Problemas de Geometría Diferencial

Jesús M. Ruiz

1996*

Número 1. Recubrir la esfera $\mathbb{S}^n$ del espacio afín $\mathbb{R}^{n+1}$ mediante dos parametrizaciones (usar dos proyecciones estereográficas). ¿Es posible hacerlo con menos de dos?

Número 2. Describir el fibrado tangente de una circunferencia.

Número 3. Demostrar que un toro de revolución (generado por una circunferencia alrededor de un eje coplanario) es una variedad diferenciable, utilizando una ecuación global. (Por ejemplo, $16(x^2+y^2) = (x^2+y^2+z^2+3)^2$ es la ecuación del toro obtenido al girar la circunferencia de centro $(2,0,0)$ y radio 1 del plano $y=0$ alrededor del eje $x=y=0$.)

Número 4. Dado un toro de revolución M generado por una circunferencia alrededor de un eje situado en el mismo plano, construir un difeomorfismo local suprayectivo $\varphi : \mathbb{R}^2 \to M \subset \mathbb{R}^3$ (utilizar rotaciones).

Número 5. Demostrar que el conjunto $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^3 = 0\}$ no es una variedad diferenciable.

Número 6. Demostrar que el conjunto $M \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$ de las matrices cuadradas de orden 2 y rango 1 es una variedad diferenciable y calcular su dimensión.

Número 7. Demostrar que cualquier toro de revolución es difeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^4$. (Recordar las coordenadas polares.)

Número 8. Demostrar que $M : z = xy$, y $N : 4z = y^2 - x^2$ son variedades diferenciables de $\mathbb{R}^3$, y que la fórmula $f(x,y,z) = (x-y, x+y, z)$ define una aplicación diferenciable de M en N. Calcular la derivada de f en el punto $(1,1,1)$.

Número 9. Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ el subconjunto de ecuación $x^3+y^3+z^3-3xyz = 2$.

(1) Demostrar que M es una superficie diferenciable.

(2) Calcular el plano tangente a M en un punto arbitrario $a \in M$.

(3) Encontrar una base del plano H tangente a M en $a = (1,1,0)$.

(4) Construir una parametrización φ de M en cuya imagen esté el punto $a = (1,1,0)$, y calcular la base de H que define φ.

Número 10. Sea $M \subset \mathbb{R}^4$ el conjunto de las matrices $A \neq 0$ cuadradas de orden 2 con determinante y traza nulos. Se pide:

(1) Demostrar que M es una variedad diferenciable, y calcular su dimensión.

*Revisión 2003

(2) Probar que la aplicación $A \mapsto A^t$ es un difeomorfismo de M.
(3) Calcular la derivada de la aplicación anterior en el punto $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Número 11. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable positiva, y sea $M \subset \mathbb{R}^3$ el subconjunto de ecuación $z^2 = f(x, y) + x^2 + y^2$.
(1) Demostrar que M es una superficie diferenciable.
(2) Demostrar que cualquier aplicación $g : M \to \mathbb{R}$ restricción de una forma lineal $(x, y, z) \mapsto ax + by + cz$ tiene derivada suprayectiva en algún punto.

Número 12. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación $f(s, t) = (st + \frac{1}{2}t^2, \frac{1}{2}st^2 + \frac{1}{3}t^3, s)$. ¿Es $f(\mathbb{R}^2)$ una variedad diferenciable?

Número 13. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la aplicación: $t \mapsto (\cos t, \cos 2t)$. Estudiar para qué intervalos abiertos $(a, b) \subset \mathbb{R}$ es $f(a, b)$ una variedad.

Número 14. Probar que un difeomorfismo local $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de hecho un difeomorfismo sobre un intervalo abierto. ¿Se puede generalizar este hecho a dimensión superior?

Número 15. Comprobar que los subconjuntos de $\mathbb{R}^4$ definidos por las ecuaciones $M :\ x^2 + y^2 - z^2 - t^2 = 1,\ -xt + yz = 1$, e $N :\ -xt + yz = 1$ son variedades diferenciables, y calcular los espacios tangentes a ambas en los puntos $(0, y, z, 0) \in M$.

Número 16. Identificamos con $\mathbb{R}^2$ el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos y con $\mathbb{R}^3$ el espacio vectorial E de los polinomios reales de grado ≤ 2, y definimos una aplicación $f : \mathbb{C} \to E$ mediante

$$z = x + iy \mapsto (x + y)\mathtt{t}^2 + (x - y)\mathtt{t} + xy.$$

Comprobar que f es una aplicación diferenciable y calcular su derivada en la unidad imaginaria $i \in \mathbb{C}$.

Número 17. Identificamos con $\mathbb{R}^2$ el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos, y sea P un polinomio mónico en una indeterminada con coeficientes complejos. Mostrar que $\mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto P(z)$ es una aplicación diferenciable, y que es un difeomorfismo local en todos los puntos salvo una cantidad finita. ¿Cuáles son esos puntos excepcionales?

Número 18. Sea $M \subset \mathbb{R}^k$ una variedad diferenciable de dimensión m y supongamos que los vectores $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{R}^k$ forman una base del espacio tangente a M en un punto dado $a \in M$. Demostrar que existe una parametrización $\varphi : \mathbb{R}^m \to U \subset M$ tal que $\varphi(0) = a$, respecto de la cual sea $u_i = \partial/\partial x_i|_a$, $1 \leq i \leq m$.

Número 19. Sea $M \subset \mathbb{R}^k$ una variedad diferenciable y H el espacio vectorial tangente a M en un punto $a \in M$. Sea $\pi : \mathbb{R}^k \to a + H$ una proyección afín (por ejemplo, la proyección ortogonal). Demostrar que π define en un entorno de a un sistema de coordenadas.

Número 20. Sea $M \subset \mathbb{R}^k$ una variedad diferenciable y sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable que tiene un extremo local en el punto $a \in M$. Demostrar que $d_a f \equiv 0$.

Número 21. Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una hipersuperficie y considérese la función diferenciable $f : M \to \mathbb{R} : x \to \|x\|^2$. Si f tiene un extremo local en el punto $a = (a_1, \dots, a_n) \in M$, entonces el hiperplano tangente a M en a es $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$.

Número 22. Sean A, B dos cerrados disjuntos de un conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$. Construir, usando una partición diferenciable de la unidad, una función diferenciable $f : X \to \mathbb{R}$ que *separa* los dos cerrados: $f|A \equiv 0$ y $f|B \equiv 1$.

Número 23. Sea $M \subset \mathbb{R}^k$ una variedad diferenciable, y $f : U \to \mathbb{R}$ una aplicación diferenciable definida en un entorno abierto U de un punto $p \in M$. Demostrar que existe una aplicación diferenciable $g : M \to \mathbb{R}$ que coincide con f en un entorno $V \subset U$ de p.

Número 24. Sea M una variedad diferenciable con borde no vacío. Construir una ecuación global de ∂M, esto es, una función diferenciable $f : M \to \mathbb{R}$ tal que: (i) $f \geq 0$, (ii) $\partial M = f^{-1}(0)$, y (iii) d_xf es suprayectiva para cada $x \in M$ suficientemente próximo a ∂M. *Indicación:* Hágase localmente primero, mostrando que la solución local es única salvo producto por funciones estrictamente positivas, y utilícese después una partición diferenciable de la unidad.

Número 25. Sea q la forma cuadrática no degenerada de ecuación

$$q(x) = x_1^2 + \cdots + x_n^2 - x_{n+1}^2,$$

y $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ el conjunto $q(x) = -1$, $x_{n+1} > 0$.

(1) Demostrar que M es una hipersuperficie diferenciable.

(2) Probar que la *pseudoinversión*

$$f(x) = a - 2\frac{x - a}{x_1^2 + \cdots + x_n^2 - (x_{n+1} + 1)^2}, \quad a = (0, \dots, 0, -1),$$

induce un difeomorfismo de M sobre un subconjunto del hiperplano $H : x_{n+1} = 0$, e identificar tal subconjunto.

(3) Calcular la derivada de $f|M$ en un punto arbitrario de M.

Número 26. Sean $M \subset \mathbb{R}^k$ una variedad diferenciable que no contiene al origen, $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^k$ la esfera estándar y $f : M \to \mathbb{S}$ la aplicación $x \mapsto x/\|x\|$. Demostrar que la derivada d_xf es inyectiva si y sólo si x no es tangente a M en x.

Número 27. Demostrar que el conjunto $A \subset \mathbb{R}^3$ de ecuaciones $x^{2k} + y^{2\ell} + z^{2m} = 1$ es una variedad diferenciable difeomorfa a la esfera $\mathbb{S}^2$.

Número 28. Demostrar que una variedad diferenciable puede siempre recubrirse con parametrizaciones cuyos dominios sean o bien un espacio afín $\mathbb{R}^m$ o bien un semiespacio afín $\mathbb{H}^m$.

Número 29. Demostrar que un par de variedades diferenciables $M \subset N$ es localmente difeomorfo al par $\mathbb{R}^m \equiv \mathbb{R}^m \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$, con las indicaciones siguientes:

(1) Mediante una parametrización de N podemos suponer $N = \mathbb{R}^n$.

(2) A partir de una parametrización de M se puede definir un difeomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^m \to M \subset \mathbb{R}^n$ cuyo jacobiano tiene rango máximo m.

(3) Reordenando adecuadamente las variables, las ecuaciones

$$\begin{cases} y_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_m) & 1 \le i \le m, \\ y_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_m) + x_i & m < i \le n, \end{cases}$$

definen una parametrización de N cuya restricción a $\mathbb{R}^m \times \{0\}$ es una de M.

Número 30. Sean $M \subset N$ dos variedades diferenciables de dimensiones $m < n$, M cerrada en N.

(1) Demostrar que existe una función diferenciable $f : N \to \mathbb{R}$ tal que $M = f^{-1}(0)$.

(2) Dada f como en (1), ¿cuándo es $d_x f \neq 0$ para todo $x \in M$?

Número 31. Sean $M \subset N$ dos variedades diferenciables y $X : M \to TN$ una aplicación diferenciable tal que $X_a \in T_aM \subset T_aN$ para cada $a \in M$; suponemos que M es un cerrado en N. Demostrar que existe un campo tangente diferenciable χ de N cuya restricción a M coincide con X. (Utilizar una referencia adaptada para mostrar que localmente el problema se reduce a extender funciones diferenciables, y globalizar el resultado utilizando particiones diferenciables de la unidad.) ¿Es necesaria la hipótesis de que M sea un cerrado?

Número 32. Sea P un polinomio real homogéneo de grado d en $n+1$ variables.

(1) Establecer la siguiente *igualdad de Euler* para funciones homogéneas:

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i \frac{\partial P}{\partial x_i} = d \cdot P.$$

(2) Demostrar que cada ecuación $P = \varepsilon$, $\varepsilon \neq 0$, define una hipersuperficie diferenciable M_ε de $\mathbb{R}^{n+1}$.

(3) Probar que M_ε es difeomorfa a M_1 para $\varepsilon > 0$ y a M_{-1} para $\varepsilon < 0$.

(4) ¿Son necesariamente difeomorfas estas dos últimas?

Número 33. Demostrar que el espacio proyectivo real $P_n(\mathbb{R})$ es una variedad diferenciable de dimensión n, identificándolo con su imagen en $\mathbb{R}^N$ por la aplicación inyectiva

$$(x_0 : \ldots : x_n) \mapsto \left(\frac{x_i x_j}{x_0^2 + \cdots + x_n^2} \right)_{0 \le i \le j \le n}$$

Utilizar los $n+1$ abiertos afines habituales $U_i : x_i \neq 0$ para recubrir $P_n(\mathbb{R})$ con $n+1$ parametrizaciones cuyos dominios son todos $\mathbb{R}^n$.

Número 34. Demostrar que la aplicación $f : P_2(\mathbb{R}) \to P_1(\mathbb{R})$ definida por la fórmula $f(x_0 : x_1 : x_2) = (x_0^2 : x_0^2 + x_1^2 + x_2^2)$ es diferenciable, y calcular su derivada en el punto $(0 : 1 : 0)$.

Número 35. Demostrar que el espacio proyectivo complejo $P_n(\mathbb{C})$ es una variedad diferenciable de dimensión $2n$. Mostrar que se puede recubrir con $n+1$ parametrizaciones cuyos dominios son $\mathbb{R}^{2n}$.

