El género real de los grupos $C_{2m} \times D_n$

José Javier Etayo[*] y Ernesto Martínez[†]

Departamento de Álgebra
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
28040 Madrid, España
jetayo@mat.ucm.es

Departmento de Matemáticas Fundamentales
U.N.E.D
28040 Madrid, España
emartinez@mat.uned.es

Dedicado al profesor Enrique Outerelo con ocasión de su jubilación académica.

ABSTRACT

Todo grupo finito G actúa como grupo de automorfismos de diversas superficies de Klein con borde. Al menor de los géneros algebraicos de estas superficies se le llama género real $\rho(G)$ del grupo G. Se conocen todos los grupos con $0 \leq \rho(G) \leq 8$, así como el género real para varias familias de grupos. En este trabajo calculamos el género real de los grupos $\mathfrak{G} = C_{2m} \times D_n$, en función de los números m y n.

2000 Mathematics Subject Classification: 30F50, 20F05, 20H10.
Key words: Género real de un grupo, superficies de Klein con borde, grupos de automorfismos.

1. Introducción

Una superficie de Klein X es una superficie compacta dotada de una estructura dianalítica [1]. Las superficies de Klein pueden considerarse como una generalización de las superficies de Riemann e incluyen tanto superficies con borde como superficies no orientables. Una superficie de Klein orientable y sin borde es una superficie de Riemann. Dada una superficie de Klein de género topológico g y con k componentes

[*]Parcialmente subvencionado por BFM2002-04797 y HPRN-CT-2001-0271.
[†]Parcialmente subvencionado por BFM2002-04801.

en el borde se llama género algebraico de X al número $p = \eta g + k - 1$, donde $\eta = 2$ si X es orientable y $\eta = 1$ en caso contrario.

En el estudio de las superficies de Klein y de sus grupos de automorfismos juegan un papel esencial los grupos cristalográficos no euclídeos (grupos NEC, en lo que sigue). Un grupo NEC Γ es un subgrupo discreto del grupo $\mathcal{G}$ de isometrías del plano hiperbólico $\mathcal{H}$ con cociente $\mathcal{H}/\Gamma$ compacto. Dada una superficie de Klein con $p \geq 2$ existe un grupo NEC, llamado grupo de superficie, tal que $X = \mathcal{H}/\Gamma$, [12].

Un grupo G de orden N es un grupo de automorfismos de una superficie de Klein $X = \mathcal{H}/\Gamma$ si y sólo si existe otro grupo NEC Λ tal que Γ es un subgrupo normal de Λ de índice N y $G = \Lambda/\Gamma$. Si G es un grupo finito existe siempre una superficie de Klein con borde X tal que G es grupo de automorfismos de X, [1]. Dado un grupo finito G se llama género real de G, $\rho(G)$, al menor género algebraico de una superficie de Klein con borde X tal que G actúa como un grupo de automorfismos sobre X. May comenzó en [8] su estudio sistemático. Dos tipos de problemas aparecen entonces. Por una parte, obtener todos los grupos de género real n, para cada número natural n. De otra parte, dada una familia de grupos calcular el género real de los elementos de esa familia.

Respecto al primer problema se conocen hasta el momento todos los grupos tales que $0 \leq \rho(G) \leq 8$. Los grupos de género real 0 son C_n y D_n (cíclicos y dihedrales, respectivamente). Los de género 1 son $C_2 \times C_n$ con $n \geq 4$ y par, y $C_2 \times D_n$ con n par. Si $\rho(G) \geq 2$, el número de grupos para cada género es finito. De hecho no hay grupos de género 2. Los grupos de género 3 son únicamente el grupo simétrico S_4 y el grupo alternado A_4. Hay cuatro grupos de género 4, nueve de género 5, cuatro grupos de género 6 , otros cuatro de género 7 y dos grupos de género 8. (Véanse [7], [8] y [9] para $\rho(G) \leq 5$ y [4] para los grupos de género real $6, 7$ y 8.) También se conocen los géneros reales de los grupos abelianos finitos [11] y de muchas otras familias de grupos. En particular, el género real de los grupos $C_k \times D_n$ para k impar fue calculado por May en [10], donde el autor plantea el problema de calcular el género real de los grupos $C_k \times D_n$ para k par.

