_n$ de forma que $x \in B_{\frac{1}{n}}(y)$ luego $y \in B_{\frac{1}{n}}(x) \subseteq B_\epsilon(x)$. Así, D es un conjunto numerable y denso en K, luego K es separable y como, por la hipótesis, K es métrico concluimos que K cumple el IIAN.

(ii)⇒(i) Se sigue de la última observación y del *Teorema de metrización de Urysohn.*

(i)⇒(iii) Sea d una métrica en K que describa su topología. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $K_n \subseteq K$ finito con $K = \bigcup_{z\in K_n} B_{\frac{1}{n}}(z)$. Sea $\{\varphi_z^n\}_{z\in K_n}$ una partición de la unidad subordinada a $\{B_{\frac{1}{n}}(z)\}_{z\in K_n}$.

Consideremos el conjunto numerable $D = \{\sum_{z\in K_n} q_z^n \varphi_z^n : q_z^n \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}\}$ y comprobemos que es denso en $C(K)$.

Sea $f \in C(K)$, por continuidad uniforme, dado $\epsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que si

$$d(x,y) < \frac{1}{n} \text{ entonces } |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sea $f_\epsilon = \sum_{z\in K_n} f(z)\varphi_z^n \in C(K)$ se tiene que $||f - f_\epsilon||_\infty < \frac{\epsilon}{2}$. Ciertamente, sea $x \in K$ y pongamos $K_n(x) = \{z \in K_n : x \in B_{\frac{1}{n}}(x)\}$ se tiene que

$$|f(x) - f_\epsilon(x)| = |\sum_{z\in K_n} (f(x) - f(z))\varphi_z^n(x)| = |\sum_{z\in K_n(x)} (f(x) - f(z))\varphi_z^n(x)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Por otro lado, para cada $z \in K_n$ existe $q_z^n \in \mathbb{Q}$ con $|f(z) - q_z^n| < \frac{\epsilon}{2}$. Por tanto, si ponemos $g = \sum_{z\in K_n} q_z^n \varphi_z^n \in D$ se tiene que $||f_\epsilon - g||_\infty < \frac{\epsilon}{2}$ luego $||f - g||_\infty < \epsilon$. Así, D es denso en $C(K)$ como queríamos.

(iii)⇒(i) Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C(K)$ denso. Consideremos la familia $\{d_n\}$ de pseudométricas continuas en K definidas por

$$d_n(x,y) = \text{mín}\{1, |f_n(x) - f_n(y)|\}.$$

Definimos la siguiente pseudométrica continua en K,

$$d(x,y) = \sum_n \frac{1}{2^n} d_n(x,y).$$

Comprobemos que, en realidad, d define una métrica continua en K. Basta ver que si $d(x,y)=0$ entonces $x=y$. En efecto, consideremos las evaluaciones δ_x, δ_y que, recordemos, son formas lineales y continuas sobre $C(K)$. Si $d(x,y)=0$ se tiene que $\delta_x(f_n)=\delta_y(f_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ luego δ_x y δ_y coinciden en un subconjunto denso de $C(K)$ y, por tanto, son iguales luego $x=y$ como queríamos. Por el lema anterior se concluye la prueba. $\square$

Bibliografía

[1] J. DUGUNDJI: *Topology*
Allyn and Bacon, Boston 1966.

[2] R. ENGELKING: *General Topology.*
Heldermann Verlag, Berlín 1989.

[3] J. MARGALEF, E. OUTERELO, E. PADRÓN: *Topología general.*
Sanz y Torres, Madrid 2000.

[4] W. RUDIN: *Análisis funcional*
Reverté, Barcelona 1979.

[5] G. VERA: *Fundamentos de Topología*
Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Murcia, 2013.