Número 36. Demostrar que las homografías entre espacios proyectivos (reales o complejos) son difeomorfismos.

Número 37. Demostrar que $P_1(\mathbb{R})$ es difeomorfo a una circunferencia y que $P_1(\mathbb{C})$ es difeomorfo a una esfera.

Número 38. Las grassmannianas son también variedades diferenciables. Para representarlas dentro de un espacio afín, cada subespacio lineal $L \subset \mathbb{R}^n$ de dimensión $\dim L = k$ se identifica con la matriz de la proyección ortogonal sobre L.

(1) Demostrar que de este modo la grassmanniana de k-planos en $\mathbb{R}^n$ se identifica con el conjunto $G_{n,k} \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ de las matrices simétricas, idempotentes y de traza k.

(2) Probar que $G_{n,k}$ es una variedad diferenciable compacta de dimensión $(n-k)k$.

(3) ¿Qué obtenemos para $k = 1$?

(4) ¿Y para $k = n-1$?

(5) Describir explícitamente $G_{2,1} \subset \mathbb{R}^4$

Número 39. Definir un difeomorfismo $G_{2,1} \to P_1(\mathbb{R})$ y calcular su derivada en un punto arbitrario.

Número 40. Demostrar que la aplicación canónica $\pi : \mathbb{S}^n \to P_n(\mathbb{R})$ dada por $(x_0, \dots, x_n) \mapsto (x_0 : \dots : x_n)$ es diferenciable. Calcular su derivada en un punto arbitrario y deducir que es un difeomorfismo local.

Número 41. Identificamos del modo habitual $\mathbb{R}^4$ con el espacio de las matrices cuadradas de orden 2 con coeficientes reales, y fijamos un número real $\alpha > 0$. Denotamos por M el conjunto de las matrices $A \in \mathbb{R}^4$ tales que $\|A.x\| = \alpha\|x\|$ para todo $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Se pide:

(1) Probar que $A \in M$ si y sólo si $\|A.x\| = \alpha$ siempre que $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

(2) Caracterizar las matrices $A = (a_{ij})$ de M mediante sus coeficientes a_{ij}.

(3) Deducir que M es una variedad diferenciable y calcular su dimensión.

(4) Describir el fibrado tangente de M.

Número 42. Se identifica del modo natural $\mathbb{R}^{n\times m}$ con el espacio vectorial de las aplicaciones lineales $u : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, y se considera el subconjunto $M \subset \mathbb{R}^{n\times m}$ formado por las aplicaciones cuya imagen es una recta.

(1) Demostrar que M es una variedad diferenciable, y que su dimensión es $m+n-1$.

(2) Mostrar que es diferenciable la aplicación $f : M \to P_{n-1}(\mathbb{R}) : u \mapsto a$, donde a es el punto proyectivo definido por la recta vectorial $u(\mathbb{R}^m)$.

(3) Probar que todas las derivadas $d_u f$ son suprayectivas, exhibiendo localizaciones de f del tipo $\mathbb{R}^{n-1} \times (\mathbb{R}^m \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}^{n-1}$.

Número 43. Probar que el conjunto M de las aplicaciones lineales $u : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ cuya imagen $L \subset \mathbb{R}^n$ tiene dimensión k es una variedad diferenciable de dimensión $(n+m-k)k$, y que la aplicación $u \mapsto L$ de M sobre la grassmanniana $G_{n,k}$ tiene derivada suprayectiva por doquier.

Número 44. Se identifica $\mathbb{R}^{n\times n}$ con el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden n.

(1) Demostrar que el conjunto $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ de las matrices simétricas es una variedad diferenciable difeomorfa a un espacio afín, de dimensión $n(n+1)/2$.

(2) Comprobar que la aplicación $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \Sigma : A \mapsto A^t \cdot A$ es diferenciable y mostrar que

su derivada en $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es la aplicación lineal $B \mapsto A^tB + B^tA$.

(3) Interpretar $\Omega = f^{-1}(I)$ como el grupo ortogonal, y deducir que ese grupo es una variedad diferenciable compacta y sin borde de dimensión $n(n-1)/2$.

Número 45. Se consideran en $\mathbb{R}^m$ las coordenadas canónicas $x = (x_1, \dots, x_m)$, y el campo tangente $X = \partial/\partial x_1$ correspondiente a la primera de ellas x_1. Calcular todos los campos tangentes Y que conmutan con X, esto es, tales que $[X, Y] = 0$.

Número 46. Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ el cilindro $\mathbb{R}\times\mathbb{S}^1$, y $\varphi : \mathbb{R}^2 \to M$ el difeomorfismo local suprayectivo $(t, \theta) \mapsto (t, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$. Dado $X = e^t\frac{\partial}{\partial\theta}$ encontrar todos los campos Y tales que $[X, Y] = 0$.

Número 47. Paralelizar el hiperboloide reglado $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} + 1$, utilizando las rectas que contiene, como se indica a continuación:

(1) Simplificar la situación con un cambio lineal, para que $a = b = c = 1$.

(2) Calcular la intersección del paraboloide con cada plano tangente suyo, para obtener siempre dos rectas secantes en el punto de tangencia.

(3) Obtener a partir de las rectas anteriores una referencia móvil definida en todos los puntos de la superficie.

Número 48. Demostrar que una superficie de revolución es siempre paralelizable. (Utilizar los paralelos y los meridianos.)

Número 49. Calcular el flujo del campo de la recta dado por $X = t^2\frac{\partial}{\partial t}$.

Número 50. Calcular y dibujar los flujos de los siguientes campos tangentes del plano:

(1) *Fuente*: $X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$,

(2) *Sumidero*: $X = -x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$,

(3) *Circulación*: $X = y\frac{\partial}{\partial x} - ax\frac{\partial}{\partial y}$, $a > 0$,

(4) *Silla*: $X = x\frac{\partial}{\partial x} - ay\frac{\partial}{\partial y}$, $a > 0$,

(5) $X = (x^2 - y^2)\frac{\partial}{\partial x} - 2xy\frac{\partial}{\partial y}$.

(6) $X = -2xy\frac{\partial}{\partial x} + (x^2 - y^2)\frac{\partial}{\partial y}$.

Número 51. Sea φ_t un flujo en una variedad M y X su generador infinitesimal. Un campo tangente Y de M se llama invariante respecto de φ_t si para cada punto $a \in M$ se cumple $\varphi_{t*}(Y_a) = Y_{\varphi_t(a)}$.

(1) Enunciar con precisión y demostrar la afirmación siguiente: dos campos tangentes de una variedad conmutan si y sólo si lo hacen sus flujos.

(2) Comprobar que la derivada de $c(t) = \varphi_{-t*}(Y_{\varphi_t(a)})$ es $c'(t) = \varphi_{-t*}([X, Y]_{\varphi_t(a)})$, y deducir que Y es invariante si y sólo si $[X, Y] = 0$.

Número 52. Sean $X^{(1)}, \dots, X^{(r)}$ campos tangentes a una variedad M, y $a \in M$ un punto en el que son independientes. La condición necesaria y suficiente para que se tenga $X^{(i)} = \partial/\partial x_i$ en un sistema de coordenadas adecuado de un entorno de a es que $[X^{(i)}, Y^{(j)}] = 0$ para cada par i, j. Demostrar este hecho utilizando las indicaciones siguientes:

(1) Mediante un primer sistema local de coordenadas, se puede suponer que $M = \mathbb{R}^m$, que $a = 0$ es el origen, y que $X_0^{(i)} = \partial/\partial x_i|_0$.

(2) Los flujos $\varphi_{i,t}$ de los campos $X^{(i)}$ determinan la aplicación diferenciable $h:(x_1,\dots,x_m)\mapsto\varphi_{1,x_1}\circ\cdots\circ\varphi_{r,x_r}(0,\dots,0,x_{r+1},\dots,x_m)$.

(3) Se verifica $\frac{\partial h(x)}{\partial x_i}=X^{(i)}_{h(x)}$ para $1\le i\le r$ y $\frac{\partial h(x)}{\partial x_i}|_0=\partial/\partial x_i|_0$ para $r<i\le m$.
Concluir que h es un difeomorfismo local que proporciona un sistema de coordenadas como el que se busca.

Número 53. Se considera en el plano afín $\mathbb{R}^2$ el campo $X=-y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y}$. Calcular todos los campos $Y=a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}$ tales que $[X,Y]=0$. (Utilizar el flujo de X para convertir el campo en una derivada parcial, resolver el problema para esa derivada, y deshacer el cambio para terminar.)

Número 54. Sea X un campo tangente del plano afín $\mathbb{R}^2$ cuyos ceros son aislados, y cuyas curvas integrales no constantes son todas líneas rectas.

(1) Si las curvas integrales que pasan por dos puntos a,b distintos no son paralelas, entonces X se anula en el punto de intersección de las dos rectas.

(2) Mediante un cambio lineal de $\mathbb{R}^2$ podemos suponer que las curvas integrales no constantes son rectas paralelas al eje $x=0$, o rectas que pasan por un cero del campo.

(3) Si por un cero de X pasan dos curvas integrales, suficientemente cerca de ese cero todas las curvas integrales pasan por él, y sólo hay un cero de ese tipo, que después de una translación podemos suponer es el origen.

(4) Si todas las curvas integrales son rectas paralelas, entonces X es proporcional a $\frac{\partial}{\partial y}$.

(5) Si hay rectas integrales no paralelas, entonces X es proporcional a $x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}$.

Número 55. Sea E un espacio vectorial de dimensión m, $B=\{u_1,\dots,u_m\}$ una base de E y $\{\varphi_1,\dots,\varphi_m\}$ la base dual de $E^*=\bigwedge^1(E)$. Demostrar que

$$\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_m=\det{}_B\in\bigwedge^m(E).$$

Número 56. Demostrar que k formas lineales $\varphi_1,\dots,\varphi_k\in E^*$ son linealmente independientes si y sólo si $\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_k\neq 0$.

Número 57. Demostrar que si una forma α tiene grado impar, entonces $\alpha\wedge\alpha=0$. Mostrar con un ejemplo que esto no ocurre para formas de grado par.

Número 58. Sean α y ω formas de grados 1 y 2 respectivamente, en una variedad M. Estudiar la equivalencia de las dos condiciones siguientes:

(1) $\alpha\wedge\omega=0$.

(2) Existe otra forma β de grado 1 tal que $\omega=\alpha\wedge\beta$.

(Utilizar una partición diferenciable de la unidad para reducirse al caso en que M es una bola abierta de $\mathbb{R}^m$ y $\alpha=\mathrm{d}x_1+\sum_{1<i\le m}a_i\mathrm{d}x_i$, con lo que el problema pertenece en realidad al álgebra lineal.)

Número 59. Sea M una variedad diferenciable de dimensión m y sean $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ formas de grado 1 que generan el algebra de Grassmann de la variedad. Demostrar:

(1) Una forma η de grado $<m$ tal que $\eta\wedge\alpha_i=0$ para cada i, es necesariamente nula.

(2) Si $m>2$, toda forma ω de grado 1 tal que $\omega\wedge\alpha_i=\mathrm{d}\alpha_i$ para cada i es necesariamente

cerrada.

(3) Mostrar con un contraejemplo que la condición $m > 2$ del apartado anterior es necesaria.

Número 60. Sean $f : M \to N$ una aplicación diferenciable, $\eta \in \Gamma^k(N)$ una forma diferencial de grado k y $\omega = f^*\eta \in \Gamma^k(M)$. Sean (U, x), (V, y) sistemas de coordenadas con $f(U) \subset V$ de modo que

$$\omega = \sum_I \omega_I \mathrm{d}x_I, \quad \eta = \sum_J \eta_J \mathrm{d}y_J.$$

Calcular los ω_I en función de los η_J y de los menores de orden k de la matriz jacobiana $\left(\frac{\partial(y_j \circ f)}{\partial x_i}\right)_{ij}$.

Número 61. Sea E un espacio vectorial de dimensión m. Para cada vector $u \in E$ definimos un operador $i_X : \bigwedge^k(E) \to \bigwedge^{k-1}(E)$ mediante la fórmula natural siguiente:

$$i_u(\omega)(u_1, \dots, u_{k-1}) = \omega(u, u_1, \dots, u_{k-1}).$$

Demostrar que si $\alpha \in \bigwedge^r(E)$ y $\beta \in \bigwedge^s(E)$, entonces

$$i_u(\alpha \wedge \beta) = (i_u\alpha) \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge (i_u\beta).$$

Extender esta definición a variedades: dado un campo X tangente a una variedad M, se obtiene un operador i_X que transforma formas de grado k en formas de grado $k-1$.