En este trabajo calculamos, en función de m y n, el género real de los grupos de la forma $C_{2m} \times D_n$, donde C_{2m} es el grupo cíclico de orden $2m$ y D_n es el grupo dihedral de orden $2n$. Esto se hará en la Sección 3. Previamente, por conveniencia del lector no especialista, damos unos preliminares sobre grupos NEC y superficies de Klein.

2. Preliminares

2.1. Grupos NEC

Se denomina grupo cristalográfico no Euclídeo (grupo NEC) a todo subgrupo discreto Γ de $\mathcal{G}$, con espacio cociente $\mathcal{H}/\Gamma$ compacto. Si un grupo NEC contiene sólo elementos que conservan la orientación, se llama grupo Fuchsiano. A un grupo NEC que no sea Fuchsiano se le llamará grupo NEC propio.

Todo grupo NEC Γ tiene asociado el siguiente símbolo llamado signatura [5]:

$$\sigma(\Gamma) : (g; \pm; [m_1, \ldots, m_r]; \{(n_{1,1}, \ldots, n_{1,s_1}), \ldots, (n_{k,1}, \ldots, n_{k,s_k})\}), \tag{2.1}$$

donde los números son enteros; $g, r, k, s_i \geq 0$, $m_i, n_{i,j} \geq 2$. Los números g y k son el género topológico y el número de componentes en el borde del cociente $\mathcal{H}/\Gamma$. Los m_i se llaman periodos propios. Los paréntesis $(n_{i,1}, \ldots, n_{i,s_1})$ se llaman ciclo–periodos. Los $n_{i,j}$ se llaman link–periodos. El signo '+' aparece si $\mathcal{H}/\Gamma$ es orientable y '-' aparece en caso contrario. La cantidad $p = \eta g + k - 1$ se llama género algebraico, donde $\eta = 2$ ó 1, según que $\mathcal{H}/\Gamma$ sea orientable o no.

Si la signatura no tiene periodos propios se escribe $[-]$. Si no hay ciclo–periodos se escribe $\{-\}$. Los ciclo–periodos vacíos, es decir cuando $s_i = 0$, se representan con el símbolo $(-)$. Además, una secuencia de periodos propios o de link–periodos de la forma $m, \overset{l}{\ldots}, m$, se denotará por m^l, y una secuencia de ciclo periodos vacíos $(-) \overset{t}{\ldots} (-)$ se denotará por $(-)^t$. Un grupo NEC con signatura

$$(g; \pm; [-], \{(-)^k\}), \tag{2.2}$$

se llama grupo de superficie.

La signatura determina la presentación de Γ. Los generadores son [13]:

$x_i,$	$i = 1, ..., r$		(elípticos)
$e_i,$	$i = 1, ..., k$		(hiperbólicos salvo el caso $g = 0, k = 1, r = 1$)
$c_{i,j},$	$i = 1, ..., k,$ $j = 0, ..., s_i$		(reflexiones)
$a_i, b_i,$	$i = 1, ..., g$	(si '+')	(hiperbólicos)
$d_i,$	$i = 1, ..., g$	(si '-')	(reflexiones sesgadas).

que satisfacen las relaciones:

$$x_i^{m_i} = c_{i,j-1}^2 = c_{i,j}^2 = (c_{i,j-1}c_{i,j})^{n_{i,j}} = e_i^{-1}c_{i,0}e_i c_{i,s_i} = 1,$$

y

$$x_1 ... x_r e_1 ... e_k a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} ... a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1,$$

si el signo es '+', o

$$x_1 ... x_r e_1 ... e_k d_1^2 ... d_g^2 = 1,$$

si el signo es '-'. Desde ahora, utilizaremos los símbolos $a_i, b_i, c_{i,j}, d_i, e_i, x_i$, exclusivamente para hacer referencia a estos generadores, a los que llamaremos *generadores canónicos.*

Se llama área de un grupo NEC Γ con signatura (2.1) a

$$|\Gamma| = 2\pi\left(\eta g + k - 2 + \sum_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{m_i}\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{s_i}\left(1-\frac{1}{n_{i,j}}\right)\right). \tag{2.3}$$

Una condición necesaria y suficiente para que una signatura represente a un grupo NEC Γ es que $|\Gamma| > 0$.