Número 62. Se considera la forma de $\mathbb{R}^4$ siguiente

$$\omega = (y + z + t)\mathrm{d}x + (x + z + t)\mathrm{d}y + (x + y + t)\mathrm{d}z + f\mathrm{d}t.$$

Determinar f para que sea una forma cerrada, y mostrar entonces explícitamente que es exacta.

Número 63. Sean f, g, h funciones diferenciables y considérese en $\mathbb{R}^3$ la forma de grado 1

$$\omega = yz\mathrm{d}x + (zf(x) + h(x))\mathrm{d}y + (yg(x) + h(x))\mathrm{d}z.$$

Determinar f, g, h para que ω sea cerrada, y comprobar que entonces es, de hecho, exacta.

Número 64. Se considera el abierto $W \subset \mathbb{R}^3$ definido por $x^2 + y^2 \neq 0$, $z > 0$, y en él la forma ω de grado 2

$$\omega = f\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)(x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - y\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z - z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y),$$

donde $f(t)$ es una función diferenciable en $t > 0$. Determinar f para que ω sea cerrada, y encontrar entonces una primitiva suya. (Úsese la parametrización $x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\operatorname{sen}\theta,\ z = \rho t$.)

Número 65. Sea $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ la esfera estándar y $p : (x, y, z) \mapsto (u, v)$ la proyección estereográfica desde el polo norte $p_N = (0, 0, 1)$. Se consideran además $a = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{S}^2$ y $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$ la aplicación diferenciable $p \mapsto \|p - a\|$.

(1) Sabiendo que un campo diferenciable X tangente a la esfera se escribe $X = v\frac{\partial}{\partial u} - u\frac{\partial}{\partial v}$ en $\mathbb{S}^2 \setminus \{p_N\}$, calcular X_{p_N}.

(2) Calcular $X(f) : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$.

(3) Sabiendo que una forma diferenciable ω se escribe $\omega = \frac{u}{(u^2+v^2+1)^3}\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v$ en $\mathbb{S}^2 \setminus \{p_N\}$, calcular ω_{p_N}.

(3) Calcular $\omega(X, Y) : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$, siendo Y el campo tangente a la esfera definido por $p : (x, y, z) \mapsto (0, -z, y)$.

Número 66. Demostrar que una función diferenciable cuya diferencial exterior es nula es constante en cada componente de su dominio de definición.

Número 67. Demostrar que la dimensión del primer grupo de cohomología de de Rham coincide con el número de componentes conexas de M.

Número 68. Demostrar que si una variedad diferenciable M es unión de dos abiertos disjuntos M_1 y M_2, entonces $\Gamma^k(M) = \Gamma^k(M_1) \oplus \Gamma^k(M_2)$, y deducir que $H^k(M) = H^k(M_1) \oplus H^k(M_2)$.

Número 69. Demostrar que $H^m(\mathbb{R}^m) = 0$: la forma $a\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_m$ es la diferencial de

$$\Big(\int_0^{x_1} a(t, x_2, \ldots, x_m)\mathrm{d}t\Big)\mathrm{d}x_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_m.$$

Número 70. Demostrar que $H^1(\mathbb{R}^2) = 0$ como sigue: si $\omega = a(x, y)\mathrm{d}x + b(x, y)\mathrm{d}y$ es cerrada, entonces la función

$$f(x, y) = \int_0^x a(s, 0)\mathrm{d}s + \int_0^y b(x, t)\mathrm{d}t$$

es una primitiva de ω. Generalizar el procedimiento para concluir que $H^1(\mathbb{R}^m) = 0$ para m arbitrario.

Número 71. En $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ consideramos la forma de grado 1

$$\omega = -\frac{y}{x^2 + y^2}\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2 + y^2}\mathrm{d}y,$$

que restringida a $M \setminus \{x = 0\}$ es la diferencial de la función: $(x, y) \mapsto \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ (elegimos arctg con valores en $[-\pi/2, \pi/2]$, por ejemplo). Deducir que ω es cerrada, pero no exacta (en M).

Número 72. Generalizar el resultado anterior al caso $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$. Se trata de encontrar n formas cerradas $\omega_1, \ldots, \omega_n \in \Gamma^1(M)$, de manera que los cociclos correspondientes en $H^1(M)$ sean linealmente independientes. Admitiendo que $\dim_{\mathbb{R}} H^1(M) = n$ (pues M es un plano con n agujeros), deducir que cualquier forma cerrada $\eta \in \Gamma^1(M)$ se escribe como

$$\eta = \alpha_1\omega_1 + \cdots + \alpha_n\omega_n + \mathrm{d}h,$$

donde las constantes $\alpha_i \in \mathbb{R}$ son únicas y la función diferenciable $h \in \Gamma^0(M)$ lo es salvo constantes.

Número 73. Se considera en $M = \mathbb{R}^m$ la forma diferencial $\omega = \sum_{ij} a_{ij}x_i\mathrm{d}x_j$. Caracterizar mediante la matriz (a_{ij}) el hecho de que ω sea cerrada, y comprobar que en ese caso ω es exacta, calculando una función cuya diferencial sea ω.

Número 74. Una *variedad topográfica* es una hipersuperficie diferenciable $M \subset \mathbb{R}^{m+1} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ en la cual la proyección $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m : x \mapsto x'$ induce un difeomorfismo sobre un abierto de $\mathbb{R}^m$. Demostrar que esto equivale a que M sea el grafo de una función diferenciable $x_{m+1} = f(x')$ definida en un abierto de $\mathbb{R}^m$. Probar que entonces el espacio tangente a M en un punto x es el grafo de la derivada $d_{x'}f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$.

Número 75. El *rotacional* de tres funciones diferenciables $a, b, c : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es por definición el campo

$$\left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z}, \frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x}, \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right),$$

cuya definición obedece a la regla del determinante

$$\begin{vmatrix} (1) & (2) & (3) \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a & b & c \end{vmatrix}.$$

Demostrar que una forma diferencial $\omega = a\mathrm{d}x + b\mathrm{d}y + c\mathrm{d}z$ es cerrada sobre una superficie topográfica si y sólo si el rotacional de a, b, c es tangente a la superficie.

Número 76. Consideramos la forma diferencial $\omega = xy\mathrm{d}x + 2xz\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z$ y buscamos todas las superficies topográficas M sobre las que es cerrada. Proceder en las siguientes etapas:

(1) Si M es el grafo de $f : U \to \mathbb{R}$, entonces la función $g(x, y) = f(x, y) - \frac{1}{3}x$ cumple la ecuación

$$2g + x\frac{\partial g}{\partial x} + y\frac{\partial g}{\partial y} = 0.$$

(2) Deducir que la función $h(x, t) = x^2 g(x, xt)$ no depende de x.

(3) En $U \setminus \{x = 0\}$ se tiene $g = \frac{1}{x^2}\varphi(\frac{y}{x})$ para cierta función diferenciable $\varphi(t)$, y M es la superficie $x^3 - 3zx^2 + 3\varphi(\frac{y}{x}) = 0$.

(4) Si $(0, 0) \in U$, entonces $g \equiv 0$ en un disco de centro el origen, esto es, $\varphi(\frac{y}{x}) = 0$ si (x, y) está en ese disco, y $x \neq 0$. Concluir que $g \equiv 0$ y que M es el plano $x - 3z = 0$.

Número 77. Demostrar que una variedad con borde es orientable si y sólo si lo es su interior.

Número 78. Orientar la esfera como el borde de la bola cerrada, y comparar las orientaciones resultantes en puntos antipodales (en los que los espacios vectoriales tangentes a la esfera coinciden).

Número 79. Demostrar que una variedad paralelizable es orientable.

Número 80. Sea M una variedad diferenciable de dimensión 3, y supongamos que existe un par de campos tangentes X_1, X_2 globales que son independientes (y por tanto ninguno nulo) en cada punto de M. Demostrar que M es orientable si y sólo si es paralelizable.

Número 81. Sea $\mathbb{S}^p$ la esfera de dimensión $p = 1, 3, 7$, que consideramos respectivamente como el grupo multiplicativo de los complejos, cuaterniones, octoniones, de módulo 1; sea $\mathbf{1} \in \mathbb{S}^p$ la unidad de ese grupo. Demostrar que si $u \in \mathbb{R}^{p+1}$ es un vector tangente a $\mathbb{S}^p$ en $\mathbf{1}$, entonces $a \mapsto u \cdot a$ define un campo tangente a $\mathbb{S}^p$. Deducir que $\mathbb{S}^p$ es paralelizable.

Número 82. Demostrar que el fibrado tangente de una variedad diferenciable dada es siempre una variedad orientable (aunque no lo sea la variedad dada).

Número 83. Demostrar que el espacio proyectivo complejo $P_n(\mathbb{C})$ es orientable, y que cualquier homografía compleja $P_n(\mathbb{C}) \to P_n(\mathbb{C})$ conserva la orientación.

Número 84. Demostrar el criterio siguiente: si una variedad M contiene dos abiertos $U, V \subset M$ difeomorfos a $\mathbb{R}^m$ que pueden orientarse mediante dos orientaciones que coinciden en un punto de la intersección $U \cap V$ pero no en toda ella, entonces la variedad no es orientable.

Número 85. Se considera la aplicación $f : \mathbb{R} \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \to \mathbb{R}^3$ de ecuaciones

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos x \\ \operatorname{sen} x \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} \cos x & -\operatorname{sen} x & 0 \\ \operatorname{sen} x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(x/2) \\ 0 \\ \operatorname{sen}(x/2) \end{pmatrix}$$

Demostrar que la imagen de f es una banda de Möbius, y que no es orientable.

Número 86. ¿Tiene la banda de Möbius algún campo tangente global nunca nulo?

Número 87. Demostrar como sigue que el plano proyectivo real $P_2(\mathbb{R})$ no es orientable. Sean $(x_0 : x_1 : x_2)$ coordenadas homogéneas de dicho plano.

(1) El abierto $U : x_1 \neq 0$ es difeomorfo a $\mathbb{R}^2$ via la parametrización
$(u, u') \mapsto (u : 1 : u')$.

(2) El abierto $V : x_2 \neq 0$ es difeomorfo a $\mathbb{R}^2$ via la parametrización
$(v, v') \mapsto (v : v' : 1)$.

(3) Los dos abiertos anteriores se pueden orientar de modo que las orientaciones coincidan en $(0 : 1 : 1)$ y no lo hagan en $(0 : 1 : -1)$.

(En realidad, se está volviendo a demostrar que una banda de Möbius no es orientable, pues $P_2(\mathbb{R}) \setminus \{(1 : 0 : 0)\} = U \cup V$ es una tal banda.)

Número 88. Se consideran en $P_2(\mathbb{R})$ coordenadas homogéneas $(x_0 : x_1 : x_2)$, y se define la aplicación $f : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ por la fórmula:

$$f(x_0 : x_1 : x_2) = \Big(\frac{x_1^2 - x_2^2}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_0 x_1}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_0 x_2}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_1 x_2}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2} \Big).$$

Demostrar que f es un difeomorfismo sobre su imagen. Obsérvese que no es posible definir un difeomorfismo de $P_2(\mathbb{R})$ sobre una superficie compacta de $\mathbb{R}^3$, puesto que una tal superficie es siempre orientable.

Número 89. Demostrar que una variedad diferenciable que admite una forma de volumen es orientable.

Número 90. Demuéstrese que el espacio proyectivo real $P_n(\mathbb{R})$ es orientable si y sólo si n es impar, atendiendo a las observaciones siguientes. Sea $\pi : \mathbb{S}^n \to P_n(\mathbb{R})$ el difeomorfismo local canónico.

(1) Una forma ω de grado n de $P_n(\mathbb{R})$ es una forma de volumen si y sólo si $\pi^*\omega$ es una forma

de volumen de $\mathbb{S}^n$.

(2) Una forma de $\mathbb{S}^n$ del tipo $\pi^*\omega$ es invariante por el difeomorfismo antipodal $f : x \mapsto -x$, y recíprocamente.

(3) El elemento de volumen α de $\mathbb{S}^n$ verifica $f^*\alpha = (-1)^{n+1}\alpha$.

Número 91. Estudiar qué espacios proyectivos $P_n(\mathbb{R})$ son paralelizables.

Número 92. Sea $M \subset \mathbb{R}^k$ una intersección completa de codimensión n. Construir n funciones diferenciables $u_i : M \to \mathbb{R}^k$ tales que los n vectores $u_i(x) \in \mathbb{R}^k$ generen el complemento ortogonal del espacio tangente a M en $x \in M$. Deducir que M es orientable.

Número 93. Demostrar que toda hipersuperficie orientable sin borde $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ es una intersección completa siguiendo las indicaciones siguientes:

(1) El par $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ es localmente difeomorfo al par $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$.

(2) Localmente M siempre tiene una ecuación, que está determinada salvo producto por funciones diferenciables nunca nulas.

(3) Por la orientabilidad, existe una familia de ecuaciones locales f_i cuyos dominios recubren M de manera que todos los cocientes f_i/f_j son positivos.

(4) Dada la familia f_i anterior, y una partición diferenciable de la unidad θ_i, la fórmula $f = f_i \exp\big(\sum_j \theta_j \log(f_j/f_i)\big)$ define bien una ecuación global de M.

Número 94. Se considera en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ la forma de grado 2

$$\sigma = \frac{-xz}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \frac{yz}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + f(x,y,z)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

siendo f una función diferenciable arbitraria. Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ el cilindro de ecuaciones $x^2+y^2 = a^2$, $0 \le z \le b$, y ω la restricción de σ a M.

(1) Calcular directamente $\int_M \omega$ parametrizando M mediante:

$$(\theta, t) \mapsto (a\cos\theta, a\,\mathrm{sen}\,\theta, t).$$

(2) Comprobar que ω es una forma exacta y calcular $\int_M \omega$ mediante el teorema de Stokes. (Obsérvese para empezar que $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ se anula sobre M.)

Número 95. Se considera la forma de grado 2

$$\omega = \frac{1}{z}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y - \frac{1}{y}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + \frac{1}{x}\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z,$$

que está definida en el abierto $xyz \neq 0$ de $\mathbb{R}^3$. Calcular su integral sobre el elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$.

Número 96. Se considera en $\mathbb{R}^3$ la forma diferencial

$$\omega = xf(x)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + (2y - 3yf(x))\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z - 2z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

donde f es una función diferenciable en $x > 0$. Se pide:

(1) Determinar f sabiendo que ω es cerrada, y encontrar entonces otra forma $\alpha = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$

tal que $\mathrm{d}\alpha = \omega$.

(2) Calcular la integral de la restricción de α a la circunferencia del plano $x = a > 0$ de centro el punto $(a, 0, 0)$ y radio r.

(3) Determinar para qué valores $0 < b < a$ es nula la integral de la restricción de ω al tronco de cono $M :\ x^2 = y^2 + z^2,\ b \leq x \leq a$.

Número 97. Calcular la integral de la forma $x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - y^2\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z - 2yz\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ sobre el casquete esférico $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$.

Número 98. Sea $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^3$ la esfera de centro el origen y radio 2, y M el casquete esférico dado por $z \geq 0$. Calcular la integral $\int_M (x^3 + y^3 + z^3)\Omega$, siendo Ω el elemento de volumen de la esfera dada.

Número 99. Sea $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^3$ la esfera de centro el origen y radio ρ, y $\Sigma \subset \mathbb{S}$ el casquete que contiene al polo norte de los dos determinados por el plano $x + z = \rho$. Calcular la integral sobre Σ de la forma diferencial $-\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z - \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$.

Número 100. Calcular la integral de la forma $(x^2+y^2)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$ en el interior del elipsoide $36x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$.

Número 101. Ya sabemos que la forma $\omega = \frac{1}{x^2+y^2}(-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y)$ de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ es cerrada pero no exacta, pero podemos analizar este hecho de otra manera.

(1) Comprobar que $\omega|\mathbb{S}^1$ es el elemento de volumen de $\mathbb{S}^1$.

(2) Si ω fuera exacta, lo sería su restricción a $\mathbb{S}^1$, y por tanto sería nula la integral $\int_{\mathbb{S}^1} \omega = \mathrm{vol}(\mathbb{S}^1)$.

¿Qué método general sugiere esto para producir formas cerradas no exactas en abiertos no simplemente conexos del plano?

Número 102. Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ el difeomorfismo local periódico: $t \mapsto (\cos t, \operatorname{sen} t)$.

(1) Si ω es una 1-forma de $\mathbb{S}^1$, entonces $\varphi^*\omega = g\mathrm{d}t$ para una función g periódica de periodo 2π.

(2) La fórmula $f(t) = \int_0^t g$ define una función diferenciable que cumple $f(t + 2\pi) = f(t) + \int_{\mathbb{S}^1} \omega$.

(3) Si $\int_{\mathbb{S}^1} \omega = 0$, la función f anterior induce otra $h : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ cuya diferencial es precisamente ω.

(4) Deducir de lo anterior que la integral sobre $\mathbb{S}^1$ induce un isomorfismo lineal $\int_{\mathbb{S}^1} : H^1(\mathbb{S}^1) \to \mathbb{R}$.

(5) Concluir que fijada cualquier forma de volumen ω de $\mathbb{S}^1$, toda forma de grado 1 se escribe sobre $\mathbb{S}^1$ como $\lambda\omega + \mathrm{d}f$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ único.

Número 103. Sea $U \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto abierto, equipado con el sistema de coordenadas canónico (x, y, z), y denotemos por $\mathcal{C}$ el conjunto de las funciones diferenciables $U \to \mathbb{R}$. Encontrar isomorfismos naturales

$$\Gamma^0(U) \equiv \mathcal{C}, \quad \Gamma^1(U) \equiv \mathcal{C}^3, \quad \Gamma^2(U) \equiv \mathcal{C}^3, \quad \Gamma^3(U) \equiv \mathcal{C},$$

y describir la sucesión de homomorfismos $0 \to \mathcal{C} \to \mathcal{C}^3 \to \mathcal{C}^3 \to \mathcal{C} \to 0$ inducida por la de la diferencial exterior.

Número 104. Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ una variedad compacta de dimensión 3 con borde una superficie S. Entonces:

$$\int_S a\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - b\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + c\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \int_M \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}\right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z.$$

En particular, la integral es nula si a, b, c son constantes.

Número 105. Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ una superficie compacta con borde una curva C. Entonces:

$$\int_C a\mathrm{d}x + b\mathrm{d}y + c\mathrm{d}z =$$

$$\int_M \left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z}\right) \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - \left(\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x}\right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

En particular, la integral es nula si a, b, c son constantes.

Número 106. Se considera una aplicación diferenciable $f : M = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que no depende de la última variable, y se pretende definir en el espacio afín M una métrica *no estándar* mediante la fórmula

$$\langle (u, \alpha), (v, \beta) \rangle = u \cdot v + f(p)\alpha\beta,$$

para $(u, \alpha), (v, \beta) \in M_p$, $p \in M$. ¿Qué debe cumplir f? Estudiar el campo normal unitario a la esfera $\mathbb{S}^m \subset M$ para esta nueva métrica, y compararlo con el campo normal unitario estándar.

Número 107. Sean $u_1, \dots, u_n$ vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^n$, y sea $R = \{\sum_i \lambda_i u_i : 0 < \lambda_i < 1\}$ el *paralelepípedo abierto* que determinan. Calcular el volumen de R.

Número 108. Calcular el área de la superficie limitada en el cilindro $x^2 + z^2 = r^2$ por los planos $z = ay$ y $z = by$, siendo $a > b > 0$.

Número 109. Calcular el área de la superficie limitada en el cilindro $x^2 + y^2 = ax$ por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Número 110. Calcular el área de la superficie limitada en el cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$ por el plano $z = 0$ y el cono $x^2 + y^2 = z^2$.

Número 111. Se considera la forma diferencial $\omega = -x^2 y\mathrm{d}x + xy^2 \mathrm{d}y$ de $\mathbb{R}^2$, y la circunferencia $C : x^2 + y^2 = r^2$. Calcular $\int_C \omega$. ¿Cómo se debe orientar C para que esa integral sea positiva?

Número 112. Se considera el meridiano C determinado por el plano $x+y+z = 0$ en la esfera $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^3$ de centro el origen y radio ρ. Calcular $\int_C \omega$, siendo $\omega = (y+z)\mathrm{d}x + (x+z)\mathrm{d}y + (x+y)\mathrm{d}z$.

Número 113. Sea $\mathbb{S}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ una esfera de radio ρ y $f : x \mapsto \rho x / \|x\|$ la retracción radial correspondiente. Sea $\mathbb{B}^{m+1} \subset \mathbb{R}^{m+1}$ la bola cerrada de radio también ρ. Se considera la forma

$$\omega = \sum_{1 \le i \le m+1} (-1)^{i-1} x_i \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{m+1},$$

y se pide:

(1) Calcular la diferencial exterior de ω.

(2) Comprobar que $\rho^m\omega/\|x\|^{m+1}$ es la imagen inversa por f de la forma de volumen de la esfera.

(3) Calcular la restricción de ω a la esfera.

(4) Utilizar el teorema de Stokes para deducir la relación

$$\mathrm{vol}(\mathbb{S}^m) = \frac{m+1}{\rho}\mathrm{vol}(\mathbb{B}^{m+1})$$

entre los volúmenes de la esfera y de la bola.

Número 114. Resolver el problema anterior de modo directo escribiendo explícitamente las integrales que proporcionan los volúmenes involucrados.

Número 115. Se considera en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ la forma

$$\omega = \sum_{1\le i\le n} \frac{(-1)^{i-1}x_i}{\|x\|^n}\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

Mostrar que es una forma cerrada, pero no exacta, y concluir que $H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \neq 0$.

Número 116. Se llama *loxodroma* de una esfera $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^3$ de radio ρ a una curva de $\mathbb{S}$ que forma un ángulo constante con los meridianos. Calcular la longitud de una loxodroma arbitraria.

Número 117. Sea $f : M \to N$ una isometría local, M y N variedades orientables compactas conexas sin borde.

(1) Demostrar que f es un difeomorfismo local.

(2) Deducir que localmente f es de la forma $f^{-1}(V) = U_1 \cup \cdots \cup U_r \to V$, donde V es un abierto de N y los U_i son abiertos disjuntos de M.

(3) Demostrar que el número r de la descripción anterior es un invariante de f.

(4) Probar que puede elegirse V para que cada restricción $U_i \to V$ sea una isometría y por tanto conserve salvo signo el elemento de volumen.

(5) Concluir que $\mathrm{vol}(M) = r \cdot \mathrm{vol}(N)$.

Número 118. Sean $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ dos circunferencias de radios ρ_1 y ρ_2 respectivamente, y $T = \mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_2 \subset \mathbb{R}^4$.

(1) Definir dos aplicaciones diferenciables $u_i : T \to \mathbb{R}^4$ tales que para cada punto $a \in T$, los vectores $u_1(a), u_2(a) \in T_a$ sean ortonormales. Definir mediante ellos una orientación en T.

(2) Utilizar la isometría local natural

$$\mathbb{R}^2 \to T : (s,t) \mapsto \big(\rho_1 \cos\frac{s}{\rho_1}, \rho_1 \operatorname{sen}\frac{s}{\rho_1}, \rho_2 \cos\frac{t}{\rho_2}, \rho_2 \operatorname{sen}\frac{t}{\rho_2}\big)$$

para integrar el elemento de volumen Ω de T sin conocerlo explícitamente.

(3) Construir dos aplicaciones diferenciables $v_i : T \to \mathbb{R}^4$ de modo que el elemento de volumen de T sea

$$\Omega_a(w_1, w_2) = \det(v_1(a), w_1, v_2(a), w_2)$$

para $w_i \in T_a$, $a \in T$.

(4) Encontrar una forma diferencial ω en $\mathbb{R}^4$ cuya restricción a T sea Ω.

Ilustrar mediante los resultados anteriores la afirmación: *el elemento de volumen del producto es el producto de los elementos de volumen.*

Número 119. Sea M una variedad de dimensión m compacta orientable y con borde.