Sea Γ un subgrupo de un grupo NEC Γ'. Entonces, Γ es un grupo NEC si y sólo si el índice, $[\Gamma' : \Gamma]$, es finito. Además, se tiene que si Γ es un subgrupo de un grupo NEC Γ' de índice N, entonces la relación entre sus áreas viene dada por la fórmula de Riemann-Hurwitz:

$$|\Gamma| = N|\Gamma'|. \tag{2.4}$$

Llamaremos área reducida de Γ a la expresión $|\Gamma|^* = |\Gamma|/2\pi$.

2.2. Superficies de Klein

Como se ha dicho en la introducción una superficie de Klein X es una superficie compacta dotada de una estructura dianalítica. Dada una superficie de Klein X de género algebraico $p \geq 2$, género topológico g y k componentes en el borde, entonces existe un grupo NEC de superficie, Γ, con signatura (2.2) y signo '+' ó '-' según que la superficie sea orientable o no, tal que X y $\mathcal{H}/\Gamma$ son isomorfas como superficies de Klein.

Observación Las únicas superficies topológicas compactas que no satisfacen la condición $p \geq 2$ son: la esfera y el toro (orientables y sin borde), el disco cerrado y el anillo cerrado (orientables y con borde), el plano proyectivo y la botella de Klein (no orientables y sin borde) y la banda de Möbius (no orientable y con borde).

La relación entre los grupos NEC y los grupos de automorfismos de las superficies de Klein viene dada por el siguiente resultado [6]:

Un grupo finito G es un grupo de automorfismos de una superficie de Klein, $X = \mathcal{H}/\Gamma$, si y sólo si existe un grupo NEC Γ' tal que $\Gamma \subset \Gamma' \subset N_{\mathcal{G}}(\Gamma)$ y $G = \Gamma'/\Gamma$.

Como consecuencia de estos resultados se tiene que el grupo $Aut(S)$, de todos los automorfismos de una superficie de Klein $X = \mathcal{H}/\Gamma$, de género algebraico $p \geq 2$, es finito (por la fórmula de Riemann-Hurwitz). Además,

$$Aut(S) = N_{\mathcal{G}}(\Gamma)/\Gamma.$$

Necesitaremos después el siguiente resultado sobre grupos NEC y superficies de Klein con borde, demostrado en [3].

Lema 2.1 *Un grupo NEC, Γ', admite un subgrupo de superficie con borde si y sólo si en la signatura de Γ' aparece un ciclo–periodo vacío o un ciclo–periodo con dos link–periodos consecutivos iguales a 2 .*

3. El género real

En esta Sección vamos a calcular el género real de los grupos $\mathfrak{G} = C_{2m} \times D_n$. Su orden es $4mn$. Si $n = 1, 2$ entonces $\mathfrak{G}$ es abeliano y su género real está calculado en [11]. Si $m = 1$ se tiene que $\mathfrak{G} = C_2 \times D_n$. Si n es impar entonces $\mathfrak{G} = D_{2n}$ y $\rho(G) = 0$, y si n es par entonces $\rho(\mathfrak{G}) = 1$, [8]. Además si m y n son impares se tiene que $C_{2m} \times D_n \approx C_m \times D_{2n}$ cuyo género real es conocido, [10]. Así pues en lo que sigue supondremos que $m \geq 2$ y $n \geq 3$, y si n es impar entonces m es necesariamente par. A partir de aquí, una superficie X será siempre una superficie de Klein con borde y con $p \geq 2$. Sean $C_{2m} =< y \,|\, y^m >$ y $D_n =< a, b \,|\, a^2 = b^2 = (ab)^n >$. Estas letras se utilizarán solamente para designar a estos generadores.

En primer lugar vamos a obtener una cota superior para el área reducida $|\Lambda|^*$ y, por tanto, para el género real de los grupos $\mathfrak{G}$.

Proposición 3.1 *Sea la signatura* $\sigma : (0, +, [-], \{(2, 2), (-)\})$. *Entonces existe un grupo NEC* Λ *con esta signatura tal que* Λ *admite un subgrupo normal de superficie* Γ *y* $C_{2m} \times D_n$ *actúa como un grupo de automorfismos sobre la superficie* $\mathcal{H}/\Gamma$.

Demostración. Sea $\theta : \Lambda \to \mathfrak{G}$ el epimorfismo:

$$\begin{array}{ll} \theta(e_1) = y, & \theta(e_2) = y^{-1}, \\ \theta(c_{1,0}) = a, & \theta(c_{2,0}) = b. \\ \theta(c_{1,1}) = 1, & \\ \theta(c_{1,2}) = a, & \end{array}$$

Obviamente se satisfacen las relaciones y $\Gamma = \ker(\theta)$ es un grupo NEC de superficie con borde. □

Como $|\Lambda|^* = \frac{1}{2}$, obtenemos de (2.3) y de (2.4) la siguiente cota superior para el género real:

$$\rho(\mathfrak{G}) \leq 1 + \frac{|\mathfrak{G}|}{2} = 1 + 2nm.$$

Por tanto, para reducir el género debemos reducir $|\Lambda|^*$ y para ello debemos estudiar los grupos NEC de área reducida menor que $\frac{1}{2}$. Previamente, necesitamos algunos resultados sobre los generadores de $\mathfrak{G}$ y de Λ.

Aunque probablemente conocido, no hemos encontrado en la literatura una demostración explícita del siguiente resultado.

Lema 3.2 *El grupo* $C_{2m} \times D_n$ *admite un sistema generador minimal de* 2 *ó* 3 *elementos según que* n *sea impar o par, respectivamente.*

Demostración. (i) Sea $n = 2t + 1$.

Consideremos los elementos $v = yaba$, $w = a$, de órdenes $2m$ y 2, respectivamente. Se tiene que

$$\begin{aligned} v^{-1}wvw &= y^{-1}abaayabaa = (ab)^2, \\ (v^{-1}wvw)^{t+1} &= ((ab)^2)^{t+1} = ab, \\ w(v^{-1}wvw)^{t+1} &= aab = b, \\ v(v^{-1}wvw)^{t+1}w &= yabaaba = y, \end{aligned}$$

y, por tanto, $\{v, w\}$ es un sistema generador mínimal de $C_{2m} \times D_n$.

(ii) Sea $n = 2t$. Entonces $C_{2m} \times D_n$ no puede generarse con dos elementos.

Observemos que si $m = 1$ y $n = 2$ entonces $C_2 \times D_2 \approx C_2 \times C_2 \times C_2$ y cualquier par de elementos de orden 2 genera $C_2 \times C_2$ ya que conmutan.

Sea el epimorfismo $\varphi : C_{2m} \times D_n \to C_2 \times D_n$ definido por $\varphi(y^t, x) \to (y^{tm}, x)$. Existe otro epimorfismo $C_2 \times D_n \to C_2 \times D_2$ inducido por $\psi : D_n \to D_2$, donde $\psi(a) = a$ y $\psi(ab) = (ab)^t$. Entonces $C_2 \times D_2$ es imagen epimórfica de $C_{2m} \times D_n$. Por tanto $C_{2m} \times D_n$ no puede estar generado por dos elementos.

Obviamente, los generadores y, a, b de los grupos C_{2m} y D_n generan el producto, luego éste tiene un sistema generador minimal de tres elementos, dos de ellos de orden 2. □

Estudiemos ahora los generadores del grupo NEC Λ de signatura σ. Sean, respectivamente, r_2, r_h, el número de periodos propios iguales a 2 y el número de los que son mayores que 2, en σ. Análogamente s_2 y s_h para los link–periodos. Sean s el número de link–periodos y $l \leq k$ el número de ciclo–periodos vacíos.

Si $\Lambda/\Gamma = \mathfrak{G}$, entonces Λ tiene un sistema generador de, a lo más, $p + r + s + l - 1$ elementos, de los cuales, a lo más, $p + r_h$ son de orden mayor que 2, [10]. Como el número de generadores de Λ de orden 2 (respectivamente, de orden mayor que 2) ha de ser mayor o igual que el número de generadores de $\mathfrak{G}$ de los órdenes respectivos, se tiene por el Lema 3.2:

$$p + r_h \geq 1, \tag{3.1}$$

y

$$r_2 + s + l - 1 \geq 1 \;\text{ ó }\; 2, \tag{3.2}$$

según que n sea impar o par, respectivamente. Escribamos el área reducida de Λ de la siguiente manera:

$$|\Lambda|^* = p - 1 + \frac{r_2}{2} + \sum_{i=1}^{r_h}\left(1 - \frac{1}{m_i}\right) + \frac{s_2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s_h}\left(1 - \frac{1}{n_j}\right), \tag{3.3}$$

donde los n_j son los link–periodos mayores que 2. Estudiamos para qué valores esta cantidad es estrictamente menor que $\frac{1}{2}$.