(1) Demostrar que si una aplicación diferenciable $f : \partial M \to N$, $\dim N = m-1$, tiene una extensión diferenciable $F : M \to N$, entonces $\int_{\partial M} f^*\omega = 0$ para toda forma diferencial ω de grado $m-1$ de N.

(2) Deducir que ∂M no puede ser retracto de M: no existen aplicaciones diferenciables $\rho : M \to \partial M$ de modo que $\rho|\partial M$ sea la identidad.

Número 120. La versión diferenciable del *teorema del punto fijo de Brouwer* dice que cualquier aplicación diferenciable de una bola cerrada $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^k$ en sí misma tiene algún punto fijo. Deducir este hecho utilizando el problema anterior, observando que si $f : M = \mathbb{B} \to M$ no tiene puntos fijos, entonces la aplicación

$$\rho : M \to \partial M : x \mapsto \rho(x) = f(x) + \lambda(f(x) - x),$$

donde λ es el número positivo tal que $\rho(x) \in M$, es diferenciable.

Número 121. Sea $T \subset \mathbb{R}^3$ el toro de revolución cuyos radios interior y exterior son, respectivamente, ρ_1 y ρ_2.

(1) Encontrar una ecuación global de T.

(2) Construir un campo normal unitario $v : T \to \mathbb{R}^3$, y utilizarlo para expresar el elemento de volumen Ω de T.

(3) Definir un difeomorfismo local suprayectivo $\varphi : \mathbb{R}^2 \to T$.

(4) Calcular $\varphi^*\Omega$.

(5) Calcular el área de T.

Número 122. Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ la superficie topográfica definida por una función diferenciable $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, y sea $\varphi : U \to M$ el difeomorfismo correspondiente. Demostrar que si el gradiente de f tiene norma constante, entonces el cociente

$$\frac{\text{área}(\varphi(A))}{\text{área}(A)}$$

es independiente del conjunto $A \subset U$ considerado. (Calcular ese cociente en función del valor constante del gradiente.)

Número 123. Sea f una función diferenciable y estrictamente positiva en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Denotamos por $M \subset \mathbb{R}^3$ a la superficie de revolución generada por la curva $x = f(z), y = 0$ alrededor del eje $x = y = 0$, y por $N \subset \mathbb{R}^3$ al sólido de revolución generado por $0 \leq x \leq f(z), y = 0$ alrededor de ese mismo eje. Demostrar las siguientes afirmaciones:

(1) N es una variedad con borde $\partial N = M$.

(2) El área de M es igual a $2\pi \displaystyle\int_I f(t)\sqrt{1 + f'(t)^2}\mathrm{d}t$.

(3) El volumen de N es igual a $\pi \displaystyle\int_I f(t)^2\mathrm{d}t$.

Número 124. Mostrar que toda curva (de longitud) finita es acotada, pero no recíprocamente.

Número 125. Estimar el área de la superficie de revolución $M \subset \mathbb{R}^3$ definida por la función $f(t) = 1/t^2$, $t > 1$, y concluir que *una superficie no acotada puede ser finita.*

Número 126. Sean M y N la superficie y el sólido de revolución definidos por la función $f(t) = 1/t$, $t > 1$. Calcular el área de M y el volumen de N para concluir que *una superficie infinita puede envolver un volumen finito.*

Número 127. Sea $M \subset \mathbb{R}^k$ una variedad diferenciable compacta de dimensión m, y $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ una homotecia de razón λ. Demostrar que si Ω es la forma de volumen de M, y Ω_λ la de su imagen $\lambda(M)$, entonces $\lambda^m \Omega = f^* \Omega_\lambda$.

Número 128. Demostrar que una isometría transforma geodésicas en geodésicas.

Número 129. Sea $M \subset \mathbb{R}^k$ una variedad riemanniana.

(1) Sea $c : [a,b] \to M$ una parametrización geodésica. Como se sabe, la derivada de la expresión $\langle \partial c/\partial t, \partial c/\partial t \rangle$ es nula, luego $\|\partial c/\partial t\|$ es constante, digamos λ, y concluimos que $t \mapsto c(t/\lambda)$ es una reparametrización por la longitud de arco.

(2) Si dos parametrizaciones geodésicas $c_1 : [a_1, b_1] \to M$ y $c_2 : [a_2, b_2] \to M$ tienen la misma imagen, entonces difieren en un cambio afín: $c_2(t) = c_1(\alpha t + \beta)$ para ciertas constantes α y β.

(3) Una curva de M, es decir, una variedad $C \subset M$ de dimensión 1, se llama geodésica si puede cubrirse con parametrizaciones geodésicas $c : [a,b] \to C \subset M$. Esto equivale a que las parametrizaciones de C por la longitud de arco sean geodésicas.

De esta manera la noción de geodésica resulta de naturaleza intrínseca, es decir, no depende de parametrizaciones. Nótese que una curva geodésica tiene muchísimas parametrizaciones no geodésicas.

Número 130. Describir las geodésicas del cilindro $x^2 + y^2 = 1$. ¿Cuántas geodésicas conectan dos puntos dados?

Número 131. El mismo problema para el cono $x^2 + y^2 = z^2$, $z > 0$.

Número 132. Demostrar que las geodésicas de una esfera son sus meridianos.

Número 133. Sea M una variedad diferenciable y X un campo tangente. Demostrar que las curvas integrales de X son geodésicas si y sólo si $\nabla_X X = 0$.

Número 134. Construir campos tangentes globales no nulos X en $\mathbb{S}^1$ y $\mathbb{S}^3$ que $\nabla_X X = 0$ y demostrar que un tal campo no existe en $\mathbb{S}^2$.

Número 135. Sea M una superficie diferenciable localmente isométrica al plano afín, y X un campo tangente. Demostrar que las curvas integrales de X son geodésicas si y sólo si existen parametrizaciones de M respecto de las cuales $X = f(x)\frac{\partial}{\partial y}$.

Número 136. Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ una superficie de revolución generada alrededor de un eje E, y consideremos un campo tangente global nunca nulo X de M perpendicular a E. Dada una parametrización $c(s)$ por la longitud del arco, que no es tangente a los paralelos, denotamos por $\tau(s)$ su campo tangente, y consideramos las dos funciones $d(s)$ = distancia de $c(s)$ al eje

E, y $\theta(s) =$ ángulo formado por $\tau(s)$ y $X(c(t))$. Demostrar el *teorema de Clairaut*: $c(t)$ es una geodésica si y sólo si la función $d(s)\cdot\cos\theta(s)$ es constante.

Número 137. Sea M el conjunto de las matrices ortogonales

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4, \qquad A \cdot A^t = I,$$

y sean M_+ y M_- los subconjuntos definidos respectivamente por $\det A > 0$ y $\det A < 0$. Se pide:

(1) Mostrar que M es una variedad diferenciable, expresándola mediante el número adecuado de ecuaciones implícitas.

(2) Definir dos difeomorfismos locales periódicos φ_+ y φ_- de $\mathbb{R}$ sobre M_+ y M_- respectivamente.

(3) Deducir que M_+ y M_- son las dos componentes conexas de M, ambas difeomorfas a la circunferencia $\mathbb{S}^1$.

(4) Observar que M está contenida en el toro plano $T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$, y demostrar que, convenientemente parametrizada, M es una geodésica de ese toro.

(5) Mostrar que $T \setminus M$ tiene dos componentes conexas U y V de igual área.

(6) Comprobar que la forma $\alpha = \frac{1}{2}(yuv\mathrm{d}x - xuv\mathrm{d}y + xyv\mathrm{d}u - xyu\mathrm{d}v)$ es en el toro T una primitiva de la forma $\omega = xv\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}u - yu\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}v$.

(7) Utilizar el teorema de Stokes para mostrar, sin calcularlas explícitamente, que las dos integrales $\int_U \omega$ e $\int_V \omega$ son nulas.

Número 138. Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ el hiperboloide $x^2 + y^2 = z^2 + 1$, $0 \leq z \leq 1$, y considérese la forma diferencial $\omega = -2\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + x\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z$. Se pide:

(1) Encontrar una primitiva α de ω.

(2) Calcular $\int_M \omega$ y $\int_{\partial M} \alpha$.

(3) Elegir una orientación de M para que esas dos integrales sean positivas.

(4) Calcular el campo normal unitario consistente con la orientación anterior.

Número 139. Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ la esfera de ecuación $x^2+2x+y^2+z^2 = 0$, y $N \subset \mathbb{R}^3$ el paraboloide $u + v^2 + w^2 = 0$. Se considera la aplicación

$$\varphi : (x, y, z) \mapsto (u, v, w) = \big(1+\frac{2}{x}, \frac{y}{x}, \frac{z}{x}\big).$$

Se pide:

(1) Encontrar un punto p_0 de M tal que φ induzca un difeomorfismo del abierto $U = M\setminus\{p_0\}$ sobre N.

(2) Calcular una base $\{u_1, u_2\}$ del espacio tangente a M en un punto arbitrario $p \in U$.

(3) Calcular $\langle u_1, u_2\rangle_p$ y $\langle \varphi_*(u_1), \varphi_*(u_2)\rangle_{\varphi(p)}$, siendo como antes p un punto arbitrario de U.

(4) ¿Es $\varphi : U \to N$ una isometría?, ¿y su restricción a algún abierto adecuado?

Número 140. Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ el tronco de paraboloide definido por $x^2 + y^2 = 2az$, $z \leq b$, $a, b > 0$.

(1) Demostrar que M es una variedad diferenciable con borde.

(2) Orientar M de modo que $(0, 0, -1)$ sea el vector normal unitario consistente con la orientación en el origen. ¿Qué orientación se induce así en el borde de M?

(3) Demostrar que sobre M las formas diferenciales $\mathrm{d}z$ y $\frac{1}{a}(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)$ coindiden, y usar esto para encontrar una forma $f(x,y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ cuya restricción a M sea el elemento de volumen.

(4) Buscar una primitiva de la forma $f(x,y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ encontrada anteriormente.

(5) Utilizar el teorema de Stokes para expresar el área de M como una integral de una variable real, y calcularla.

(6) Concluir que para ciertos valores de a y b el área de M coincide con la del disco obtenido al proyectar ortogonalmente sobre el plano $z=0$. ¿Significa esto que para esos valores la proyección ortogonal sea una isometría?

Número 141. Sea $\mathbb{S}^2\subset\mathbb{R}^3$ la esfera estándar y $M\subset\mathbb{S}^2$ el abierto complementario de los polos norte y sur. Demostrar que la aplicación

$$(x,y,z)\mapsto\Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},z\Big)$$

define un difeomorfismo f de M sobre un cilindro. ¿Es alguna derivada d_af, $a\in M$, una isometría?

Número 142. Sea $M\subset\mathbb{R}^k$ una variedad riemanniana, y $f:M\to\mathbb{R}$ una función diferenciable. Se define el gradiente $\mathrm{grad}(f)$ como el campo tangente que cumple $Y(f)=\langle Y,\mathrm{grad}(f)\rangle$ para cualquier otro campo Y.

(1) Demostrar que el gradiente es un campo tangente diferenciable bien definido. ¿Cuál es su expresión en coordenadas locales?

(2) Demostrar que se cumple $XY(f)-\nabla_XY(f)=\langle\nabla_X\mathrm{grad}(f),Y\rangle$.

Número 143. Sea $M\subset\mathbb{R}^k$ una variedad diferenciable con la métrica riemanniana canónica y la correspondiente conexión riemanniana. Para cada campo Z se define una forma diferencial ω de grado 2 mediante la regla:

$$\omega(X,Y)=\langle\nabla_XZ,Y\rangle-\langle\nabla_YZ,X\rangle.$$

(1) Probar que en efecto esta definición es correcta (es decir, que $\omega(X,Y)$ es una función diferenciable para cualesquiera dos campos diferenciables X,Y).

(2) Encontrar una expresión para ω que no involucre la conexión.

(3) Encontrar los coeficientes de ω en un sistema local de coordenadas.

(4) Estudiar cuándo es ω cerrada y cuándo exacta.

Número 144. Sea $M\subset\mathbb{R}^3$ la superficie de ecuación $x^2=y^2+z^2+1$, y sea β la forma bilineal de $\mathbb{R}^3$ definida por $\beta(p,p')=-xx'+yy'+zz'$.

(1) Demostrar que las restricciones de β a los espacios tangentes a M, definen una métrica riemanniana g en M.