Observamos en primer lugar que p sólo puede ser 1 ó 0. El argumento lo haremos sobre el número l de ciclo–periodos vacíos de la signatura de Λ.

Sea $l = 2$. Entonces $k = 2$ y p ha de ser 1. Si $r = 0$ entonces $|\Lambda|^* = 0$ y si $r \geq 1$ entonces $|\Lambda|^* \geq \frac{1}{2}$.

Sea $l = 1$. Tenemos dos casos según que $k = 2$ ó $k = 1$. Supongamos primero $k = 2$. Por tanto, $p = 1$ y, además, $s > 0$. De (3.2) tenemos que $r_2 + s + l - 1 \geq 1$ ó 2, según que n sea impar o par. Si $r \geq 1$ como $s > 0$ se tiene que $|\Lambda|^* > \frac{1}{2}$. En particular, $r_2 = 0$. Si $s_2 = 2$ nuevamente $|\Lambda|^* \geq \frac{1}{2}$. Por tanto el único caso posible es para $s = 1$, lo que implica que n ha de ser impar, siendo la signatura de Λ:

$$(0, +, [-], \{(\lambda), (-)\}). \tag{3.4}$$

Sea ahora $k = 1$. Entonces $p = 0$ y $s = 0$. De (3.1) se tiene que $r_h \geq 1$. Análogamente de (3.2) se tiene que $r_2 \geq 1$ ó 2, según que n sea impar o par. Si $r_2 = 2$ entonces $|\Lambda|^* \geq \frac{1}{2}$. De aquí $r_2 = 1$ y n ha de ser necesariamente impar. Si suponemos que $r_h \geq 2$ nuevamente $|\Lambda|^* \geq \frac{1}{2}$. Por tanto el único caso admisible es la siguiente signatura:

$$(0, +, [2, \lambda], \{(-)\}), \tag{3.5}$$

Finalmente, sea $l = 0$. Por el Lema 2.1 entonces $s_2 \geq 2$. Si $k = 2$ y, por tanto, $p = 1$ entonces $|\Lambda|^* \geq \frac{3}{4}$. Así pues $k = 1$ y el ciclo–periodo es de la forma (2,2,...). Si $p = 1$, $|\Lambda|^* \geq \frac{1}{2}$. Sea $p = 0$. Por (3.1) $r_h \geq 1$. Si $r_h \geq 2$ entonces $|\Lambda|^* \geq \frac{5}{6}$. Por tanto $r_h = 1$. De (3.2) tenemos que $r_2 + s \geq 2$ ó 3 según que n sea impar o par. Si $r_2 \geq 1$ $|\Lambda|^* \geq \frac{2}{3}$. Si $s \geq 4$, $|\Lambda|^* \geq \frac{2}{3}$. Sea $s = 3$ y supongamos que $s_h = 1$, entonces $|\Lambda|^* \geq \frac{1}{2}$. Queda el caso $s_2 = 3$. El área reducida es ahora $|\Lambda|^* = \frac{3}{4} - \frac{1}{\lambda}$, que es menor que $\frac{1}{2}$ si y sólo si $\lambda = 3$, siendo $|\Lambda|^* = \frac{5}{12}$. Hemos obtenido la signatura:

$$(0, +, [3], \{(2, 2, 2)\}). \tag{3.6}$$

Por último sea $s_2 = 2$ y por tanto n impar. Tenemos la signatura:

$$(0, +, [\lambda], \{(2, 2)\}), \tag{3.7}$$

Consideremos en primer lugar la signatura (3.4). Existe un epimormismo θ de Λ con esta signatura en $C_{2m} \times D_n$ y otro epimorfismo de $C_{2m} \times D_n$ en D_n. Llamemos ψ a la composición de ambos, de Λ en D_n, y recordemos que n es impar.

Necesariamente $\theta(c_{2,0}) = 1$ y, en consecuencia, D_n está generado por $\psi(e_1)$ y $\psi(c_{1,0})$.

Los elementos de D_n son $(ab)^i$ y $(ab)^i a$ donde $0 \leq i \leq n-1$. De ellos los de orden dos son los del segundo tipo. En consecuencia sean $\psi(c_{1,0}) = (ab)^j a$, $\psi(c_{1,1}) = (ab)^k a$. Tenemos dos posibilidades para $\psi(e_1)$:

a) $\psi(e_1) = (ab)^l$. Entonces,

$$1 = \psi(e_1^{-1} c_{1,0} e_1 c_{1,1}) = (ba)^l (ab)^j a (ab)^l (ab)^k a = (ab)^{j-l} (ba)^{l+k} = (ab)^{j-k-2l},$$

luego $j-k-2l$ es múltiplo de n. Por otra parte, como $\psi(e_1)$ y $\psi(c_{1,0})$ generan D_n, el orden $o(\psi(e_1)) = n$. Por tanto, l es primo con n y, como n es impar, también lo es $2l$.

Finalmente, $\psi(c_{1,0}c_{1,1}) = (ab)^j a (ab)^k a = (ab)^{j-k}$, y $j-k = (j-k-2l) + 2l$, luego es primo con n. En consecuencia, el orden de $\psi(c_{1,0}c_{1,1})$ es n, luego λ ha de ser múltiplo de n.

b) $\psi(e_1) = (ab)^l a$. Entonces,

$$1 = \psi(e_1^{-1} c_{1,0} e_1 c_{1,1}) = (ab)^l a (ab)^j a (ab)^l a (ab)^k a = (ab)^{2l-j-k},$$

luego $2l-j-k$ es múltiplo de n. Por otra parte, como $\psi(e_1)$ y $\psi(c_{1,0})$ son dos elementos de orden 2 que generan D_n, el orden $o(\psi(e_1)\psi(c_{1,0})) = o((ab)^l a (ab)^j a) = o((ab)^{l-j}) = n$. Por tanto, $l-j$ es primo con n y $2l-2j$ también.

Finalmente, $\psi(c_{1,0}c_{1,1}) = (ab)^j a (ab)^k a = (ab)^{j-k}$, y $j-k = (2l-j-k) - (2l-2j)$, luego es primo con n. En consecuencia, el orden de $\psi(c_{1,0}c_{1,1})$ es n, luego λ ha de ser múltiplo de n.

En los casos a) y b), por tanto, el valor de λ que proporciona la menor área es n.

Consideremos ahora la signatura (3.5). Sea el epimorfismo θ de Λ con esa signatura en $C_{2m} \times D_n$ y definimos ahora ψ como la composición de θ con el epimorfismo de $C_{2m} \times D_n$ en C_{2m}. Entonces C_{2m} está generado por las imágenes mediante ψ de los generadores de Λ, que son todos de orden 2 salvo x_2. Como m es par, ya que n es impar, se tiene $o(\psi(x_2)) = 2m$. Luego λ debe ser múltiplo de $2m$. El valor de λ que produce menor área es precisamente $2m$. Para la signatura (3.7) se aplica exactamente el mismo argumento.

Queda el caso de (3.6). Por la misma razón anterior C_{2m} está generado por elementos de orden 2 y uno de orden 3. Luego $2m = 6, m = 3$ y, en consecuencia, n ha de ser par.

Supongamos que existiese un epimorfismo θ de Λ con esa signatura en $C_6 \times D_n$. Existe un epimorfismo de $C_6 \times D_n$ en $C_6 \times D_2 \approx C_6 \times C_2 \times C_2$. Llamemos ψ a la composición de θ con este epimorfismo. Resulta que $C_6 \times C_2 \times C_2$ estaría generado por $\psi(x_1), \psi(c_{1,0})$ y $\psi(c_{1,1})$, es decir, por un elemento de orden 3 y dos elementos de orden 2. Pero esto es imposible. En consecuencia, no existe el epimorfismo θ de Λ con la signatura (3.6) en $C_{2m} \times D_n$.

Hemos obtenido en el caso n impar las siguientes tres signaturas:

$$(0,+,[-],\{(n),(-)\}),$$
$$(0,+,[2,2m],\{(-)\}),$$
$$(0,+,[2m],\{(2,2)\}),$$

El siguiente paso es comprobar que para cada una de esas signaturas existe un grupo NEC Λ y un epimorfismo $\theta : \Lambda \to \mathfrak{G}$, tal que $\ker(\theta)$ sea un grupo NEC que uniformiza a una superficie de Klein con borde.

De ahora en adelante sea $n = 2t+1$ y recordemos que entonces m ha de ser par.