(2) Demostrar que $u=y/x, v=z/x$ es un sistema de coordenadas de M.

(3) Calcular los símbolos de Christoffel de g para el sistema de coordenadas anterior.

Número 145. ¿Existe en el plano afín $\mathbb{R}^2$ alguna conexión riemanniana cuyos símbolos de Christoffel no nulos (en coordenadas canónicas) sean exactamente $\Gamma^1_{12}=\Gamma^1_{21}=1$?

Número 146. Sea $M\subset\mathbb{R}^2$ el abierto del plano afín dado por la condición $x>0$.

(1) Encontrar todas las métricas riemannianas (no estándar) g de M cuya conexión rieman-

niana tenga el símbolo de Christoffel $\Gamma_{11}^1 = -1/x$ y todos los demás nulos.

(2) Comprobar que el tensor de curvatura de esa conexión es idénticamente nulo.

(3) Construir una isometría de (M, g) sobre (M, g_s), siendo g_s la métrica riemanniana estándar.

(4) Calcular las geodésicas de (M, g).

Número 147. Sea $M \subset \mathbb{R}^2$ el abierto $y > 0$.

(1) Encontrar todas las métricas riemannianas (no estándar) de M tales que la conexión riemanniana correspondiente tenga por símbolos de Christoffel no nulos los siguientes:

$$\Gamma_{11}^2 = -\Gamma_{12}^1 = -\Gamma_{21}^1 = -\Gamma_{22}^2 = 1/y.$$

(2) Calcular la curvatura riemanniana de todas ellas y deducir que no hay dos isométricas.

(3) Encontrar en cada punto (x, y) una geodésica del tipo $c(t) = (x, y\varphi(t))$, y obtener un campo global X nunca nulo tal que $\nabla_X X = 0$.

Número 148. Se considera una superficie topográfica $M \subset \mathbb{R}^3$, grafo de la función diferenciable $z = f(x, y)$ definida en un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$. Utilizar la parametrización natural $(x, y) \mapsto (x, y, f(x, y))$ para calcular:

(1) Los símbolos de Christoffel de M.

(2) Las ecuaciones de las geodésicas de M.

Número 149. El paraboloide de ecuación $M : z = x^2 + y^2$ es evidentemente una superficie topográfica, de modo que el problema anterior nos proporciona las ecuaciones de las geodésicas de M. Consideramos ahora un *meridiano* m de M, es decir, una curva $m = M \cap \{ax + by = 0\}$, y procedemos del modo siguiente:

(1) La parametrización más simple de m es $x = \lambda t$, $y = \mu t$, $z = t^2$, siendo (λ, μ) un vector unitario paralelo a la recta $ax + by = 0$ del plano (x, y). ¿Verifica esta parametrización las ecuaciones de las geodésicas?

(2) Más generalmente, podemos parametrizar m mediante

$$x = \lambda\varphi(t),\ y = \mu\varphi(t),\ z = \varphi(t)^2,$$

siendo φ una función diferenciable. Encontrar φ para que se verifiquen las ecuaciones de las geodésicas.

Observar por tanto que ser geodésica es en principio una propiedad de la parametrización, más que de la curva como variedad.

Número 150. Sea $P_1(\mathbb{R})$ la recta proyectiva real, en la que tomamos coordenadas homogéneas $(t_0 : t_1)$, y consideramos la aplicación

$$f : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3 : (t_0 : t_1) \mapsto (x, y, z) = \left(\frac{t_0^2}{t_0^2 + t_1^2}, \frac{\sqrt{2}t_0 t_1}{t_0^2 + t_1^2}, \frac{t_1^2}{t_0^2 + t_1^2}\right).$$

(1) Demostrar que f es un homeomorfismo sobre su imagen M.

(2) Comprobar que M es una circunferencia contenida en el cilindro

$$C : (2x - 1)^2 + 2y^2 = 1.$$

(3) Encontrar una forma diferencial de $\mathbb{R}^3$, ω, cuya restricción a M sea la forma de volumen de M.

(4) Parametrizar M mediante una aplicación $\sigma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, y comprobar que la longitud de M es $\int_0^{2\pi} \sigma^*\omega = \sqrt{2}\pi$.

(5) Parametrizar el cilindro C del apartado (2), y calcular sus símbolos de Christoffel, y las correspondientes ecuaciones de las geodésicas.

(6) Decidir utilizando las ecuaciones anteriores si M es una curva geodésica de C. ¿Era esperable este resultado?

Número 151. Sea $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ la esfera estándar, y c la parametrización $c(t) = (\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen} t, \frac{1}{\sqrt{2}})$ del paralelo $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Estudiar el transporte paralelo a lo largo de c.

Número 152. Sea $\pi : \mathbb{S}^2 \to P_2(\mathbb{R}) : (x_0, x_1, x_2) \mapsto (x_0 : x_1 : x_2)$ el difeomorfismo local canónico de la esfera sobre el plano proyectivo.

(1) Demostrar que existe una (única) estructura riemanniana g en $P_2(\mathbb{R})$ tal que π sea una isometría local.

(2) Determinar la matriz de g en el sistema local de coordenadas $x = x_1/x_0, y = x_2/x_0$.

(3) Haciendo el cambio de coordenadas $x = t\cos\theta, y = t\operatorname{sen}\theta$, calcular la matriz de g respecto de las nuevas coordenadas t, θ, así como los símbolos de Christoffel de la conexión riemanniana correspondiente.

(4) Comprobar que las parametrizaciones $\theta =$cte son geodésicas.

(5) Concluir que las curvas geodésicas del plano proyectivo con la métrica riemanniana elegida son las rectas proyectivas.

(6) ¿Es posible concluir lo anterior sin hacer cálculo alguno?

Número 153. Desde el punto de vista local, toda variedad riemanniana es isométrica al espacio afín dotado de una cierta métrica riemanniana $g = (g_{ij})$.

(1) Demostrar que si las parametrizaciones $t \mapsto a + tu$ son geodésicas de g, entonces todos los símbolos de Christoffel son cero.

(2) Demostrar que si los símbolos de Christoffel son todos nulos, la métrica es constante, y, por tanto, isométrica a la estándar.

Número 154. Existen métricas riemannianas en $\mathbb{R}^m$, distintas de la estándar, con la propiedad de ser las rectas sus curvas geodésicas.

(1) Dada una tal (g_{ij}), parametrizar cada recta afín por la longitud de arco: $c(t) = a + \varphi(t)u$, mostrando que φ depende diferenciablemente de a, u.

(3) Escribir las ecuaciones de las geodésicas y que $c(t)$ las verifica.

(4) Utilizando las ecuaciones anteriores para vectores u particulares, deducir que son cero todos los símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k con $k \neq i, j$, y que para los restantes se verifica $\Gamma_{kk}^k = 2\Gamma_{ik}^i$.

(5) Combinar todo lo anterior para caracterizar la propiedad considerada mediante la igualdad

$$\sum_{ijk} g_{ij}\Gamma_{kk}^k u_i u_j u_k = \sum_{ijk} \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} u_i u_j u_k,$$

válida como polinomios homogéneos en u.

Número 155. Ya sabemos como dotar al plano proyectivo de una métrica riemanniana de modo que sus curvas geodésicas sean las rectas proyectivas.

(1) Deducir que las coordenadas afines obtenidas haciendo 1 una coordenada homogénea tienen la propiedad de tener las rectas por curvas geodésicas.

(2) Comprobar esto computacionalmente mediante el criterio del númnero anterior.

Número 156. Sea $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^{m+1}$ una esfera de centro el origen y radio arbitrario. Fijamos un punto $a \in \mathbb{S}$ y consideramos la proyección cónica p desde el origen sobre el hiperplano afín tangente $a_1x_1 + \cdots + a_{m+1}x_{m+1} = 1$.

(1) Esa proyección p es un sistema de coordenadas con dominio la semiesfera abierta $\mathbb{S} \cap \{a_1x_1 + \cdots + a_{m+1}x_{m+1} > 0\}$, pero p no es una isometría.

(2) Definir usando p una métrica riemanniana no estándar (g_{ij}) en $\mathbb{R}^m$.

(3) Usando un problema precedente, comprobar que esa métrica tiene las rectas por curvas geodésicas.

(4) ¿Eran necesarios todos estos cálculos para concluir eso?

Número 157. Sea $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ la circunferencia de centro el origen y radio 1, y consideremos el punto $a = (1, 0)$. Probar que la aplicación exponencial $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ es precisamente $t \mapsto e^{it}$. Dar una interpretación similar para la aplicación exponencial $\exp_{(1,0,0)}$ de la esfera $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$.

Número 158. Fijemos un punto $a \in \mathbb{S}^m$, la esfera estándar, y sea H el hiperplano tangente a la esfera en ese punto. Demostrar que la aplicación exponencial está definida en todo H e induce un difeomorfismo de la bola $\mathbb{B}^m \subset H$ de centro el origen y radio π sobre toda la esfera menos el punto antipodal de a.

Número 159. Sea M una variedad diferenciable y e la aplicación exponencial correspondiente. Demostrar que: $(x, u) \to (x, e(u))$ define un difeomorfismo local de un entorno abierto Ω de la sección cero $M \times 0$ del fibrado tangente de M sobre otro W de la diagonal de $M \times M$.

Número 160. Sea $M \subset \mathbb{R}^k$ una hipersuperficie y τ una isometría de $\mathbb{R}^k$ que deja invariante M. Entonces $\sigma = \tau|M$ es una isometría de la hipersuperficie que denominaremos *isometría ambiente de M*.

(1) Demostrar que σ conserva salvo signo el operador de Weingarten:

$$L_{\sigma(a)} \circ \sigma_{*,a} = \pm\sigma_{*,a} \circ L_a.$$

(2) Deducir que una isometría ambiente conserva salvo signo todas las curvaturas.

Número 161. Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ una superficie compacta (orientada); sean K y H las curvaturas de Gauss y media, que son funciones diferenciables en M.

(1) El conjunto cerrado $H^2 - 4K = 0$ es el conjunto O de los puntos umbílicos de M.

(2) Las funciones

$$k_1 = \frac{1}{2}(H - \sqrt{H^2 - 4K}) \leq k_2 = \frac{1}{2}(H + \sqrt{H^2 - 4K})$$

son las curvaturas principales de M.

(3) Sea $(x, y) : U \to \mathbb{R}^2$ un sistema de coordenadas de $M \setminus O$, y considérese la referencia móvil $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$. Ortogonalizando esta referencia y diagonalizando la aplicación de Weingarten, definir en U una referencia móvil ortonormal X_1, X_2 tal que X_i sea un vector principal de autovalor k_i.

Número 162. Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ la superficie de revolución generada por la curva $x = f(z), y = 0$ alrededor del eje $x = y = 0$.

(1) Demostrar que los paralelos y los meridianos son *líneas de curvatura*, es decir, sus tangentes son direcciones principales de M.

(2) Calcular las curvaturas principales de M, y determinar sus puntos umbílicos.

(3) Calcular la curvatura de Gauss y la curvatura media de M.

(4) Según los apartados anteriores, todas las curvaturas son constantes a lo largo de los paralelos. Deducir esto usando las isometrías ambiente de la superficie.

Número 163. Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ del toro de revolución generado por la circunferencia $(x-b)^2+z^2 = a^2$, $y = 0$, al girar alrededor del eje de las z's $(b > a > 0)$.

(1) Describir la cara interior de M como una superficie de revolución, y utilizar el ejercicio anterior para calcular todas las curvaturas en esa cara.

(2) Repetir el metodo para la cara exterior, eligiendo cuidadosamente la orientación, que afecta a las curvaturas principales.

(3) Encontrar una ecuación implícita de M y usar su gradiente para calcular todas las curvaturas de M a lo largo de los dos paralelos extremos $z = \pm a$ de M.

(4) Utilizando la propiedad de que el plano tangente al toro es constante a lo largo de los dos paralelos extremos, deducir que ambos son líneas de curvatura, y que la curvatura principal correspondiente es nula.

(5) Comprobar que M no tiene puntos umbílicos.

(6) Confirmar con todo lo anterior que todas las curvaturas de M son funciones diferenciables.