Proposición 3.3 *Sea la signatura* $\sigma : (0,+,[-],\{(n),(-)\})$. *Entonces existe un grupo NEC* Λ *con esta signatura tal que* Λ *admite un subgrupo normal de superficie* Γ *y* $C_{2m} \times D_n$ *actúa como un grupo de automorfismos sobre la superficie* $\mathcal{H}/\Gamma$.

Demostración. Sea $\theta : \Lambda \to \mathfrak{G}$ definido

$$\begin{array}{ll} \theta(e_1) = ya, & \theta(e_2) = y^{-1}a, \\ \theta(c_{1,0}) = aba, & \theta(c_{2,0}) = 1. \\ \theta(c_{1,1}) = b, & \end{array}$$

Comprobamos que se satisface la relación:

$$\theta(e_1^{-1}c_{1,0}e_1c_{1,1}) = ay^{-1}abayab = 1,$$

y las otras se satisfacen trivialmente. Por otra parte $(ab)^2$ es un elemento de orden n y $((ab)^2)^{t+1} = ab$. Así pues

$$\begin{array}{rcl} \theta\left((c_{1,0}c_{1,1})^{t+1}c_{1,1}\right) & = & a, \\ \theta(e_1(c_{1,0}c_{1,1})^{t+1}c_{1,1}) & = & y, \end{array}$$

entonces θ es un epimorfismo y $\ker(\theta)$ es un grupo NEC de superficie. □

Proposición 3.4 *Sea la signatura* $\sigma : (0,+,[2,2m],\{(-)\})$. *Entonces existe un grupo NEC* Λ *con esta signatura tal que* Λ *admite un subgrupo normal de superficie* Γ *y* $C_{2m} \times D_n$ *actúa como un grupo de automorfismos sobre la superficie* $\mathcal{H}/\Gamma$.

Demostración. Sea $\theta : \Lambda \to \mathfrak{G}$ definido

$$\begin{array}{ll} \theta(x_1) = a, & \theta(e_1) = y^{-1}ab, \\ \theta(x_2) = yaba, & \theta(c_{1,0}) = 1. \end{array}$$

Las relaciones se satisfacen trivialmente. Además por el Lema 3.2 sabemos que los elementos a e $yaba$ generan $C_{2m} \times D_n$. Entonces θ es un epimorfismo y $\ker(\theta)$ es un grupo NEC de superficie. □

Proposición 3.5 *Sea la signatura* $\sigma : (0, +, [2m], \{(2, 2)\})$*. Entonces existe un grupo NEC* Λ *con esta signatura tal que* Λ *admite un subgrupo normal de superficie* Γ *y* $C_{2m} \times D_n$ *actúa como un grupo de automorfismos sobre la superficie* $\mathcal{H}/\Gamma$*.*

Demostración. Sea $\theta : \Lambda \to \mathfrak{G}$ definido

$$\begin{aligned} \theta(x_1) = y(ab)^t a, \quad & \theta(e_1) = y^{-1} a(ba)^t, \\ & \theta(c_{1,0}) = a, \\ & \theta(c_{1,1}) = 1, \\ & \theta(c_{1,2}) = b. \end{aligned}$$

La relación que hay que comprobar es, en este caso

$$\theta(e_1^{-1} c_{1,0} e_1 c_{1,2}) = y(ab)^t aay^{-1} a(ba)^t b = (ab)^t (ab)^t ab = (ab)^n = 1.$$

Y además

$$\theta(x_1 c_{1,0} (c_{1,2} c_{1,0})^t) = y(ab)^t aa(ba)^t = y,$$

entonces θ es un epimorfismo y $\ker(\theta)$ es un grupo NEC de superficie. □

Observemos que el área reducida del grupo Λ obtenido en cada una de las tres proposiciones es $\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$ en el primer caso y $\frac{1}{2} - \frac{1}{2m}$ en los dos últimos. Por tanto el área mínima se obtendrá para el mínimo de n y m.

Podemos resumir todos los resultados anteriores en el siguiente:

Teorema 3.6 *Sean* $m \geq 2, n \geq 3$*, dos números no simultáneamente impares. El género real* $\rho(\mathfrak{G})$ *del grupo* $\mathfrak{G} = C_{2m} \times D_n$ *es*

$1 + 2nm$ *si* n *es par,*
$1 + 2m(n-1)$ *si* n *es impar y* $n < m$*,*
$1 + 2n(m-1)$ *si* n *es impar y* $n > m$*.*

Estudiamos ahora el número de componentes del borde de la superficie $\mathcal{H}/\Gamma$, que se calcula a partir de los Teoremas 2.3.1 y 2.3.2 de [2]. Sea la signatura de Γ:

$$(g, \pm, [-], \{(-)^k\}),$$

donde $p = \eta g + k - 1 = \rho(\mathfrak{G})$. Sea $o(x)$ el orden del elemento x de Λ.

Caso n par: El número de componentes del borde de $\mathcal{H}/\Gamma$ es

$$k = \frac{4nm}{2o(\theta(c_{1,0}c_{1,2}))} = 2nm.$$

Caso n impar y $n < m$: En este caso tenemos

$$k = \frac{4nm}{o(\theta(e_2))} = \frac{4nm}{2m} = 2n.$$

En el caso n impar y $n > m$ tenemos dos signaturas. Sea la signatura de la Proposición 3.4. Ahora

$$k = \frac{4nm}{o(\theta(e_1))} = \frac{4nm}{\mathrm{mcm}(2m, n)},$$

mientras que para la signatura de la Proposición 3.5 es

$$k = \frac{4nm}{o(\theta(c_{1,0}c_{1,2}))} = \frac{4nm}{n} = 4m.$$

Como se dijo en la Introducción, un problema interesante es saber para cada número natural qué grupos tienen género real igual a ese número. Como Corolario del Teorema obtenemos para qué números impares N existe un grupo de la familia $C_{2m} \times D_n$ con género real igual a N.

Corolario 3.7 *Sea $N \geq 5$ un número impar.*
a) El grupo $C_4 \times D_n$ tiene género real N donde:

i) $n = 2u$, *si* $N = 8u + 1$.

ii) $n = 4u + 1$, *si* $N = 8u + 3$.

iii) $n = 4u + 3$, *si* $N = 8u + 7$.

b) No existe ningún grupo $C_{2m} \times D_n$, con m y n no simultáneamente impares, que tenga género real $N = 8u + 5$.

Demostración. Basta comprobar que en cada caso esos valores de m y n satisfacen las condiciones del Teorema 3.6. $\square$

Los autores agradecen al Profesor José Manuel Gamboa la sugerencia de la demostración del Lema 3.2 para el caso n par.

References

[1] N.L. Alling, N. Greenleaf: *Foundations of the theory of Klein surfaces.* Lect. Notes in Math. **219,** Springer-Verlag, Berlin 1971.

[2] E. Bujalance, J.J. Etayo, J.M. Gamboa, G. Gromadzki: *A combinatorial approach to automorphism groups of compact bordered Klein surfaces.* Lecture Notes in Math. **1439,** Springer-Verlag, Berlin 1990.

[3] E. Bujalance, E. Martínez: *A remark on NEC groups representing surfaces with boundary.* Bull. London Math. Soc. **21** (1989), 263–266.

[4] G. Gromadzki, B. Mockiewicz: *The groups of real genus* 6*,* 7 *and* 8. Houston J. Math. **28** (2002), 691–699.

[5] A.M. Macbeath: *The classification of non-Euclidean crystallographic groups.* Canad. J. Math. **19** (1967), 1192–1205.

[6] C.L. May: *Large automorphism groups of compact Klein surfaces with boundary.* Glasgow Math. J. **18** (1977), 1–10.

[7] ________: *The groups of real genus* 4. Michigan Math. J. **39** (1992), 219–228.

[8] ________: *Finite groups acting on bordered surfaces and the real genus of a group.* Rocky Mountain J. Math. **23** (1993), 707–724.

[9] ________: *Groups of small real genus.* Houston J. Math. **20** (1994), 393–408.

[10] ________: *Finite metacyclics groups acting on bordered surfaces.* Glasgow Math. J. **36** (1994), 23–240.

[11] D. McCullough: *Minimal genus of abelian actions on Klein surfaces with boundary.* Math. Z. **205** (1990), 421–436.

[12] R. Preston: *Projective structures and fundamental domains on compact Klein surfaces.* Ph.D. Thesis, Univ. of Texas, 1975.

[13] H.C. Wilkie: *On non-Euclidean crystallographic groups.* Math. Z. **91** (1966), 87–102.