Número 164. Sea M una superficie orientada de $\mathbb{R}^3$ y $\Omega \subset M$ el complementario del cerrado de puntos umbílicos. Para cada punto $a \in \Omega$ sean $\ell_i(a)$, $i = 1, 2$ las dos direcciones principales en a. Demostrar que las aplicaciones $\ell_i : \Omega \to P_2(\mathbb{R})$ son diferenciables. Las aplicaciones de este tipo se denominan campos de direcciones tangentes. Así, aunque dos vectores principales unitarios orientados positivamente no definen necesariamente una referencia móvil en todo Ω, pues sólo están determinados salvo un giro de angulo π, sí definen dos direcciones tangentes independientes.

Número 165. Demostrar las siguientes afirmaciones, que muestran la enorme frecuencia con que aparecen los puntos umbílicos.

(1) Por lo que se vió en un número anterior sobre puntos umbílicos, una superficie compacta orientable que carezca de ellos admite un campo global de direcciones tangentes, y por un teorema de topología diferencial (Poincaré-Hopf), debe tener género 1 y ser difeomorfa a un toro.

(2) Por supuesto, hay toros con puntos umbílicos: cualquier producto de dos circunferencias es un toro localmente planos; sin embargo, tal toro no es isométrico a ninguna superficie de $\mathbb{R}^3$.

(3) Cualquier superficie puede deformarse localmente para que tenga un abierto isométrico a un trozo de plano o de superficie esférica, apareciendo de esta manera puntos umbílicos.

(4) Los toros de revolución del número anterior carecen de puntos umbílicos, pero muchos otros los tienen: por ejemplo, si se hace girar una elipse en lugar de una circunferencia, ¿pueden no aparecer umbílicos?

Número 166. Sea $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ una hipersuperficie, y $Z : U \to \mathbb{R}^{m+1}$ una aplicación diferenciable definida en un entorno abierto U de M, y cuya restricción a M es un campo normal nunca nulo. Entonces, tal vez reduciendo U, la aplicación $\nu = Z/\|Z\| : U \to \mathbb{R}^{m+1}$ es también diferenciable, y su restricción a M es un campo normal unitario. Los siguientes apartados describen un procedimiento para calcular los puntos umbílicos de M. Sea $a \in M$.

(1) Un vector u tangente a M en a es un vector principal si y sólo si los dos vectores u y $v = D\nu(a)(u)$ son linealmente dependientes.

(2) La condición anterior se expresa por ser 1 el rango de la matriz (u, v), y como v es también un vector tangente a M en a, lo anterior equivale a que sea 2 el rango de la matriz $(u, v, Z(a))$.

(3) Derivando la igualdad $Z = \|Z\|\nu$ se deduce que $DZ(a)(u) = \|Z(a)\|v + \alpha Z(a)$, luego $(u, v, Z(a))$ tiene rango 2 si y sólo si lo tiene $(u, DZ(a)(u), Z(a))$.

(4) La matriz última $(u, DZ(a)(u), Z(a))$ tiene orden $(m+1) \times 3$, por lo que la condición de que su rango sea 2 se expresa con $m-1$ ecuaciones $q_i(a, u) = 0$ cuadráticas homogéneas en las $m+1$ variables u, con coeficientes funciones diferenciables de las variables a.

(5) El punto a es umbílico si y sólo si todos los vectores tangentes u cumplen las condiciones anteriores, es decir, si y sólo si la ecuación del hiperplano tangente $\langle Z(a), u\rangle = 0$ es un factor de todas las ecuaciones $q_i = 0$ anteriores.

Todo lo anterior proporciona un método de cálculo de los puntos umbílicos de la hipersuperficie M.

Número 167. Sea $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ una hipersuperficie conexa orientada, cuyas normales concurren todas en un punto c.

(1) Demostrar que la aplicación $x \mapsto \frac{x-c}{\|x-c\|}$ induce en M un campo normal unitario (tal vez excluyendo c pues no sabemos a priori si $c \in M$).

(2) Usar lo anterior para comprobar que el operador de Weingarten L_a, $a \in M$, $a \neq c$, es una homotecia de razón $1/\|a-c\|$.

(3) Deducir que todos los puntos $a \in M$, $a \neq c$, son umbílicos.

(4) Concluir que M es un subconjunto abierto de una esfera de centro c.

Número 168. Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ de radios $a \geq b \geq c > 0$.

(1) Calcular la curvatura de Gauss K.

(2) Expresar $K(p)$ en función de la distancia $h(p)$ al origen del plano afín tangente M_p a M en p.

(3) Determinar los puntos de curvatura extrema.

(4) Calcular las curvas $K =$cte.

(5) Obtener los puntos umbílicos de M: cuatro si todos los radios son distintos, dos si coinciden dos radios (elipsoide de revolución), todos si coinciden los tres (esfera).

Número 169. Sea M el paraboloide elíptico $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$.

(1) Calcular su curvatura de Gauss K y sus valores extremos.

(2) Calcular las curvas $K =$cte.

(3) Obtener los puntos umbílicos de M: dos si $a \neq b$, uno en otro caso (superficie de revolución).

Número 170. Sea M el hiperboloide elíptico $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} - 1$.

(1) Calcular la curvatura de Gauss K y expresarla en función de la distancia del plano afín tangente al origen.

(2) Determinar los puntos de curvatura extrema y las curvas K =cte.
(3) Calcular los puntos umbílicos de M.

Número 171. Sea M el paraboloide hiperbólico $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$.
(1) Calcular la curvatura de Gauss K, sus valores extremos y las curvas K =cte.
(2) Calcular las lineas de curvatura y las curvaturas principales.
(3) Comprobar que M no tiene puntos umbílicos.

Número 172. Hacer para el hiperboloide hiperbólico $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} + 1$ lo mismo que para el paraboloide hiperbólico. ¿Cómo se pueden explicar las similitudes de ambas superficies?

Número 173. Sea M las superficie de $\mathbb{R}^3$ de ecuación $x^2 + y^4 + z^4 = 1$. Se pide:
(1) Calcular la aplicación de Weingarten en función de las coordenadas (x, y, z) de los puntos de M.
(2) Calcular la curvatura de Gauss K de M y mostrar que es siempre ≥ 0.
(3) Mostrar que los puntos de curvatura $K = 0$ son los de las dos curvas planas $M \cap \{y = 0\}$ y $M \cap \{z = 0\}$.
(4) ¿Es M isométrica a una superficie de revolución?
(5) Encontrar los diez puntos umbílicos de M.

Número 174. Sea $M \subset \mathbb{R}^4$ la hipersuperficie de ecuación $2(u + v) = x^2 + y^2$. Denotamos por $\pi : M \to \mathbb{R}^3 : (u, v, x, y) \mapsto (v, x, y)$ la proyección lineal canónica, que es un sistema global de coordenadas de M. Se pide:
(1) Calcular la aplicación de Weingarten de M, derivando un campo normal unitario.
(2) Comprobar que la curvatura de Gauss de M es idénticamente nula.
(3) Comprobar que hay dos curvaturas principales no nulas, dadas respectivamente por las fórmulas

$$k_1 = \frac{-2}{\sqrt{(2 + 2u + 2v)^3}} \quad \text{y} \quad k_2 = \frac{-1}{\sqrt{2 + 2u + 2v}}.$$

(4) ¿Tiene M puntos umbílicos? ¿Tienen extremos las curvaturas principales no nulas?
(5) Calcular la expresión matricial (g_{ij}) de la métrica riemanniana de M en el sistema de coordenadas definido por π.
(6) Se considera la parametrización $\sigma(t) = (\frac{1}{2}(1 - 2t + 2t^2), 0, 1 - t, t)$ que une los puntos $a = (\frac{1}{2}, 0, 1, 0)$ y $b = (\frac{1}{2}, 0, 0, 1)$ de M. ¿Se trata de una parametrización geodésica?

Número 175. Explicar cómo la curvatura de Gauss de una superficie de $\mathbb{R}^3$ está bien definida, aunque la superficie no sea orientable.

Número 176. Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ la banda de Möbius imagen de la aplicación

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \cos x \\ \operatorname{sen} x \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} \cos x & -\operatorname{sen} x & 0 \\ \operatorname{sen} x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(x/2) \\ 0 \\ \operatorname{sen}(x/2) \end{pmatrix}.$$

(1) Calcular la curvatura de Gauss de M.
(2) ¿Es M la banda de Möbius que se construye manualmente con papel y cinta adhesiva?

Número 177. Sea $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ una hipersuperficie compacta, conexa y orientada, y sea $\mathbb{S}^m$ la esfera unidad orientada como borde de la bola unidad. Sea $\nu : M \to \mathbb{S}^m$ el campo normal unitario consistente con la orientación fijada en M. Sean Ω y Ω' los elementos de volumen de M y $\mathbb{S}^m$ respectivamente. Sea $a \in M$.

(1) El hiperplano H tangente a M en a coincide con el hiperplano tangente a $\mathbb{S}^m$ en $\nu(a)$.

(2) La orientación de H como hiperplano tangente a M en a coincide con su orientación como hiperplano tangente a $\mathbb{S}^m$ en $\nu(a)$.

(3) Las formas Ω_a y $\Omega'_{\nu(a)}$ coinciden ambas con la restricción a H de la forma $\det(\nu(a), \cdot)$.

(4) Utilizar el teorema del determinante para deducir

$$\nu^*\Omega' = K\Omega,$$

siendo K la curvatura de Gauss de M.

Número 178. Hacer el mismo problema anterior computando explícitamente según las siguientes indicaciones. Sea $a \in M$.

(1) Si $K(a) \neq 0$, elegimos sistemas de coordenadas $x : U \to \mathbb{R}^m$ de M en a, $y : V \to \mathbb{R}^m$ de $\mathbb{S}^m$ en $\nu(a)$ tales que $y \circ \nu = x$ y el signo ε de K en U es constante.

(2) Si L denota al operador de Weingarten en el punto a, se verifica $L(\partial/\partial x_i) = \partial/\partial y_i$, $1 \leq i \leq m$, y se deduce que ν conserva la orientación (en U) si y sólo si $\varepsilon = 1$.

(3) Usando las parametrizaciones $\varphi = x^{-1}$, $\psi = y^{-1}$, calcular $\varphi^*\Omega$ y $\varphi^*(\nu^*\Omega_{\mathbb{S}}) = \psi^*\Omega_{\mathbb{S}}$ para obtener en U la fórmula deseada.

(4) Concluir que $\nu^*\Omega_{\mathbb{S}} = K\Omega$ en $K \neq 0$.

(5) Si $K(a) = 0$, entonces $(\nu^*\omega)_a = 0$ para cualquier forma ω de grado máximo.

Número 179. Sea $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ una hipersuperficie compacta conexa orientada, Ω su elemento de volumen y K su curvatura de Gauss. La *curvatura total* de M es la integral $\int_M K\Omega$.

(1) Demostrar que si no hay puntos de curvatura cero, entonces la curvatura total es

$$\pm\mathrm{vol}(\mathbb{S}^m) = \begin{cases} \dfrac{2^{n+1}\pi^n}{3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} & \text{para } \ m = 2n \\[2ex] \dfrac{2^{n+1}\pi^{n+1}}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} & \text{para } \ m = 2n+1 \end{cases}$$

(2) Deducir que la esfera de radio ρ es la hipersuperficie que minimiza el volumen entre todas las que cumplen $0 < |K| \leq 1/\rho^m$. En particular, el volumen se minimiza cuando la curvatura se maximiza.

Número 180. Se considera el plano proyectivo $P_2(\mathbb{R})$ dotado de la métrica riemanniana para la que la proyección canónica $\mathbb{S}^2 \to P_2(\mathbb{R})$ es una isometría local.

(1) Calcular la curvatura de Gauss de $P_2(\mathbb{R})$.

(2) Aunque $P_2(\mathbb{R})$ no sea orientable, ¿cúal debe ser su volumen? ¿y su curvatura total?

Número 181. Sea $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^2$ una circunferencia. Se pide:

(1) Utilizando la distancia geodésica sobre la circunferencia, demostrar que una isometría de $\mathbb{S}$ que deja dos puntos fijos no antipodales es la identidad.

(2) Mostrar de igual manera que para cada punto de $\mathbb{S}$ hay exactamente una isometría distinta de la identidad que lo deja fijo.

(3) Concluir que dados cuatro puntos $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{S}$ tales que $d_g(a_1, a_2) = d_g(b_1, b_2)$ existe

una única isometría que transforma a_1 en b_1 y a_2 en b_2.

(4) Probar que la circunferencia es una curva plana rígida: toda isometría suya se extiende al plano (es decir, es una isometría ambiente).

Número 182. Probar lo siguiente:

(1) El grupo de isometrías de una circunferencia es isomorfo al grupo ortogonal $O(2)$ de isometrias vectoriales del plano.

(2) Dadas dos circunferencias de radios distintos, una homotecia vectorial adecuada induce un difeomorfismo entre ellas, y un isomorfismo entre sus grupos de isometrías.

Número 183. Sea $C \subset \mathbb{R}^k$ una curva compacta y conexa. Por el teorema de clasificación C es difeomorfa a una circunferencia, y podemos fijar un difeomorfismo $\alpha : \mathbb{S}^1 \to C$ con la circunferencia unidad. Se trata de modificar α para que sea una isometría, según las siguientes indicaciones.

(1) Deducir de α un difeomorfismo local $\sigma : \mathbb{R} \to C$, suprayectivo y periódico, de periodo 2π.

(2) Reparametrizar por la longitud de arco $s = \varphi(t) = \int_0^t \|\sigma'\|$.

(3) Probar que la composición $\tau = \sigma \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R} \to C$ es de nuevo un difeomorfismo local suprayectivo y periódico, y determinar ese periodo.

(4) Construir a partir de τ una isometría $\beta : \mathbb{S} \to C$ definida en cierta circunferencia $\mathbb{S}$.

Número 184. Escribir directamente que una curva conexa y compacta es isométrica a una circunferencia utilizando una parametrización geodésica adecuada.

Número 185. Probar lo siguiente:

(1) Dos curvas compactas y conexas de igual longitud son isométricas.

(2) Los grupos de isometrías de dos curvas compactas y conexas son isomorfos.

Número 186. Sea C una curva compacta y conexa. Probar:

(1) Una isometría de C distinta de la identidad y con puntos fijos tiene exactamente dos, que dividen a C en dos arcos de igual longitud. Tal isometría es una simetría respecto de dichos puntos (para la distancia geodésica).

(2) Una isometría de C sin puntos fijos es una traslación a lo largo de C (de nuevo para la distancia geodésica).

(3) Todo punto de C se puede transformar en cualquier otro mediante una isometría.

(4) Una isometría de C no conserva necesariamente la curvatura.

Número 187. La única curva plana rígida es la circunferencia. Muéstrese esto según las siguientes indicaciones. Sea $C \subset \mathbb{R}^2$ una curva compacta, conexa y rígida, de longitud l.

(1) Las simetrías de C (en el sentido del número anterior) provienen de simetrías de $\mathbb{R}^2$.

(2) Sean a, b, c, d cuatro puntos consecutivos de C cada uno de los cuales dista $l/4$ del siguiente. Usando la simetría respecto del par a, c y la simetría respecto del par b, d, concluir que los cuatro puntos son los vértices de una elipse.

(3) Dados puntos a, b, c, d como antes, usar la traslación (sobre la curva) que transforma a en b para concluir que los cuatro puntos están de hecho en una circunferencia.

(4) Dados otros cuatro puntos a', b', c', d' en las condiciones de los anteriores, usar la traslación sobre C que transforma a en a' para deducir que el radio de la circunferencia correspondiente

a las dos cuaternas es el mismo.

(5) Mostrar que el giro de centro el de la primera cuaterna y radio $\pi/2$ deja invariante C, y concluir que el centro correspondiente a la segunda cuaterna es el mismo.

Todo lo anterior implica que C es una circunferencia.

Número 188. El teorema fundamental de las curvas planas dice que si dos arcos tienen iguales longitud y curvatura, entonces existe una isometría del plano que transforma uno en otro. Demostrar:

(1) Las isometrías ambiente de una curva plana compacta y conexa son exactamente las isometrías que conservan la curvatura.

(2) Una curva plana compacta conexa y de curvatura constante es una circunferencia.

Número 189. Describir todas las isometrías ambiente de una elipse.

Número 190. Construir curvas cuya única isometría ambiente sea la identidad.

Número 191. Un toro de revolución M es una superficie rígida. Esto se puede justificar usando la distancia geodésica. Sea σ una isometría de M.

(1) Por conservar la curvatura de Gauss, σ deja invariantes o permuta entre sí los paralelos $K = 0$, y componiendo con una simetría de $\mathbb{R}^3$ podemos suponer que los deja invariantes.

(2) Por lo que sabemos de las isometrías de la circunferencia, σ induce en el paralelo $K = 0, z > 0$ un giro o una simetría, que extendemos fácilmente a todo $\mathbb{R}^3$, y componiendo σ con la inversa de esa extensión podemos suponer que σ es la identidad en el paralelo en cuestión.

(3) Ahora, σ deja invariante la cara externa $K > 0$, y calculando distancias geodésicas de los puntos de esa cara al paralelo fijado se concluye que σ es la identidad en la cara en cuestión.

Evidentemente, lo mismo vale para la cara interna $K < 0$, y se deduce que la σ de partida era una isometría lineal de $\mathbb{R}^3$.

Número 192. Se puede analizar la rigidez de un toro de revolución de un modo más algebraico, sin usar la distancia geodésica, como sigue. Denominemos *toro elíptico* a un toro generado por una elipse al girar alrededor de una recta paralela a uno de sus ejes, y demostremos que toda isometría entre dos toros elípticos $f : T_1 \to T_2$ es una isometría ambiente.

(1) Trasladar las dos elipses al plano $(x, 0, z)$, de modo que giren alrededor del eje $(0, 0, z)$, y utilizar los paralelos de curvaturas extremas de los toros para concluir que ambas elipses son concéntricas y sus ejes horizontales tienen la misma longitud.

(2) Mostrar que después de una simetría ambiente respecto del plano $z = 0$ se puede suponer que un paralelo $z = z_1$ se transforma en otro $z = z_2$ de modo que $z_1 z_2 > 0$ y $(x, 0, z_1) \in T_1$ si y sólo si $(x, 0, z_2) \in T_2$.

(3) Deducir que $z_2 = \beta z_1$, siendo β la razón de los ejes verticales de las elipses.

(4) Por lo que sabemos de las circunferencias, f induce una isometría vectorial $\alpha(z_1)$ del paralelo $z = z_1$ sobre el paralelo $z = z_2$.

(5) Podemos pues escribir f en la forma $f(x, y, z) = (\alpha(z)(x, y), \beta z)$, escritura que se deriva fácilmente, por ser lineal respecto de x e y, para obtener $Df(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

(6) La aplicación lineal $Df(x, y, z)$ conserva la norma a lo largo de una cuádrica de $\mathbb{R}^3$, que debe contener al plano tangente al toro en el punto (x, y, z).

(7) La condición anterior implica que $\alpha(z)$ es constante y $\beta = 1$, luego f es la restricción de una isometría vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Número 193. Describir el grupo de isometrías de un toro elíptico (de revolución).

Número 194. Describir el grupo de isometrías de una superficie cuádrica de revolución. ¿Se trata de superficies rígidas?

Número 195. El teorema de Cohn-Vossen se aplica a un elipsoide arbitrario (no de revolución) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$, $a>b>c>0$, que es por tanto una superficie rígida. Describir su grupo de isometrías.

Número 196. Demostrar que una superficie $M\subset\mathbb{R}^3$ compacta conexa de curvatura constante $K>0$ es una esfera, utilizando las fórmulas integrales de Minkowski como sigue:

(1) Con la orientación adecuada, la curvatura media H es positiva, y se verifica $H\geq 2\sqrt{K}$.

(2) Deducir de la desigualdad anterior y de las fórmulas de Minkowski, la acotación

$$0\geq\int_M y(H-2\sqrt{K})v,$$

siendo v el elemento de volumen e y la distancia del origen al plano tangente.

(3) Lo anterior significa que H es también constante, e igual a $2\sqrt{K}$, con lo que todos los puntos son umbílicos y M es una esfera.

Número 197. Imitar el método anterior para demostrar que una superficie $M\subset\mathbb{R}^3$ compacta conexa con curvatura total siempre positiva y curvatura media constante es una esfera.

Número 198. Sea $M\subset\mathbb{R}^3$ la superficie de ecuación $x^4+y^4+z^4=1$. Se pide:

(1) Calcular una expresión de la aplicación de Weingarten L_a en un punto $a=(x,y,z)\in M$, derivando un campo normal unitario ν.

(2) Comprobar que la curvatura de Gauss de M es

$$K=\frac{9x^2y^2z^2}{(x^6+y^6+z^6)^2}\,,$$

y deducir que $K=0$ exactamente en las tres curvas $M\cap\{x=0\}$, $M\cap\{y=0\}$ y $M\cap\{z=0\}$.

(3) Comprobar que la curvatura media de M es

$$H=3\frac{x^2(y^6+z^6)+y^2(x^6+z^6)+z^2(x^6+y^6)}{\left(\sqrt{x^6+y^6+z^6}\right)^3}\,,$$

y deducir que $H=0$ exactamente en los seis puntos $(\pm1,0,0)$, $(0,\pm1,0)$, $(0,0\pm1)$.

(4) Encontrar los catorce puntos umbílicos de M y calcular en ellos la curvatura principal.

(5) Calcular la curvatura principal no nula en los puntos de $K=0, H\neq0$, y la línea de curvatura correspondiente.

(6) Demostrar que si $c(t)$ es una parametrización de $M\cap\{x=0\}$ por la longitud de arco, y $\tau=\mathrm{d}c/\mathrm{d}t$, entonces los tres vectores $\tau, D\tau/\mathrm{d}t$ y $(1,0,0)$ son ortogonales dos a dos.

(7) Mostrar que $\{\tau,(1,0,0)\}$ generan el plano tangente a lo largo de c, y concluir que c es una parametrización geodésica.

(8) Deducir de lo anterior que las tres curvas planas que forman $K=0$ son curvas geodésicas.

(9) Explicar cómo hay que modificar el argumento del teorema de convexidad de Hadamard

para deducir que M es convexa.

(10) Indicar por qué la demostración del teorema de Cohn-Vossen mediante fórmulas integrales vale para probar que M es rígida.

(11) Probar que M tiene exactamente 48 isometrías, y describirlas todas.

(12) ¿Puede M ser isométrica a una superficie de revolución?

Número 199. Sea $M \subset \mathbb{R}^4$ la variedad de ecuación $u^4 + x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Se pide:

(1) Calcular las tres curvaturas principales de M en un punto $p = (u, x, y, z)$ y comprobar que son

$$k_1(p) = \frac{2u^2(3 - u^4)}{\sqrt{(4u^6 - u^4 + 1)^3}}\,, \qquad k_2(p) = k_3(p) = \frac{1}{\sqrt{4u^6 - u^4 + 1}}$$

(2) Calcular los puntos umbílicos de M.

(3) Calcular las direcciones principales en un punto arbitrario de M.

(4) Estudiar la rigidez de M.

(5) Describir el grupo de isometrías de M.

Número 200. Sea $M \subset \mathbb{R}^4$ la hipersuperficie de ecuación $au^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $a > 0$. Se pide:

(1) Calcular una expresión de la aplicación de Weingarten L_p en un punto $p = (u, v, 0, 0) \in M$ derivando un campo normal unitario ν.

(2) Mostrar que mediante una isometría ambiente, cualquier punto $(u, x, y, z) \in M$ se puede transformar en otro de la forma $(u, v, 0, 0) \in M$, $v \geq 0$.

(3) Deducir que las curvaturas principales de M son constantes a lo largo de $M \cap \{u^2 = \text{ cte }\}$, y calcularlas.

(4) Concluir que las curvaturas de Gauss y media de M son, respectivamente:

$$K = \frac{a}{\sqrt{t^5}} \quad \text{y} \quad H = \frac{2t + a}{\sqrt{t^3}},$$

donde $t = a(a - 1)u^2 + 1$, y deducir que son siempre siempre > 0.

(5) Calcular los valores mínimos y máximos de K y L, y los puntos de M en los que se alcanzan, según los valores del parámetro a.

(6) Encontrar los dos puntos umbílicos de M y calcular en ellos la curvatura principal.

(7) Demostrar que, salvo composición con la simetría ortogonal respecto del hiperplano $u = 0$, toda isometría de M es de la forma $(u, x, y, z) \mapsto (u, \sigma(x, y, z))$ para una isometría vectorial σ de ese hiperplano $u = 0$.